

Formule de Stokes

Théorème 5.0.1 (Formule de Stokes généralisée) Soit M une variété différentiable orientée de dimension n et $\beta \in \Omega^{n-1}(M)$ une forme différentielle de degré $n-1$ sur M à support compact. Alors

$$\int_M d\beta = \int_{\partial M} \beta.$$

Remarque Si $\partial M = \emptyset$, le théorème dit que $\int_M d\beta = 0$ pour tout $\beta \in \Omega^{n-1}(M)$ à support compact. Si $\partial M \neq \emptyset$ on oriente ∂M de façon compatible avec l'orientation de M .

Preuve. On se donne un atlas orienté $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ localement fini pour M et on choisit une partition de l'unité associée $\{\eta_\alpha\}$. En posant

$$\beta = \sum_{\alpha} \eta_{\alpha} \cdot \beta,$$

on voit qu'il suffit de prouver le théorème pour les formes différentielles à support dans un domaine de carte. Comme de plus

$$\int_{U_{\alpha}} \gamma = \int_{\varphi_{\alpha}(U_{\alpha})} (\varphi_{\alpha})_*(\gamma)$$

pour tout $\gamma \in \Omega^n(U_{\alpha})$, on conclut qu'il suffit de prouver le théorème pour les $(n-1)$ formes à support compact dans le demi-espace fermé

$$\overline{\mathbb{H}}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^1 \leq 0\}$$

On suppose donc que $\beta \in \Omega^{n-1}(\overline{\mathbb{H}}^n)$ est à support compact. On pose

$$\omega = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n$$

et pour $1 \leq j \leq n$:

$$\theta^j = (-1)^{j-1} dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Alors on a

$$dx^i \wedge \theta^j = \delta_{i,j} \omega$$

(on remarque aussi que $\theta^j = *dx^j$). Toute forme $\beta \in \Omega^{n-1}(\overline{\mathbb{H}}^n)$ s'écrit de façon unique

$$\beta = \sum_{j=1}^n b_j(x) \theta^j.$$

Alors

$$d\beta = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_j}{\partial x^i} dx^i \wedge \theta^j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial b_j}{\partial x^j} \omega$$

(remarquer le lien avec la divergence des champs de vecteurs).

Maintenant nous identifions $\partial \overline{\mathbb{H}}^n$ à $\mathbb{R}^{n-1}$ via le plongement $\iota : \mathbb{R}^{n-1} \hookrightarrow \overline{\mathbb{H}}^n$ donné par $(x^2, x^3, \dots, x^n) \mapsto (0, x^2, x^3, \dots, x^n)$. On a alors

$$\int_{\partial \overline{\mathbb{H}}^n} \iota^* \beta = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} b_1(0, x^2, x^3, \dots, x^n) dx^2 dx^3 \dots dx^n.$$

D'autre part, comme b_j est à support compact, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial b_j}{\partial x^i} dx^j = 0$$

pour $2 \leq j \leq n$. Pour $j = 1$, on a

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\partial b_1}{\partial x^1} dx^1 = b_1(0, x^2, x^3, \dots, x^n).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{H}^n} d\beta &= \int_{\mathbb{H}^n} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial b_j}{\partial x^j} \right) \omega = \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\partial b_j}{\partial x^j} dx^1 dx^2 dx^3 \dots dx^n. \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\partial b_1}{\partial x^1} dx^1 \right) dx^2 dx^3 \dots dx^n + \sum_{j=2}^n \int_{\mathbb{H}^{n-1}} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial b_j}{\partial x^j} dx^j \right)}_{=0} dx^1 \dots \widehat{dx^j} \dots dx^n \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} b_1(0, x^2, x^3, \dots, x^n) dx^2 dx^3 \dots dx^n \\ &= \int_{\partial \overline{\mathbb{H}^n}} \iota^* \beta. \end{aligned}$$