

Exercice 14.1. Soit $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ la forme différentielle définie par

$$\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy.$$

- (a) Sur le domaine $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) \mid \forall z \in \mathbb{R}\}$, calculer l'expression de ω en coordonnées sphériques. On rappelle que les coordonnées sphériques sont données par

$$(x, y, z) = (r \sin(\theta) \cos(\varphi), r \sin(\theta) \sin(\varphi), r \cos(\theta)).$$

- (b) Calculer $d\omega$ en coordonnées cartésiennes et en coordonnées sphériques, et montrer que les deux résultats sont les mêmes.
- (c) Soit $\tilde{\omega}$ la restriction de ω à la sphère de rayon 1. Calculer sa représentation locale en coordonnées sphériques $(1, \theta, \varphi)$. Remarquons que ces coordonnées ne sont bien définies que sur l'ouvert de la sphère suivant $U = S^2 \setminus \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\}$.
- (d) Montrer que $\tilde{\omega}$ ne s'annule jamais sur la sphère.

hint: Pour calculer la restriction de ω à S^n , se rappeler que cette restriction est donnée par

$$\tilde{\omega} \equiv i^*(\omega),$$

où $i : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est l'inclusion.

Exercice 14.2. Soient $c : [a, b] \rightarrow M$ une courbe lisse dans une variété M et α une forme différentielle de degré 1 sur M . On pose

$$\int_c \alpha = \int_{[a,b]} c^* \alpha = \int_a^b \alpha_{c(t)}(c'(t)) dt$$

l'intégrale curviligne de α le long de c .

- (a) Supposons que la forme α soit exacte (donc il existe $f \in C^\infty(M)$ telle que $\alpha = df$). Que vaut $\int_c \alpha$?
- (b) En particulier, que peut-on dire de l'intégrale curviligne d'une forme exacte le long d'une courbe fermée (c'est-à-dire telle que $c(a) = c(b)$) ?
- (c) En déduire que la forme différentielle

$$\alpha = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

n'est pas exacte sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (on a vu à la série 12 que cette forme est fermée)

Exercice 14.3. (Lemme de Poincaré dans $\mathbb{R}^n$) Le but de cet exercice est de montrer que toute forme fermée sur $\mathbb{R}^n$ est exacte, ou autrement dit, $H_{DR}^k(\mathbb{R}^n) = 0$ pour tout $k > 0$.

Soient $(x^1, \dots, x^{n-1}, x^n = t)$ des coordonnées sur $\mathbb{R}^n$. Soit $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$. Alors ω se décompose comme $\omega = \alpha + dt \wedge \beta$ avec

$$\alpha = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{n-1} a_{i_1, \dots, i_k}(x, t) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} =: a_I(x, t) dx^I \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$$

$$\beta = \sum_{j_1, \dots, j_{k-1}=1}^{n-1} b_{j_1, \dots, j_{k-1}}(x, t) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{k-1}} =: b_J(x, t) dx^J \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n).$$

Les formes α et β sont dites *de type I* et les formes contenant dt sont dites *de type II*.

- (a) Montrer que $d\omega = d'\alpha + d''\alpha - dt \wedge d'\beta$, où $d'\alpha$ et $d'\beta$ sont les parties de type I de $d\alpha$ et $d\beta$, et $d''\beta$ est la partie de type II de $d\beta$.
- (b) On suppose maintenant que ω est **fermée**, c'est-à-dire que $d\omega = 0$. Montrer alors que

$$d'\beta = \frac{\partial a_I}{\partial t}(x, t) dx^I.$$

- (c) Montrer le **lemme de Poincaré dans $\mathbb{R}^n$** : Soit $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ une k -forme fermée. Alors $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ est exacte.
- (d) Montrer que ce lemme reste vrai si l'on considère une boule ouverte B à la place de $\mathbb{R}^n$. De façon générale, montrer que le lemme reste vrai si on remplace $\mathbb{R}^n$ par un domaine *difféomorphe* à $\mathbb{R}^n$.

Remarque: Le "vrai" lemme de Poincaré s'énonce de la façon suivante: Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un domaine étoilé. Alors $H_{DR}^p(U) = 0$ pour $p \geq 1$, où $H_{DR}^p(U)$ est le p -ème groupe de cohomologie de De Rahm de U . Un corollaire immédiat de ce lemme est que toute k -forme fermée sur une variété est localement exacte. Il est possible, quoiqu'assez difficile de montrer que tout domaine étoilé est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$.