Exercice 14.1. Soit $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ la forme différentielle définie par

$$\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy\,.$$

(a) Sur le domaine $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) \ \ \forall z \in \mathbb{R}\}$, calculer l'expression de ω en coordonnées sphériques. On rappelle que les coordonnées sphériques sont données par

$$(x,y,z) = (r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\sin(\varphi), r\cos(\theta))\,.$$

(b) Calculer $d\omega$ en coordonnées cartésiennes et en coordonnées sphériques, et montrer que les deux résultats sont les mêmes.

(c) Soit $\tilde{\omega}$ la restriction de ω à la sphère de rayon 1. Calculer sa représentation locale en coordonnées sphériques $(1,\theta,\varphi)$. Remarquons que ces coordonnées ne sont bien définies que sur l'ouvert de la sphère suivant $U = S^2 \setminus \{(0,0,1),(0,0,-1)\}$.

(d) Montrer que $\tilde{\omega}$ ne s'annule jamais sur la sphère.

hint: Pour calculer la restriction de ω à S^n, se rappeler que cette restriction est donnée par

$$\tilde{\omega} \equiv i^\star(\omega)\,,$$

où $i : S^2 \to \mathbb{R}^3$ est l'inclusion.

Solution 14.1. (a) The solution of this part presents a rather lenghty computation. However, it is not difficult, it's only a matter of being careful.

Recall that in order to compute the form ω in the new coordinates, we can see the change of coordinates as a map $\varphi : U \to U$, where $U \subset \mathbb{R}^3$ is the domain of the spherical coordinates, and compute $\varphi^\star\omega$. In our case, $\varphi(r,\theta,\varphi) = (r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\sin(\varphi), r\cos(\theta))$.

Thus we obtain

$$\begin{aligned}
\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dz + zdx \wedge dy = \\
= [r\sin(\theta)\cos(\varphi)] \cdot [d(r\sin(\theta)\sin(\varphi)) \wedge d(r\cos(\theta))] + \\
+ [r\sin(\theta)\sin(\varphi)] \cdot [d(r\cos(\theta)) \wedge d(r\sin(\theta)\sin(\varphi))] + \\
+ [r\cos(\theta)] \cdot [d(r\sin(\theta)\cos(\varphi)) \wedge d(r\sin(\theta)\sin(\varphi))]\,.
\end{aligned}$$

Once this form has been obtained, in order to compute the result it is convenient to isolate the coefficients of the three base forms $d\theta \wedge d\varphi$, $dr \wedge d\varphi$, $dr \wedge d\theta$. In the end, we obtain

$$\omega = r^3\sin(\theta)d\theta \wedge d\varphi\,.$$

(b) In both coordinates it is easy to compute the differential of ω. We obtain

$$d\omega = 3dx \wedge dy \wedge dz = 3r^2\sin(\theta)dr \wedge d\theta \wedge d\varphi\,.$$

Note that $r^2\sin(\theta)$ is the determinant of the Jacobian of the spherical change of variables. Thus the computation in cartesian and in spherical coordinates do give the same result.

(c) The restriction of ω to a subset is obtained by considering the inclusion map $i : S^2 \to \mathbb{R}^3$ and by computing

$$\tilde{\omega} = i^\star(\omega)\,.$$

Since on the set U the local representation of i is $i : (\theta, \varphi) = (1, \theta, \varphi)$, a very simple map, it is immediate to see that

$$\tilde{\omega} = \sin(\theta) d\theta \wedge d\varphi = d(\cos(\theta)) \wedge d\varphi\,.$$

(d) Point (c) proves that $\tilde{\omega}$ never vanishes on the set U. In order to prove that it does not vanish on the whole sphere, we have to compute $\tilde{\omega}$ on another coordinate system which covers $S^2 \setminus U = \{(0,0,1),(0,0,-1)\}$.

Actually we can play a simple trick. If we change the cartesian coordinates in $\mathbb{R}^3$ by $x' = y, y' = z$ and $z' = x$, we can see immediately that the local representation of ω remains unchanged. In particular:

$$\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy = x'dy' \wedge dz' + y'dz' \wedge dx' + z'dx' \wedge dy'\,.$$

Now, if we use spherical coordinates with respect to these new coordinates, we obviously obtain the same results as before. Thus we prove that $\tilde{\omega}$ does not vanish on S^2 minus the two points with $x' = y' = 0$ and $z' = \pm 1$. These points are the points $(\pm 1, 0, 0)$ in the original cartesian coordinates.

Now we can conclude that $\tilde{\omega}$ never vanishes on the whole S^2.

Exercice 14.2. Soient $c : [a, b] \to M$ une courbe lisse dans une variété M et α une forme différentielle de degré 1 sur M. On pose

$$\int_c \alpha = \int_{[a,b]} c^* \alpha = \int_a^b \alpha_{c(t)}(c'(t))dt$$

l'intégrale curviligne de α le long de c.

(a) Supposons que la forme α soit exacte (donc il existe $f \in C^\infty(M)$ telle que $\alpha = df$). Que vaut $\int_c \alpha$?

(b) En particulier, que peut-on dire de l'intégrale curviligne d'une forme exacte le long d'une courbe fermée (c'est-à-dire telle que $c(a) = c(b)$) ?

(c) En déduire que la forme différentielle

$$\alpha = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

n'est pas exacte sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (on a vu à la série 13 que cette forme est fermée)

Solution 14.2. (a) Si $\alpha = df$, on a par définition

$$\int_c \alpha = \int_c df = \int_{[a,b]} c^*(df) = \int_a^b df_{c(t)}(c'(t))dt = \int_a^b (f \circ c)'(t)dt = f(c(b)) - f(c(a)),$$

où la dernière égalité provient du théorème fondamental du calcul intégral.

(b) De façon évidente, si $c(a) = c(b)$, alors $\int_c \alpha = f(c(a)) - f(c(a)) = 0$.

(c) En utilisant les deux points précédents, on voit que si α est exacte, alors son intégrale curviligne sur une courbe fermée s'annule. Or, si $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est la courbe définie par $c(t) = (\cos t, \sin t)$, alors

$$\int_c \alpha = \int_{[0,2\pi]} \frac{\cos t \cdot d(\sin t) - \sin t \cdot d(\cos t)}{\cos^2 t + \sin^2 t} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.$$

Et donc α ne peut pas être exacte. Nous avons donc un exemple de 1-forme qui est fermée mais pas exacte. On remarquera au passage que la propriété d'être *exacte* pour les formes différentielles dépend uniquement de la *topologie* du domaine (de la variété).

Exercice 14.3. **(Lemme de Poincaré dans $\mathbb{R}^n$)** Le but de cet exercice est de montrer que toute forme fermée sur $\mathbb{R}^n$ est exacte, ou autrement dit, $H^k_{DR}(\mathbb{R}^n) = 0$ pour tout $k > 0$.
Soient $(x^1, \ldots, x^{n-1}, x^n = t)$ des coordonnées sur $\mathbb{R}^n$. Soit $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$. Alors ω se décompose comme $\omega = \alpha + dt \wedge \beta$ avec

$$\alpha = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n-1} a_{i_1,\ldots,i_k}(x,t)dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} =: a_I(x,t)dx^I \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$$

$$\beta = \sum_{j_1,\ldots,j_{k-1}}^{n-1} b_{j_1,\ldots,j_{k-1}}(x,t)dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_{k-1}} =: b_J(x,t)dx^J \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n).$$

Les formes α et β sont dites *de type I* et les formes contenant dt sont dites *de type II*.

(a) Montrer que $d\omega = d'\alpha + d''\alpha - dt \wedge d'\beta$, où $d'\alpha$ et $d'\beta$ sont les parties de type I de $d\alpha$ et $d\beta$, et $d''\beta$ est la partie de type II de $d\beta$.

(b) On suppose maintenant que ω est **fermée**, c'est-à-dire que $d\omega = 0$. Montrer alors que

$$d'\beta = \frac{\partial a_I}{\partial t}(x,t)dx^I.$$

(c) Montrer le **lemme de Poincaré dans** $\mathbb{R}^n$: Soit $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ une k-forme fermée. Alors $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ est exacte.

(d) Montrer que ce lemme reste vrai si l'on considère une boule ouverte B à la place de $\mathbb{R}^n$. De façon générale, montrer que le lemme reste vrai si on remplace $\mathbb{R}^n$ par un domaine *difféomorphe* à $\mathbb{R}^n$.

Remarque: Le "vrai" lemme de Poincaré s'énonce de la façon suivante: Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un domaine étoilé. Alors $H^p_{DR}(U) = 0$ pour $p \geq 1$, où $H^p_{DR}(U)$ est le p-ème groupe de cohomologie de De Rahm de U. Un corollaire immédiat de ce lemme est que toute k-forme fermée sur une variété est localement exacte. Il est possible, quoiqu'assez difficile de montrer que tout domaine étoilé est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$.

Solution 14.3. (a) On a par les propriétés de la différentielle extérieur et du produit extérieur.

$$\begin{aligned} d\omega &= d(\alpha + dt \wedge \beta) \\ &= d'\alpha + d''\alpha + d'(dt \wedge \beta) + d''(dt \wedge \beta) \\ &= d'\alpha + d''\alpha - dt \wedge d'\beta - dt \wedge d''\beta \\ &= d'\alpha + d''\alpha - dt \wedge d'\beta. \end{aligned}$$

Le terme $dt \wedge d''\beta$ est nul car il ne contient que des termes du type $dt \wedge dt \wedge \ldots$.

(b) Si ω est fermée, on a

$$\begin{aligned} d\omega = 0 &\Leftrightarrow d'\alpha + d''\alpha - dt \wedge d'\beta = 0 \\ &\Leftrightarrow d'\alpha = 0 \quad \text{et} \quad d''\alpha - dt \wedge d'\beta = 0, \end{aligned}$$

car $d'\alpha$ est le seul terme sans dt et donc il doit être nul pour que le tout soit nul. Ainsi, on a montré

$$0 = d\omega = d''\alpha - dt \wedge d'\beta,$$

ou encore

$$d''\alpha = dt \wedge d'\beta.$$

Maintenant,

$$d''\alpha = dt \wedge \frac{\partial a_I}{\partial t}(x,t)dx^I,$$

et donc avec ce qui précède on trouve

$$dt \wedge \frac{\partial a_I}{\partial t}(x,t)dx^I - dt \wedge d'\beta = 0 \Leftrightarrow dt \wedge \left(\frac{\partial a_I}{\partial t}(x,t)dx^I - d'\beta\right) = 0,$$

d'où $d'\beta = \frac{\partial a_I}{\partial t}(x,t)dx^I$

(c) Il faut trouver une primitive de ω, c'est-à-dire une $(k-1)$-forme θ sur $\mathbb{R}^n$ telle que $d\theta = \omega$. En notant $(x^1, \dots, x^{n-1}, t) = (x,t)$, on définit la forme suivante:

$$\theta_{(x,t)} = \int_0^t \beta_{(x,s)} ds := \left(\int_0^t b_J(x,s)ds\right) dx^J \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n).$$

On a alors

$$\begin{aligned}
d\theta &= d\left(\int_0^t b_J(x,s)dsdx^J\right) \\
&= \sum_{\mu=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\int_0^t b_J(x,s)ds\right) dx^\mu \wedge dx^J + \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t b_J(x,s)ds\right) dt \wedge dx^J \\
&= \sum_{\mu=1}^{n-1} \left(\int_0^t \frac{\partial b_J}{\partial x^\mu}(x,s)ds\right) dx^\mu \wedge dx^J + b_J(x,t)dt \wedge dx^J \\
&= \int_0^t \left(\sum_{\mu=1}^{n-1} \frac{\partial b_J}{\partial x^\mu}(x,s)dx^\mu \wedge dx^J\right) ds + dt \wedge b_J(x,t)dx^J.
\end{aligned}$$

Or l'intégrand de la dernière expression est égal à $d'\beta_{(x,s)}$ et le deuxième terme vaut $dt \wedge \beta$, donc par le point (a) on a

$$\begin{aligned}
d\theta &= \int_0^t d'\beta_{(x,s)}ds + dt \wedge \beta \\
&= \left(\int_0^t \frac{\partial a_I}{\partial t}(x,s)ds\right) dx^I + dt \wedge \beta \\
&= a_I(x,t)dx^I + dt \wedge \beta \\
&= \alpha + dt \wedge \beta \\
&= \omega.
\end{aligned}$$

(d) Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to B$ un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans la boule ouverte. Alors si $\omega \in \Omega^k(B)$ est telle que $d\omega = 0$, on a par naturalité de d que $\varphi^*\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ est fermée. Et donc par le point précédent, il existe $\theta \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ telle que $d\theta = \varphi^*\omega$. Il suffit alors de "pousser" la forme θ dans B pour obtenir

$$d(\varphi_*\theta) = \varphi_*(d\theta) = \varphi_*(\varphi^*\omega) = \omega.$$

Et donc $\varphi_*\theta$ est une primitive de ω.

On rappelle que $\varphi_* : \Omega^k(B) \to \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ envoie une forme α sur la forme définie par

$$(\varphi_*\alpha)_x(v_1, \dots, v_k) = \alpha_{\varphi^{-1}(x)}(d\varphi^{-1}(v_1), \dots, d\varphi^{-1}(v_k)).$$