EPFL - automne 2016	M. Troyanov
Introduction aux Variétés Différentiables	24 janvier 2017
Examen	8h15–11h15

1. *(12 points)*

(a) Définir ce qu'on appelle une fonction plateau C^∞ au voisinage d'un point p d'une variété différentiable M.

Dans la suite de ce problème, on admet que de telles fonctions existent au voisinage de tout point!

(b) Prouver que $C^\infty(M)$ est un espace vectoriel et que $\dim(C^\infty(M)) = \infty$.

(c) Soient $A, B \subset M$ deux sous-ensembles compacts non vides de M. Démontrer que si $A \cap B = \emptyset$, alors il existe une fonction $f \in C^\infty(M)$ telle que $f \equiv 1$ sur A et $f \equiv 0$ sur B.

2. *(10 points)*

(a) On note (x, y, z, t) les coordonnées standard sur $\mathbb{R}^4$. Déterminer si les formes de suivantes sur $\mathbb{R}^4$ sont fermées ou exactes, et essayer de trouver une primitive dans le cas où elles existent

(i) $\alpha = e^x dy \wedge dz + y dx \wedge dz - t^2 dx \wedge dt$,

(ii) $\beta = x^2 dx \wedge dy \wedge dz - t^2 dt \wedge dy \wedge dz$.

(b) On note $i : S^2 \to \mathbb{R}^4$ l'injection définie par $i(x, y, z) = (x, y, z, 0)$. Que peut-on dire de $i^*\alpha$ et de $i^*\beta$ (en particulier sont-elles fermées, exactes)?

3. *(24 points)*

(a) Soit M une variété C^∞ et $X, Y \in \Gamma(M)$ deux champs de vecteurs sur M. Définir ce qu'est le crochet $[X, Y]$.

(b) Prouver que $[X, Y] \in \Gamma(M)$.

(c) Définir ce qu'est une algèbre de Lie.

(d) Démontrer que $(\Gamma(M), [\ ,\ ])$ est une algèbre de Lie.

(e) Soit $f : M \to N$ un difféomorphisme C^∞ entre deux variétés et $X \in \Gamma(M)$. Comment définit-on le champ de vecteurs $f_*X \in \Gamma(N)$?

(f) Démontrer que $[f_*X, f_*Y] = f_*[X, Y]$ pour tous $X, Y \in \Gamma(M)$.

4. *(4 points)* Calculer le crochet des champs de vecteurs

$$X = e^x \frac{\partial}{\partial x} - e^{-y} \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{et} \quad Y = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$$

sur $\mathbb{R}^2$.

5. *(19 points)*

(a) Expliquer ce qu'est l'espace tangent en un point d'une variété différentiable.

(b) Quelle est sa dimension ? justifier soigneusement votre affirmation !

(c) Comment associe-t-on une base de T_pM à une carte de M au voisinage de p ?

(d) Ecrire la formule de changement base sur T_pM lorsqu'on change de carte.

(e) Prouver cette formule.

6. *(17 points)* On considère l'application $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$F(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$$

(a) Ecrire la matrice Jacobienne de F.

(b) Pour quelles valeurs de (x, y, z) a-t-on $\mathrm{rang}(F) < 3$.

(c) On note $f = F|_{S^2}$ la restriction de F à la sphère unité. Montrer que $f : S^2 \to \mathbb{R}^4$ est une immersion.

(d) Prouver qu'on peut construire à partir de f un plongement $\bar{f} : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^4$

7. *(14 points)* Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert du plan euclidien. On définit une application $* : \Omega^1(U) \to \Omega^1(U)$ par

$$*\,(a(x, y)dx + b(x, y)dy) = b(x, y)dx - a(x, y)dy.$$

(a) Que vaut $*(*\omega)$?

(b) Montrer que pour tout vecteur tangent $X \in T_pU$ et tout $\omega \in \Omega^1(U)$ on a

$$(*\omega)(X) = \omega(\mathbf{J}X)$$

où $\mathbf{J}$ est l'opérateur de rotation d'un quart de tour dans le sens positif définit par

$$\mathbf{J}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{J}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}.$$

(c) Pour une fonction $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ quelconque, calculer $d * df$. Comment appelle-t-on une fonction telle que $d * df = 0$?

(d) Soit $f, g \in C^\infty(U, \mathbb{R})$, montrer que la fonction $h \in C^\infty(U, \mathbb{C})$ définie par

$$h = f + \sqrt{-1}g$$

est holomorphe si et seulement si $df = *dg$ (on identifie $U \subset \mathbb{R}^2$ à un ouvert de $\mathbb{C}$).
En déduire que dans ce cas $d * df = d * dg = 0$.

Remarque : l'application $*$ ici définie s'appelle l'étoile de Hodge *pour les formes différentielles dans le plan.*