

Série 1

**ATTENTION : les prochaines séries ne seront plus distribuées.
Vous devrez les imprimer vous-mêmes**

Exercice 1 *

Démontrer qu'il n'existe pas de fraction (=nombre rationnel) x telle que $x^2 = 3$.

Exercice 2 (Vrai ou Faux)

Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

- a) $f \circ g = g \circ f \iff f = g$.
- b) Si f et g sont injectives, alors $f \circ g$ est injective.
- c) Si $f \circ f$ est injective, alors f est injective.
- d) Si $f \circ g$ est injective, alors g est injective.
- e) Si $f \circ g$ est injective, alors f est injective.
- f) Si $f \circ g$ est surjective, alors f est surjective.

Exercice 3

Donner l'ensemble image des fonctions $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ci-dessous.

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $-2x + 1, D = \mathbb{R}$ | 7. $x^2 + 1, D = \mathbb{R}$ | 13. $\frac{1}{3} \sin x, D = \mathbb{R}$ |
| 2. $-2x + 1, D = [-1, 1]$ | 8. $1 - x^2, D = \mathbb{R}$ | 14. $\sin(\frac{\pi}{4} \sin x), D = \mathbb{R}$ |
| 3. x^p (p impair) | 9. $x^2 + 2x, D =]-\infty, 0[$ | 15. $\frac{1}{x^2+1}, D = \mathbb{R}$ |
| 4. x^p (p pair) | 10. $\operatorname{tg} x, D = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ | 16. $\begin{cases} x + 1 & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{1}{2}(x - 1) & \text{si } x < 0 \end{cases}$ |
| 5. $\frac{1}{x}, D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ | 11. $\sin x, D = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ | |
| 6. $\frac{1}{x}, D =]0, \infty[$ | 12. $\cos x, D = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ | |

Exercice 4

Pour chacun des ensembles C ci-dessous, donner un exemple explicite de bijection $f :]0, 1[\longrightarrow C$.

- | | |
|--------------------------------|------------------------------|
| a) $C =]0, b[$, où $b > 0$. | d) $C =]-\infty, \infty[$. |
| b) $C =]a, b[$, où $a < b$. | |
| c) $C =]0, \infty[$. | e) $C = [0, 1]$. |

Exercice 5

Considérons l'équation $x^2 + x + 1 = 0$. Détailler soigneusement ce qui est correct et ce qui ne l'est pas dans le raisonnement suivant.

D'une part, écrivons $x = -1 - x^2$. D'autre part, si l'on divise l'équation de départ par x , on trouve $x + 1 + 1/x = 0$ et donc $x = -1 - 1/x$. En comparant les deux expressions obtenues pour x , il suit que $x^2 = 1/x$. Nous déduisons $x^3 = 1$ et donc $x = 1$.

Restez purement dans les nombres réels même si vous connaissez déjà les nombres complexes !

Exercice 6

Calculer la somme

$$S = 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \dots + 2018 \cdot 2^{2018}$$