

Série 2

(l'exercice à rendre est marqué avec *)

Exercice 1

Montrer par récurrence que

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

pour tout entier $n \geq 0$.

Exercice 2*

Trouver (ou même deviner) une formule pour

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1)$$

et la démontrer par récurrence.

Exercice 3

Vérifier l'affirmation du cours que

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

est bel et bien une formalité algébrique si on pose

$$F_n = \frac{\rho^n - (-\rho)^{-n}}{\sqrt{5}}$$

avec le nombre d'or $\rho = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 4

Les ensembles A, B suivants sont considérés comme sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

- a) Soit $A =]-1, \sqrt{2}]$. Montrer que $\inf A = -1$, et que $\sup A = \sqrt{2}$.
- b) Soit $B = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$. Montrer que $\inf B = 0$, et que $\sup B = 1$.

Exercice 5

Donner l'infimum et le supremum des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ ci-dessous et préciser s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum.

- a) $B =]\sqrt{3}, \infty[$
- b) $C = \{x \in \mathbb{R} : |2x - 1| \leq 1\}$
- c) $D = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 2| < 1\}$
- d) $E = \left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$
- e) $F = \left\{\frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$
- f) $G = \left\{\frac{n(-1)^n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$
- g) $H = \mathbb{Q}$
- h) $I = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$

Exercice 6 (Vrai ou Faux)

Soit $A \subset \mathbb{R}$ un intervalle borné non vide.

- a) Si $\text{Sup}(A) \in A$ et $\text{Inf}(A) \in A$, alors A est fermé.
- b) Si A est fermé, alors $\text{Sup}(A) \in A$ et $\text{Inf}(A) \in A$.
- c) Si $\text{Sup}(A) \notin A$ et $\text{Inf}(A) \notin A$, alors A est ouvert.
- d) Si A est ouvert, alors $\text{Inf}(A) \notin A$ et $\text{Sup}(A) \notin A$.

Exercice 7

Récrire les ensembles A suivants en utilisant la notation des intervalles :

- a) $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$
- b) $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\}$
- c) $A = \{x \in \mathbb{R} : -x \leq 1\}$
- d) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\}$
- e) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 2\}$
- f) $A = \{x \in \mathbb{R} : -x^3 \geq 3\}$