

Série 1

**ATTENTION : les prochaines séries ne seront plus distribuées.
Vous devrez les imprimer vous-mêmes**

Exercice 1*

Démontrer qu'il n'existe pas de fraction (=nombre rationnel) x telle que $x^2 = 3$.

Solution. On suppose que $\sqrt{3}$ soit un nombre rationnel, alors on peut prendre deux nombres $a, b \in \mathbb{N}^*$ telles que $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ et cette fraction est en forme réduite. Il suit que

$$3 = \frac{a^2}{b^2} \iff 3b^2 = a^2.$$

Maintenant on a deux cas à considérer : si b est pair ou si b est impair. Supposons que b soit pair. Alors a c'est aussi pair mais ça c'est une contradiction avec le fait que la fraction c'est en forme réduite. Supposons alors que b soit impair. Alors a c'est aussi impair et donc on a $n, m \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{aligned}a &= 2n + 1 \\ b &= 2m + 1.\end{aligned}$$

Donc on peut calculer que

$$\begin{aligned}a^2 &= 3b^2 \\ (2n + 1)^2 &= 3(2m + 1)^2 \\ 4n^2 + 4n + 1 &= 12m^2 + 12m + 3 \\ 2n^2 + 2n &= 6m^2 + 6m + 1 \\ 2(n^2 + n) &= 2(3m^2 + 3m) + 1\end{aligned}$$

Comme $n^2 + n \in \mathbb{N}$, la partie à gauche c'est un nombre pair. Mais de l'autre côté on a que $3m^2 + 3m \in \mathbb{N}$, donc la partie à droite est impaire. Mais ça c'est une contradiction.

Exercice 2 (Vrai ou Faux)

Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

- a) $f \circ g = g \circ f \iff f = g$.
- b) Si f et g sont injectives, alors $f \circ g$ est injective.
- c) Si $f \circ f$ est injective, alors f est injective.
- d) Si $f \circ g$ est injective, alors g est injective.
- e) Si $f \circ g$ est injective, alors f est injective.
- f) Si $f \circ g$ est surjective, alors f est surjective.

Solution. On a que

- FAUX. Prendre par exemple $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$ qui satisfont $(f \circ g)(x) = x^2 = (g \circ f)(x)$ avec $f \neq g$.
- VRAI. Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$. Comme f est injective, on a $g(x_1) = g(x_2)$, et par l'injectivité de g , il suit que $x_1 = x_2$. Ainsi $f \circ g$ est bien injective.
- VRAI. Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Donc on a $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$. Comme $f \circ f$ est injective, on conclut que $x_1 = x_2$ et donc f est injective.
- VRAI. Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $g(x_1) = g(x_2)$. Donc on a $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$. Comme $f \circ g$ est injective, on conclut que $x_1 = x_2$ et donc g est injective.
- FAUX. Prendre par exemple $f(x) = x^2$ et $g(x) = e^x$ qui sont définies de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Alors f n'est pas injective mais $(f \circ g)(x) = e^{2x}$ est injective.
- VRAI. Soit $y \in \mathbb{R}$. Comme $f \circ g$ est surjective, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $(f \circ g)(x) = y$. En posant $z = g(x)$ on a trouvé un $z \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = y$. Ainsi f est surjective.

Exercice 3

Si possible sans calcul, donner l'ensemble image des fonctions $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ci-dessous.

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $-2x + 1, D = \mathbb{R}$ | 7. $x^2 + 1, D = \mathbb{R}$ | 13. $\frac{1}{3} \sin x, D = \mathbb{R}$ |
| 2. $-2x + 1, D = [-1, 1]$ | 8. $1 - x^2, D = \mathbb{R}$ | 14. $\sin(\frac{\pi}{4} \sin x), D = \mathbb{R}$ |
| 3. x^p (p impair) | 9. $x^2 + 2x, D =]-\infty, 0[$ | 15. $\frac{1}{x^2+1}, D = \mathbb{R}$ |
| 4. x^p (p pair) | 10. $\operatorname{tg} x, D =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ | 16. $\begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{1}{2}(x-1) & \text{se } x < 0 \end{cases}$ |
| 5. $\frac{1}{x}, D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ | 11. $\sin x, D = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ | |
| 6. $\frac{1}{x}, D =]0, \infty[$ | 12. $\cos x, D = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ | |

Solution. On a que

- | | |
|---|---|
| 1. $\operatorname{im}(f) = \mathbb{R}$, | 10. $\operatorname{im}(f) = \mathbb{R}$, |
| 2. $\operatorname{im}(f) = [-1, 3]$, | 11. $\operatorname{im}(f) = [-1, 1]$, |
| 3. Si $p > 0$ alors $D = \mathbb{R}$ et $\operatorname{im}(f) = \mathbb{R}$.
Si $p < 0$ alors $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\operatorname{im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. | 12. $\operatorname{im}(f) = [0, 1]$, |
| 4. $\operatorname{im}(f) = [0, \infty[$ si $p > 0$, $\operatorname{im}(f) =]0, \infty[$ si $p < 0$. | 13. $\operatorname{im}(f) = [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$, |
| 5. $\operatorname{im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, | 14. $\operatorname{im}(f) = [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$, |
| 6. $\operatorname{im}(f) =]0, \infty[$, | 15. $\operatorname{im}(f) =]0, 1]$. En effet, commençons par remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1$. Maintenant, si $y \in]0, 1]$ alors $y = \frac{1}{1+x^2}$ possède une unique solution, donnée par $x = \sqrt{\frac{1-y}{y}}$. |
| 7. $\operatorname{im}(f) = [1, \infty[$, | 16. $\operatorname{im}(f) =]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup [1, \infty[$. |
| 8. $\operatorname{im}(f) =]-\infty, 1]$, | |
| 9. $\operatorname{im}(f) = [-1, \infty[$, | |

Exercice 4

Pour chacun des ensembles C ci-dessous, donner un exemple explicite de bijection $f :]0, 1[\longrightarrow C$.

- a) $C =]0, b[$, où $b > 0$.
 b) $C =]a, b[$, où $a < b$.
 c) $C =]0, \infty[$.
 d) $C =]-\infty, \infty[$.
 e) $C = [0, 1]$.

Solution. Remarquons que dans chaque cas, il existe une infinité de choix possibles.

- a) $f(x) = bx$.
 b) $f(x) = a + (b - a)x$.
 c) $f(x) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}x)$, ou $f(x) = \frac{1}{x} - 1$, ou $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} - 1$.
 d) $f(x) = \operatorname{tg}(\pi(x - \frac{1}{2}))$.
 e) Suggestion : commencer par poser $f(x) = x$, puis la modifier de manière à ce que $f :]0, 1[\rightarrow [0, 1]$ devienne bijective (en particulier : 0 et 1 $\in [0, 1]$ doivent posséder au moins un antécédent). Une possibilité est de modifier $f(x) = x$ seulement sur les points de la forme $x = \frac{1}{n}$, comme suit :

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{n-2} & \text{si } x = \frac{1}{n} \text{ avec } n \geq 3, \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque : Cette fonction n'est pas continue. Comme on verra plus tard, une surjection $f :]0, 1[\rightarrow [0, 1]$ ne peut pas être continue.

Exercice 5

Considérons l'équation $x^2 + x + 1 = 0$. Détailler soigneusement ce qui est correct et ce qui ne l'est pas dans le raisonnement suivant.

D'une part, écrivons $x = -1 - x^2$. D'autre part, si l'on divise l'équation de départ par x , on trouve $x + 1 + 1/x = 0$ et donc $x = -1 - 1/x$. En comparant les deux expressions obtenues pour x , il suit que $x^2 = 1/x$. Nous déduisons $x^3 = 1$ et donc $x = 1$.

Restez purement dans les nombres réels même si vous connaissez déjà les nombres complexes !

Solution. On cherche une solution $x \in \mathbb{R}$ de $x^2 + x + 1 = 0$. Trivialement, cette solution ne peut pas être $x = 0$, puisque $1 \neq 0$. On a alors, pour $0 \neq x \in \mathbb{R}$:

$$x^2 + x + 1 = 0 \iff x = -1 - x^2$$

ainsi que

$$x^2 + x + 1 = 0 \iff x = -1 - 1/x.$$

On a aussi que

$$(x = -1 - x^2) \text{ et } (x = -1 - 1/x) \Rightarrow -1 - x^2 = -1 - 1/x.$$

On a ici "implique" et pas "équivalent".

Source de l'erreur : Une solution de la relation de droite n'est pas nécessairement solution de la relation de gauche. Et $x = 1$ est bien solution de $-1 - x^2 = -1 - 1/x$, mais pas de $x^2 + x + 1 = 0$. En effet, $x = 1$ satisfait $(-2)x = -1 - x^2$ et $(-2)x = -1 - 1/x$.

Exercice 6

Calculer la somme

$$S = 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \dots + 2018 \cdot 2^{2018}.$$

Solution. On a que

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{2018} n2^n \\ &= \sum_{n=1}^{2018} ((n-1) + 1) \cdot 2^n \\ &= \sum_{n=1}^{2018} (n-1)2^n + \sum_{n=1}^{2018} 2^n \\ &= 2 \sum_{n=1}^{2017} n2^n + \sum_{n=1}^{2018} 2^n \\ &= 2 \sum_{n=1}^{2018} n2^n - 2 \cdot 2018 \cdot 2^{2018} - 2 + 2^{2019}. \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que $(1 + x + x^2 + \dots + x^n)(1 - x) = 1 - x^{n+1}$.

Ainsi

$$S = 2S - 2018 \cdot 2^{2019} - 2 + 2^{2019} = 2S - 2017 \cdot 2^{2018} - 2.$$

Donc $S = 2 + 2017 \cdot 2^{2019}$.