Série 2

(l'exercice à rendre est marqué avec *)

Exercice 1

Montrer par récurrence que

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

pour tout entier $n \geq 0$.

Solution. Le cas $n = 0$ est trivial. Supposons alors que la formule est vrai pour $n \in \mathbb{N}_{>0}$ et on veut démontrer que elle est vrai pour $n+1$. On calcule que

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + \cdots + (n+1)^2 &= \sum_{k=1}^{n+1} k^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}.
\end{aligned}$$

Exercice 2*

Trouver (ou même deviner) une formule pour

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1)$$

et la démontrer par récurrence.

Solution. On conjecture que

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \tfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

et on démontre ça par récurrance. Le cas $n = 0$ c'est trivial. Supposons alors que la formule est vrai pour $n \in \mathbb{N}_0$ et on veut démontrer que elle est vrai pour $n+1$. On calcule que

$$\begin{aligned}
1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n+1)(n+2) &= \sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k(k+1) + (n+1)(n+2) \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \\
&= \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3} \\
&= \frac{(n+1)(n(n+2) + 3(n+2))}{3} \\
&= \frac{(n+1)(n^2+5n+6)}{3} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)((n+1)+2)}{3}.
\end{aligned}$$

Exercice 3

Vérifier l'affirmation du cours que

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

est bel et bien une formalité algébrique si on pose

$$F_n = \tfrac{\rho^n - (-\rho)^{-n}}{\sqrt{5}}$$

avec le nombre d'or $\rho = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}$ et on calcule que

$$\begin{aligned}
F_n + F_{n-1} &= \frac{\rho^n - (-\rho)^{-n}}{\sqrt{5}} + \frac{\rho^{n-1} - (-\rho)^{-(n-1)}}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\rho^n - (-\rho)^{-n} + \rho^{n-1} - (-\rho)^{-(n-1)}}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\rho^n + \rho^{n-1} - ((-\rho)^{-n} + (-\rho)^{-(n-1)})}{\sqrt{5}}.
\end{aligned}$$

Maintenant on peut calculer que

$$
\begin{aligned}
\rho^n + \rho^{n-1} &= \frac{(1+\sqrt{5})^n}{2^n} + \frac{(1+\sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1}} \\
&= \frac{(1+\sqrt{5})^n + 2(1+\sqrt{5})^{n-1}}{2^n} \\
&= \frac{(1+\sqrt{5})^{n-1}((1+\sqrt{5})+2)}{2^n} \\
&= \frac{(1+\sqrt{5})^{n-1}(3+\sqrt{5})}{2^n} \\
&= \frac{(1+\sqrt{5})^{n-1}(3+\sqrt{5})}{2^n} \cdot \frac{2}{2} \\
&= \frac{2(1+\sqrt{5})^{n-1}(3+\sqrt{5})}{2^{n+1}} \\
&= \frac{(1+\sqrt{5})^{n-1}(6+2\sqrt{5})}{2^{n+1}} \\
&= \frac{(1+\sqrt{5})^{n-1}(1+\sqrt{5})^2}{2^{n+1}} \\
&= \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}} = \rho^{n+1}
\end{aligned}
$$

et que

$$
\begin{aligned}
(-\rho)^{-n} + (-\rho)^{-(n-1)} &= \frac{2^n}{(-1-\sqrt{5})^n} + \frac{2^{n-1}}{(-1-\sqrt{5})^{n-1}} \\
&= \frac{2^n + (-1-\sqrt{5})2^{n-1}}{(-1-\sqrt{5})^n} \\
&= \frac{2^n + (-1-\sqrt{5})2^{n-1}}{(-1-\sqrt{5})^n} \cdot \frac{(-1-\sqrt{5})}{(-1-\sqrt{5})} \\
&= \frac{2^n(-1-\sqrt{5}) + (1+2\sqrt{5}+5)2^{n-1}}{(-1-\sqrt{5})^{n+1}} \\
&= \frac{-2^n - 2^n\sqrt{5} + 2^{n-1} + 2^n\sqrt{5} + 5\cdot 2^{n-1}}{(-1-\sqrt{5})^{n+1}} \\
&= \frac{-2^n + 2^{n-1} + 3\cdot 2\cdot 2^{n-1}}{(-1-\sqrt{5})^{n+1}} \\
&= \frac{-2^n + 2^{n-1} + 3\cdot 2^n}{(-1-\sqrt{5})^{n+1}} \\
&= \frac{-2^{n+1}}{(-1-\sqrt{5})^{n+1}} = (-\rho)^{-(n+1)}.
\end{aligned}
$$

Donc on peut conclure que

$$
\begin{aligned}
F_n + F_{n-1} &== \frac{\rho^n + \rho^{n-1} - ((-\rho)^{-n} + (-\rho)^{-(n-1)})}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\rho^{n+1} - (-\rho)^{-(n+1)}}{\sqrt{5}} \\
&= F_{n+1}.
\end{aligned}
$$

Exercice 4

Les ensembles A, B suivants sont considérés comme sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

a) Soit $A =]-1, \sqrt{2}]$. Montrer que $\text{Inf}(A) = -1$, et que $\text{Sup}(A) = \sqrt{2}$.

b) Soit $B = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$. Montrer que $\text{Inf}(B) = 0$, et que $\text{Sup}(B) = 1$.

Solution. Rappelons que pour un ensemble A minoré, $a = \text{Inf}(A)$ est le plus grand minorant de A. Plus précisément, $a = \text{Inf}(A)$ si et seulement si

1) a est un minorant de A, c.-à-d. $a \leq x$ pour tout $x \in A$,

2) a est le plus grand minorant, c.-à-d. pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $x_\epsilon \in A$ (x_ϵ peut dépendre de ϵ) tel que $a \leq x_\epsilon \leq a + \epsilon$.

Donc on a que

a) Comme fait au cours.

b) Remarquons d'abord que 0 est un minorant de B, puisque $0 \leq \frac{1}{n}$ pour tout entier $n \geq 1$. Pour montrer que 0 est le plus grand minorant de B, fixons $\epsilon > 0$ et vérifions qu'il existe au moins un $x_\epsilon \in B$ tel que $0 \leq x_\epsilon \leq 0+\epsilon$. En effet, on peut considérer un n_ϵ suffisamment grand de façon à ce que $\frac{1}{n_\epsilon} \leq \epsilon$. Alors, l'élément $x_\epsilon := \frac{1}{n_\epsilon}$ satisfait $0 \leq x_\epsilon \leq 0 + \epsilon$. Donc on a que $\text{Inf}(B) = 0$.
Remarquons ensuite que pour tout entier $n \geq 1$, on a $\frac{1}{n} \leq 1$, et donc 1 est un majorant pour B. Comme $\frac{1}{1} = 1$, ce majorant appartient à B et donc $\text{Sup}(B) = 1$.

Exercice 5

Donner l'infimum et le supremum des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ ci-dessous et préciser s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum.

a) $B =]\sqrt{3}, \infty[$

b) $C = \{x \in \mathbb{R} : |2x - 1| \leq 1\}$

c) $D = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 2| < 1\}$

d) $E = \left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$

e) $F = \{\frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$

f) $G = \left\{\frac{n(-1)^n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$

g) $H = \mathbb{Q}$

h) $I = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$

Solution. On a que

a) On a $\text{Inf}(B) = \sqrt{3} \notin B$ et $\text{Sup}(B) = +\infty$ puisque B n'est pas majoré. Ainsi B n'admet ni minimum ni maximum.

b) $C = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq 2x - 1 \leq 1\} = [0, 1]$. Ainsi $\text{Inf}(C) = \min(C) = 0$ et $\text{Sup}(C) = \max(C) = 1$.

c) $D = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x^2 - 2 < 1\} =]-\sqrt{3}, -1[\, \cup\,]1, \sqrt{3}[$. Ainsi $\text{Inf}(D) = -\sqrt{3}$ et $\text{Sup}(D) = \sqrt{3}$ qui ne sont pas minimum et maximum car pas dans D.

d) $E = \{1 - \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\} = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\}$. Ainsi $\text{Inf}(E) = 1 - \frac{1}{0+1} = 0 = \min(E)$ et $\text{Sup}(E) = 1$.
En effet, $1 \geq 1 - \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc 1 est un majorant de E. Pour montrer que c'est le plus petit majorant, soit $\varepsilon > 0$. On veut trouver un élément $x \in E$ qui satisfait $x \geq 1 - \varepsilon$. En prenant $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $n_\varepsilon \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1$, l'élément $x = 1 - \frac{1}{n_\varepsilon+1} \in E$ satisfait la condition voulue. Ainsi on a bien $\text{Sup}(E) = 1$. Comme $1 \notin E$, E n'a pas de maximum.

e) $F = \{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\} = \{-1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, \ldots\} \cup \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots\}$, donc $\text{Inf}(F) = \min(F) = -1$ et $\text{Sup}(F) = \max(F) = \frac{1}{2}$.

f) $G = \{(-1)^n(1-\frac{1}{n+1}) : n \in \mathbb{N}\} = \{0, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \ldots\}$. Ainsi $\text{Inf}(G) = -1$ et $\text{Sup}(G) = 1$. On procède de manière similaire qu'à la question (d) : clairement -1 et 1 sont minorant respectivement majorant de G. Soient $\varepsilon > 0$ et $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $n_\varepsilon \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1$ comme dans (d). Pour éliminer l'effet du $(-1)^n$, on considère les éléments $x, y \in G$ correspondant à $2n_\varepsilon$ et $2n_\varepsilon + 1$. On a alors d'une part

$$x = (-1)^{2n_\varepsilon}\left(1 - \frac{1}{2n_\varepsilon + 1}\right) = 1 - \frac{1}{2n_\varepsilon + 1} \geq 1 - \varepsilon,$$

c.-à-d. $\text{Sup}(G) = 1$, et d'autre part

$$y = (-1)^{2n_\varepsilon+1}\left(1 - \frac{1}{(2n_\varepsilon + 1) + 1}\right) = -1 + \frac{1}{(2n_\varepsilon + 1) + 1} \leq -1 + \varepsilon,$$

d'où $\text{Inf}(G) = -1$. Comme $-1 \notin G$ et $1 \notin G$, alors G n'a pas de minimum ni maximum.

g) Comme $\mathbb{Q}$ n'est ni minoré ni majoré, on a $\text{Inf}(H) = -\infty$ et $\text{Sup}(H) = +\infty$ et donc H n'a pas de minimum, ni de maximum.

h) Rappelons que $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. On a donc, que pour tout $\epsilon > 0$, les intervalles $[0, \epsilon[$ et $]1-\epsilon, 1]$ contiennent une infinité d'irrationnels. On a donc $\text{Inf}(I) = 0$ et $\text{Sup}(I) = 1$. Comme ces deux nombres sont rationnels, ils n'appartiennent pas à I, il ne sont pas minimum et maximum.

Exercice 6 (Vrai ou Faux)

Soit $A \subset \mathbb{R}$ un intervalle borné non vide.

a) Si $\text{Sup}(A) \in A$ et $\text{Inf}(A) \in A$, alors A est fermé.

b) Si A est fermé, alors $\text{Sup}(A) \in A$ et $\text{Inf}(A) \in A$.

c) Si $\text{Sup}(A) \notin A$ et $\text{Inf}(A) \notin A$, alors A est ouvert.

d) Si A est ouvert, alors $\text{Inf}(A) \notin A$ et $\text{Sup}(A) \notin A$.

Solution. On a que

a) VRAI. Si un intervalle borné A n'est pas fermé, au moins une de ses extrémités n'appartient pas à l'intervalle. Mais les extrémités de A sont $\text{Inf}(A)$ et $\text{Sup}(A)$ qui sont dans A par hypothèse. Ainsi A est forcément fermé.

b) VRAI. Un intervalle fermé et borné est de la forme $[a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Ainsi $\text{Inf}(A) = a$ et $\text{Sup}(A) = b$ qui sont bien dans A.

c) VRAI. Comme $a = \text{Inf}(A) \notin A$, on a $a < x$ pour tout $x \in A$. Par définition de l'infimum il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un $x \in A$ tel que $a < x \leq a + \varepsilon$, ce qui assure qu'il n'y a pas de "trou" entre a et les éléments de A. De même on montre à partir de la définition du supremum que $x < \text{Sup}(A) =: b$ pour tout $x \in A$. Ainsi $A =]a, b[$ est un intervalle ouvert.

d) VRAI. Par l'absurde, supposons que $a = \text{Inf}(A) \in A$. Alors $a \leq x$ pour tout $x \in A$ et comme $a \in A$, A ne peut être ouvert. Donc $\text{Inf}(A) \notin A$. De même pour $b = \text{Sup}(A)$.

Exercice 7

Récrire les ensembles A suivants en utilisant la notation des intervalles :

a) $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$

b) $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\}$

c) $A = \{x \in \mathbb{R} : -x \leq 1\}$

d) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\}$

e) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 2\}$

f) $A = \{x \in \mathbb{R} : -x^3 \geq 3\}$

Solution. On a que

a) $A =]-\infty, 1[$

b) $A =]-\infty, 1]$

c) $A = [-1, \infty[$

d) $A = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$

e) $A = \left]-\infty, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, \infty\right[$

f) $A = \left]-\infty, -\sqrt[3]{3}\right]$