Série 3

(les exercices à rendre sont marqués avec *)

Exercice 1*

Pour chacune des suites suivantes, trouver un $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $|a_n - \ell| < \epsilon$ pour tout $n \geq N$.

a) $a_n = \frac{n}{n+1}$, $\ell = 1$, $\epsilon = \frac{1}{10}$

b) $a_n = \frac{n}{n+1}$, $\ell = 1$, $\epsilon = \frac{1}{100}$

c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $\ell = 0$, $\epsilon = \frac{1}{100}$

d) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$, $\ell = 0$, $\epsilon = \frac{1}{4}$

Exercice 2*

Montrer que la définition du cours :

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : |x_n - \ell| < \epsilon \qquad (D1)$$

est équivalente à :

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n > N : |x_n - \ell| \leq \epsilon \qquad (D2)$$

Exercice 3

Soit $a_n = \frac{3n}{n+2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{3} + \frac{3}{a_n}\right)$

Exercice 4 (Vrai ou Faux)

Soit (a_n) une suite réelle.

a) Si (a_n) est croissante, alors (a_n^2) est croissante.

b) Si (a_n) est bornée, alors (a_n) converge.

c) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, alors $|a_n| \leq \epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ si et seulement si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

e) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, alors $\lim_{n\to\infty} \big(a_n \sin(n)\big) = 0$.

f) Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, alors (a_n) diverge.

g) Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, alors (a_n) converge.

h) Si (a_n) converge, il existe $M > 0$ tel que $|a_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

i) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, alors il existe $M > 0$ tel que $|a_n - a| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

j) Si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = M > 0$, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = +M$ ou $\lim_{n\to\infty} a_n = -M$.

k) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$, alors $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\ell|$.

l) Si $a_n \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et si $\lim_{n\to\infty} b_n = L$, alors $a_n \leq L$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5

Déterminer, si elle existe, la limite $\lim_{n\to\infty} a_n$ des suites suivantes :

a) $a_n = \dfrac{5n^2 - 3n + 2}{3n^2 + 7}$ b) $a_n = (-1)^n \dfrac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n}}$ c) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+2}}{2n}$

Hint. Pour c), on pourra utiliser (après l'avoir démontrée) l'inégalité suivante :

$$1 \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \tfrac{x}{2} \qquad \forall x \geq 0$$

Exercice 6

Soit $k, n \in \mathbb{N}$, avec $0 \leq k \leq n$. On définit le coefficient binomial par

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \, .$$

Remarque : parfois, $\binom{n}{k}$ s'écrit aussi C_n^k.

a) Vérifier que pour tout $n \geq k \geq 1$:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \, .$$

b) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a la *formule du binôme de Newton*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \, .$$

c) En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \, .$$

Exercice 7

À partir uniquement de la limite $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ (que vous pouvez admettre), calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$

Remarque : ici e c'est le nombre d'Euler, c.-à-d. $e = 2,71828182845904....$

Exercice 8

Considérer la suite (a_n) définie par $a_1 := \frac{5}{2}$ et, pour $n \geq 1$,

$$a_{n+1} := \frac{a_n^2 + 6}{5}.$$

a) Montrer que $2 \leq a_n \leq 3$ pour tout pour tout $n \geq 1$,

b) Montrer que (a_n) est décroissante,

c) Conclure que (a_n) converge et calculer sa limite.