

De la concavité du logarithme

J.-C. Chappelier

9 nov. 2018

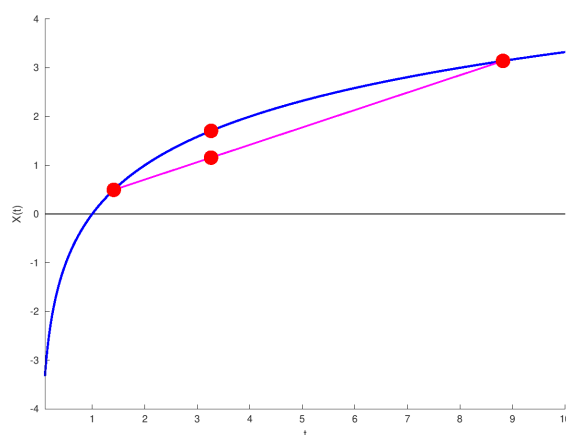


FIGURE 1 – Concavité du logarithme

Soient $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ et $0 \leq \alpha \leq 1$. Et soit $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2$ un point sur le segment x_1, x_2 .

La concavité du logarithme signifie que le point y sur la corde (x_1, x_2) en x est en dessous du point image $\log(x)$: $y \leq \log(x)$.

Par linéarité : $y = \alpha y_1 + (1 - \alpha) y_2 = \alpha \log(x_1) + (1 - \alpha) \log(x_2)$. Donc :

$$\alpha \log(x_1) + (1 - \alpha) \log(x_2) \leq \log(\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2)$$

La concavité du logarithme se traduit donc ainsi :

$$\forall x_1 > 0 \forall x_2 > 0 \forall 0 \leq \alpha \leq 1 \quad \alpha \log(x_1) + (1 - \alpha) \log(x_2) \leq \log(\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2)$$

Montrons qu'elle se généralise en :

$$P(n) : \forall n \in \mathbb{N}^* \forall x_1 > 0 \cdots \forall x_n > 0 \forall p_1, \dots, p_n : 0 \leq p_i \leq 1 ; \sum_{i=1}^n p_i = 1,$$

$$\sum_{i=1}^n p_i \log(x_i) \leq \log \left(\sum_{i=1}^n p_i x_i \right)$$

$P(1)$ est triviale :

$$\forall x_1 > 0 \log(x_1) \leq \log(x_1)$$

$P(2)$ a été établie plus haut (poser $\alpha = p_1$ et donc $1 - \alpha = p_2$).

Montrons que $P(2)$ et $P(n - 1)$ impliquent $P(n)$.

Soient $x_1 > 0, \dots, x_n > 0$ et p_1, \dots, p_n tels que $0 \leq p_i \leq 1$ et $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Posons $\alpha = \sum_{i=1}^{n-1} p_i$. Du coup $p_n = 1 - \alpha$.

Si $\alpha = 0$, tous les p_i sont nuls sauf p_n et $P(n)$ devient triviale : $\log(x_n) \leq \log(x_n)$.

Pour $\alpha \neq 0$, posons $X = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i$ (c.-à-d. $\alpha X = \sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i$). Noter que $X > 0$.

Posons également $p'_i = p_i/\alpha$. Notez que $\sum_{i=1}^{n-1} p'_i = 1$ (et $X = \sum_{i=1}^{n-1} p'_i x_i$).

Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i \log(x_i) &= \sum_{i=1}^{n-1} p_i \log(x_i) + (1 - \alpha) \log(x_n) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{n-1} p'_i \log(x_i) + (1 - \alpha) \log(x_n) \end{aligned}$$

Puis par $P(n - 1)$ appliqué aux p'_i sur le premier terme (il faut que les coefficients somment à 1) :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i \log(x_i) &\leq \alpha \log\left(\sum_{i=1}^{n-1} p'_i x_i\right) + (1 - \alpha) \log(x_n) \\ &\leq \alpha \log(X) + (1 - \alpha) \log(x_n) \end{aligned}$$

et par $P(2)$:

$$\begin{aligned} \alpha \log(X) + (1 - \alpha) \log(x_n) &\leq \log(\alpha X + (1 - \alpha)x_n) \\ &\leq \log\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right) \end{aligned}$$

QED.