

# Information, Calcul et Communication

## Module 2 : Information et Communication

# Module 2: Information et Communication

## Introduction

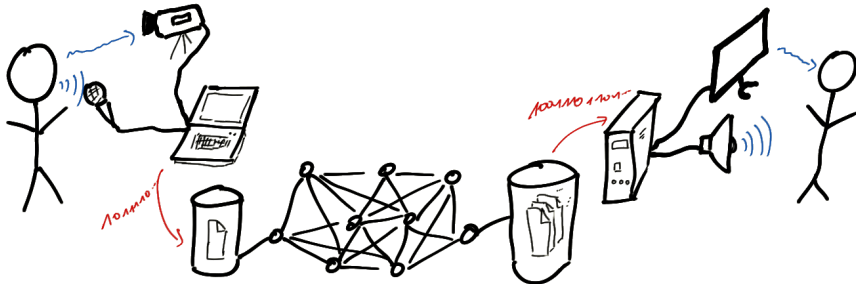
O. Lévêque – Faculté Informatique et Communications

# Introduction

Supposons que votre meilleur(e) ami(e) habite en Nouvelle-Zélande. Avec un groupe d'amis, vous désirez lui jouer un sketch pour son anniversaire.

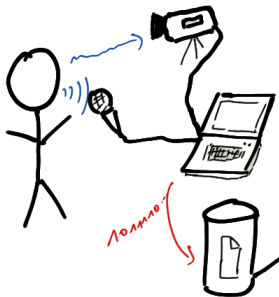
Il est désormais possible d'accomplir cette tâche en quelques minutes seulement.

Que se passe-t-il exactement lors d'une telle opération ?



# Introduction

1. A l'aide de votre smartphone, vous enregistrez une vidéo amusante.
  - ▶ Ce faisant, un signal *analogique* est converti en sa représentation *numérique* au moyen d'un algorithme sophistiqué.
  - ▶ De plus, un algorithme de *correction d'erreurs* est utilisé pour stocker le fichier dans la mémoire.



# Introduction

2. Vous téléchargez ensuite cette vidéo sur votre site web préféré, non sans en avoir réduit la taille au préalable, au moyen d'un algorithme de *compression*, pour que le téléchargement ne dure pas des heures.

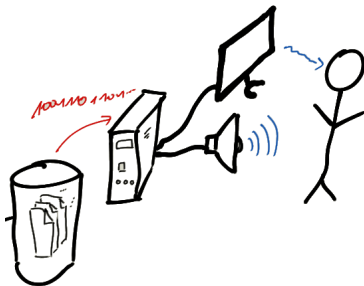
- ▶ Lors du téléchargement, deux autres algorithmes de *correction* d'erreurs sont utilisés pour protéger la *transmission* des données  
a) jusqu'à votre borne wifi, b) sur internet.
- ▶ Si vous ne désirez pas que d'autres gens puissent profiter de votre sketch, un algorithme de *cryptage* est utilisé par le site web pour empêcher d'autres utilisateurs de visionner la vidéo.



# Introduction

3. Puis votre ami(e) découvre cette vidéo sur son « mur » et la regarde.

- ▶ Un algorithme de *correction* d'erreurs est à nouveau utilisé ici...
- ▶ ...ainsi qu'un algorithme de *décryptage*,
- ▶ et le signal est *reconstruit* à partir des données numériques.



# Introduction

## En bref:

- ▶ Dans nos gestes quotidiens, nous utilisons, souvent sans nous en rendre compte, un grand nombre d'**algorithmes sophistiqués**.
- ▶ Ceci a (pour le meilleur ou pour le pire) considérablement changé notre manière de communiquer, de voyager, de voir le monde...
- ▶ Quelques **contributions fondamentales**, remontant pour certaines à plus d'une cinquantaine d'années, ont permis la réalisation de ces moyens de communication modernes.

## Objectif principal de ce module:

Comprendre quelques-unes de ces contributions fondamentales.

# Plan

## Plan du module:

- ▶ leçons 2.1 et 2.2: échantillonnage de signaux
- ▶ leçons 2.3 et 2.4: compression de données

Et ce dont nous ne parlerons pas ou peu:

- ▶ transmission de données
- ▶ cryptographie
- ▶ réseaux de communication



# Questions

Voici les questions auxquelles nous allons tenter de répondre dans ce module:

- ▶ Comment représenter / **capter** la réalité physique avec des bits ?
- ▶ Comment **restituer** cette réalité à partir de bits ?
- ▶ Comment **mesurer la quantité d'information** présente dans des données ?
- ▶ Comment **compresser** les données, i.e. les *stocker en utilisant le moins d'espace possible* ?

# Plan

## Plan détaillé des deux leçons à venir:

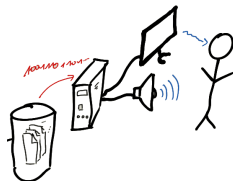
### Aujourd'hui:

- ▶ signaux, fréquences, bande passante et spectre
- ▶ filtrage
- ▶ échantillonnage



### La semaine prochaine:

- ▶ reconstruction
- ▶ théorème d'échantillonnage
- ▶ sous-échantillonnage



# Signaux, fréquences et bande passante

Qu'est-ce qu'un signal ? C'est une fonction !

## Exemples:

1. Une onde sonore ( $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ )
2. Une onde électromagnétique ( $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ )
3. Une photo noir-blanc ( $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ )
4. Une photo couleur ( $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ )
5. Une vidéo ( $X : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ )

De manière générale, on peut définir un signal comme une fonction (continue, bornée)  $X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^k$ .

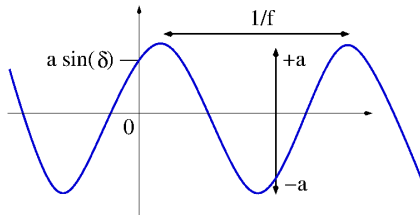
Dans le cadre de ce module, nous considérerons presque exclusivement des signaux unidimensionnels ( $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ), par souci de clarté et de simplification.

# Exemples de signaux

## Sinusoïde pure:

$$X(t) = a \sin(2\pi f t + \delta), \quad t \in \mathbb{R}$$

$a$  = amplitude,  $f$  = fréquence,  $\delta$  = déphasage



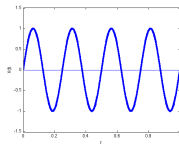
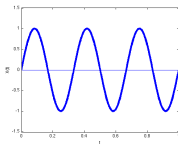
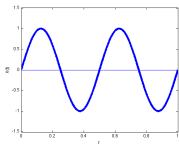
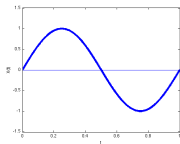
# Exemples de signaux

## Sinusoïde pure:

$$X(t) = a \sin(2\pi f t + \delta), \quad t \in \mathbb{R}$$

$a$  = amplitude,  $f$  = fréquence,  $\delta$  = déphasage

- ▶  $a = 1, f = 1, \delta = 0$ :  $X(t) = \sin(2\pi t)$
- ▶  $a = 1, f = 2, \delta = 0$ :  $X(t) = \sin(4\pi t)$
- ▶  $a = 1, f = 3, \delta = 0$ :  $X(t) = \sin(6\pi t)$
- ▶  $a = 1, f = 4, \delta = 0$ :  $X(t) = \sin(8\pi t)$



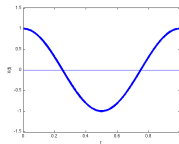
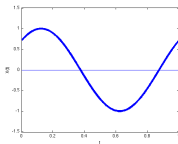
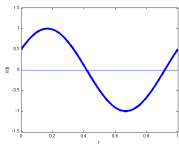
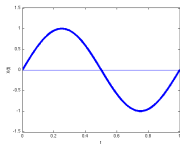
# Exemples de signaux

## Sinusoïde pure:

$$X(t) = a \sin(2\pi f t + \delta), \quad t \in \mathbb{R}$$

$a$  = amplitude,  $f$  = fréquence,  $\delta$  = déphasage

- ▶  $a = 1, f = 1, \delta = 0$ :  $X(t) = \sin(2\pi t)$
- ▶  $a = 1, f = 1, \delta = \pi/6$ :  $X(t) = \sin(2\pi t + \frac{\pi}{6})$
- ▶  $a = 1, f = 1, \delta = \pi/4$ :  $X(t) = \sin(2\pi t + \frac{\pi}{4})$
- ▶  $a = 1, f = 1, \delta = \pi/2$ :  $X(t) = \sin(2\pi t + \frac{\pi}{2}) = \cos(2\pi t)$



# Exemples de signaux

## Somme de sinusoides:

$$X(t) = a_1 \sin(2\pi f_1 t + \delta_1) + \dots + a_n \sin(2\pi f_n t + \delta_n), \quad t \in \mathbb{R}$$

$a_j$  = amplitudes,  $f_j$  = fréquences,  $\delta_j$  = déphasages

▶ Exemple:  $a_j = 1/j$ ,  $f_j = 2j$ ,  $\delta_j = 0$ ,  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

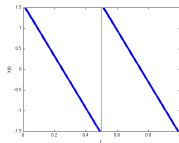
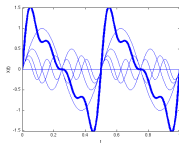
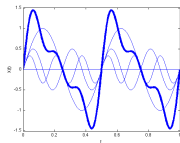
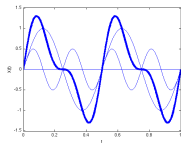
▶  $n = 1$ :  $X(t) = \sin(4\pi t)$

▶  $n = 2$ :  $X(t) = \sin(4\pi t) + \frac{1}{2} \sin(8\pi t)$

▶  $n = 3$ :  $X(t) = \sin(4\pi t) + \frac{1}{2} \sin(8\pi t) + \frac{1}{3} \sin(12\pi t)$

▶  $n = 4$ :  $X(t) = \sin(4\pi t) + \frac{1}{2} \sin(8\pi t) + \frac{1}{3} \sin(12\pi t) + \frac{1}{4} \sin(16\pi t)$

▶ «  $n = \infty$  »



# Signaux en général

**Affirmation:** (à mettre en doute...)

« Tout signal est une somme de sinusoides ! »

Dans ce cours, nous ne considérerons que des signaux qui sont effectivement des sommes de sinusoides.



# Fréquences: unité de mesure

La fréquence  $f$  contenue dans la sinusoïde pure  $X(t) = a \sin(2\pi f t + \delta)$  s'exprime en **hertz = Hz =  $\frac{1}{\text{sec}}$** .

Un signal dont la fréquence est de  $f$  Hz se répète toutes les  $T = \frac{1}{f}$  sec.

**Exemple:** La note « La » à 440 Hz est une sinusoïde pure qui se répète toutes les  $\frac{1}{440} = 2.2727... \text{ millisecondes}$ .

Cette unité de mesure a été attribuée en l'honneur d'Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894), à qui on doit:

- ▶ la vérification expérimentale de la théorie de Maxwell affirmant que la lumière est une onde électromagnétique;
- ▶ le premier système permettant la transmission et la réception d'ondes radio.



# Fréquences: quelques ordres de grandeur

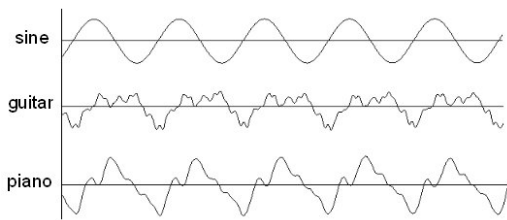
## Ondes sonores:

- ▶ 20 Hz - 20 kHz: sons audibles
- ▶ 20 kHz +: ultrasons

## Ondes électromagnétiques:

- ▶ 150 kHz - 3 GHz: ondes radio
- ▶ 3 GHz - 300 GHz: micro-ondes, radar
- ▶ 300 GHz -  $4.3 \times 10^{14}$  Hz: infrarouge
- ▶  $4.3 \times 10^{14}$  Hz -  $7.5 \times 10^{14}$  Hz: lumière visible
- ▶  $7.5 \times 10^{14}$  Hz -  $3 \times 10^{17}$  Hz: ultraviolet
- ▶  $3 \times 10^{17}$  Hz +: rayons X, rayons  $\gamma$ , rayons cosmiques...

# Tous les « las 440 » ne sont pas les mêmes!



EXEMPLE tiré de: <http://www.yuvalnov.org/temperament/>

- ▶ diapason (électronique)
- ▶ guitare
- ▶ piano

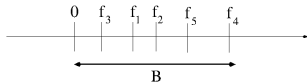
# Bande passante

Revenons aux sommes de sinusoides:

$$X(t) = a_1 \sin(2\pi f_1 t + \delta_1) + \dots + a_n \sin(2\pi f_n t + \delta_n)$$

On définit comme suit la *bande passante* de ce signal:

$$B = f_{\max} = \max\{f_1, \dots, f_n\}$$



Comme nous allons le voir, la bande passante joue un rôle primordial en traitement du signal.

# Spectre

Autre représentation graphique bien utile d'un signal : son **spectre** :

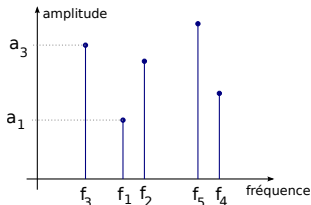
dans « l'espace des fréquences » :

axe horizontal = fréquences présentes

axe vertical = amplitude correspondante

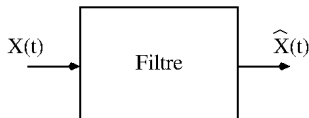
Exemple avec une somme de sinusoïdes:

$$X(t) = a_1 \sin(2\pi f_1 t + \delta_1) + \dots + a_n \sin(2\pi f_n t + \delta_n)$$



# Filtrage d'un signal

De manière générale, lorsqu'un signal ( $X(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ) passe par un **filtre**, il en ressort une version *déformée* ( $\hat{X}(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ):



Pourquoi donc vouloir filtrer un signal ?

Le plus souvent, pour **supprimer** (ou du moins, atténuer) **le bruit** présent dans le signal.

Il existe bien sûr de multiples sortes de filtres.

Dans ce cours, nous allons voir une catégorie particulière de filtres:

les **filtres « passe-bas »**

# Filtre passe-bas idéal

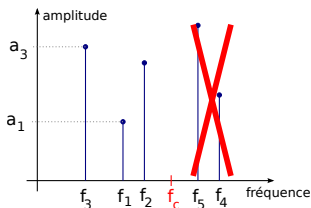
Un **filtre passe-bas idéal** est un filtre qui

supprime d'un signal toutes les fréquences supérieures à une **fréquence de coupure  $f_c$**  donnée

(i.e. supprime les hautes fréquences, généralement sources de bruit).

Concrètement, si  $X(t)$  est une somme de sinusoïdes, alors après le filtre, toutes les composantes de  $X(t)$  dont la fréquence est plus grande que  $f_c$  ont disparu :

$$X(t) = a_1 \sin(2\pi f_1 t + \delta_1) + \dots + \cancel{a_k \sin(2\pi f_k t + \delta_k)} + \dots + a_n \sin(2\pi f_n t + \delta_n)$$



# Filtre passe-bas idéal : exemple

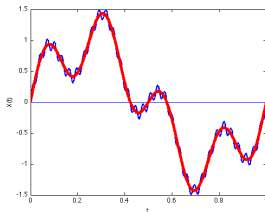
- ▶ Considérons le signal (contenant les fréquences  $f = 1, 4$  et  $32$  Hz):

$$X(t) = \sin(2\pi t) + \frac{1}{2} \sin(8\pi t) + \frac{1}{10} \sin(64\pi t)$$



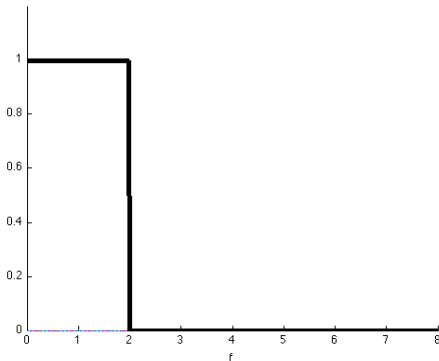
# Filtere passe-bas idéal : exemple

- Après passage au travers d'un filtre passe-bas avec fréquence de coupure  $f_c = 30$  Hz, la composante du signal à 32 Hz disparaît, et le signal devient:  $\hat{X}(t) = \sin(2\pi t) + \frac{1}{2} \sin(8\pi t)$



# Filtre passe-bas idéal dans l'espace des fréquences

Exemple :  
un filtre passe-bas idéal avec fréquence de coupure  $f_c = 2$  Hz



# Filtre à moyenne mobile

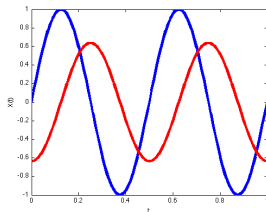
Le signal  $\hat{X}(t)$  sortant à l'instant  $t$  d'un **filtre à moyenne mobile** est donné par:

$$\hat{X}(t) = \frac{1}{T_c} \int_{t-T_c}^t X(s) ds$$

$T_c$  est la période sur laquelle on moyenne le signal avant l'instant  $t$ .

**Exemple:** Qu'arrive-t-il à une sinusoïde pure qui passe par un tel filtre ?  
 $X(t) = \sin(2\pi f t)$  devient:

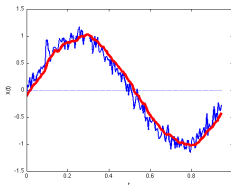
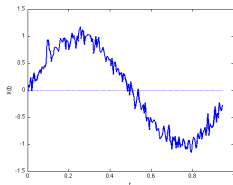
$$\begin{aligned}\hat{X}(t) &= \frac{1}{T_c} \int_{t-T_c}^t \sin(2\pi f s) ds \\ &= \frac{\cos(2\pi f (t - T_c)) - \cos(2\pi f t)}{2\pi f T_c} \\ &= \frac{\sin(\pi f T_c)}{\pi f T_c} \sin(2\pi f t - \pi f T_c)\end{aligned}$$



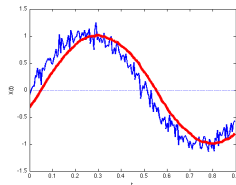
(ici,  $f = 2$  Hz,  $T_c = 0.25$  sec)

# Filtre à moyenne mobile

Autre exemple:  $X(t) \mapsto \hat{X}(t)$



$T_c = 0.05 \text{ sec}$

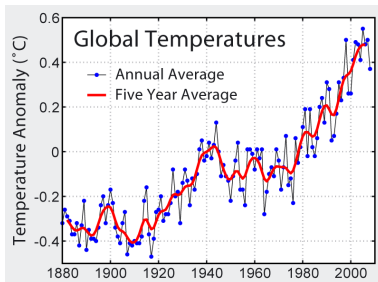


$T_c = 0.1 \text{ sec}$

Plus  $T_c$  augmente, plus le signal sortant est régulier,  
mais plus le déphasage est grand également.

# Filtre à moyenne mobile

Autre exemple:



source: Global Warming Art

**Note :** sur cette figure le signal filtré a été resynchronisé avec le signal d'origine (suppression du déphasage)

# Filtre à moyenne mobile

Revenons à la sinusoïde pure  $X(t) = \sin(2\pi f t)$ :

$$\hat{X}(t) = \frac{1}{T_c} \int_{t-T_c}^t \sin(2\pi f s) ds = \frac{\sin(\pi f T_c)}{\pi f T_c} \sin(2\pi f t - \pi f T_c)$$

De cette expression, on déduit que

$$\max_{t \in \mathbb{R}} |\hat{X}(t)| \leq \frac{1}{\pi f T_c}$$

On voit que si  $f$  est grand, alors le signal  $\hat{X}(t)$  est de faible amplitude.

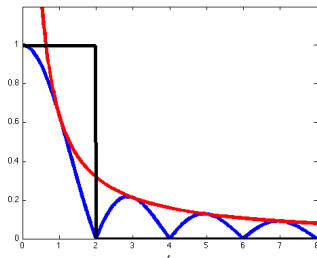
Après le passage à travers un filtre à moyenne mobile, les **hautes fréquences** d'un signal sont donc **fortement atténuées**.

Remarquer aussi que si  $f T_c$  est un nombre entier, alors on a même  $\hat{X}(t) = 0$  puisqu'alors  $\sin(\pi f T_c) = 0$ .

# Comparaison des filtres

Comparons l'atténuation des fréquences entre:

- ▶ un filtre passe-bas idéal avec fréquence de coupure  $f_c = 2$  Hz et
- ▶ un filtre à moyenne mobile de période  $T_c = 1/f_c = 0.5$  sec.



(sur ce dernier graphe apparaît en rouge la borne supérieure  $\frac{1}{\pi f T_c}$  qu'on vient de calculer)

# Filtres: conclusion

- ▶ Un filtre passe-bas sert à supprimer ou atténuer les hautes fréquences dans un signal.
- ▶ On a vu *deux* filtres passe-bas: idéal ou « à moyenne mobile »
- ▶ La semaine prochaine, nous verrons une application importante des filtres passe-bas.



# Echantillonnage d'un signal

Revenons maintenant à notre première question:

Comment représenter / **capter** la réalité physique avec des bits?

Les signaux qui nous entourent sont de nature *analogique* (ondes sonores, électromagnétiques).

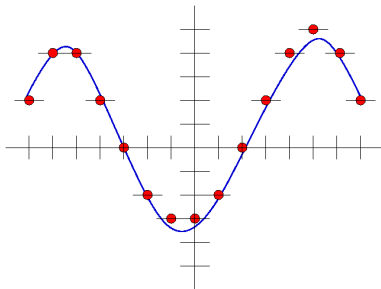
Or un ordinateur ne peut traiter que des données *numériques*.

Pour pouvoir traiter l'information contenue dans un signal ( $X(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ), il faut donc:

1. **échantillonner** le signal à des instants discrets;
2. **quantifier** les valeurs du signal à ces instants.

Une question se pose naturellement: que perd-on du signal d'origine à travers ces deux opérations successives?

# Echantillonnage d'un signal



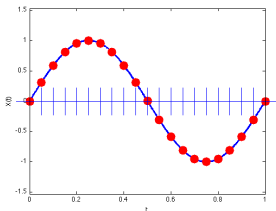
- ▶ signal échantillonné et quantifié

# Échantillonnage

Pour représenter un signal dans l'ordinateur, on va n'en garder que quelques valeurs « bien choisies »

Pour simplifier, ces valeurs sont choisies de façon périodique : on parle d'**échantillonnage**

Le signal  $X(t)$  sera donc représenté par la suite de valeurs  $X(nT_e)$

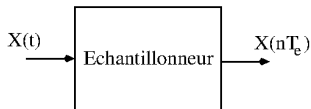


$T_e$  s'appelle la « période d'échantillonnage »

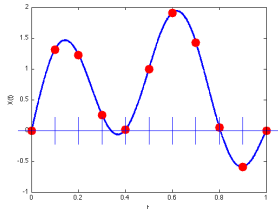
(Note : la représentation numérique des valeurs elles-mêmes (cf leçon I.4) s'appelle « quantification »)

# Echantillonnage d'un signal

Nous nous concentrons ici sur la partie « échantillonnage » :



signal entrant ( $X(t), t \in \mathbb{R}$ )  $\mapsto$  signal échantillonné ( $X(nT_e), n \in \mathbb{Z}$ ):



$T_e$  = période d'échantillonnage,  $f_e = \frac{1}{T_e}$  = fréquence d'échantillonnage

# Période d'échantillonnage $T_e$

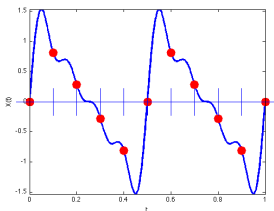
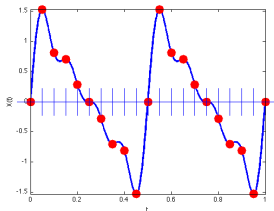
Quelle période d'échantillonnage  $T_e$  est la « bonne » ?

- ▶  $T_e$  trop petite: trop d'information à traiter...
- ▶  $T_e$  trop grande: de l'information est perdue...

# $T_e$ ne peut pas être aussi grande qu'on veut

**Exemple:** reprenons le signal vu précédemment:

$$X(t) = \sin(4\pi t) + \frac{1}{2} \sin(8\pi t) + \frac{1}{3} \sin(12\pi t) + \frac{1}{4} \sin(16\pi t)$$

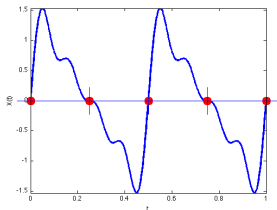
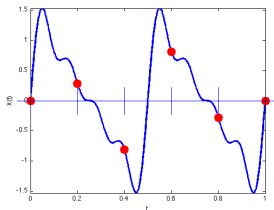


Période d'échantillonnage  $T_e = 0.05$  sec. Période d'échantillonnage  
 $T_e = 0.1$  sec.

# $T_e$ ne peut pas être aussi grande qu'on veut

**Exemple:** reprenons le signal vu précédemment:

$$X(t) = \sin(4\pi t) + \frac{1}{2} \sin(8\pi t) + \frac{1}{3} \sin(12\pi t) + \frac{1}{4} \sin(16\pi t)$$

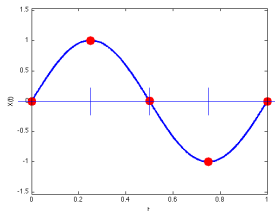
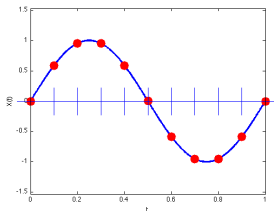


Période d'échantillonnage  $T_e = 0.2$  sec. Période d'échantillonnage  
 $T_e = 0.25$  sec.

# Echantillonnage d'une sinusoïde pure

Autre exemple: sinusoïde pure

$$X(t) = \sin(2\pi t) \quad (f = 1 \text{ Hz})$$



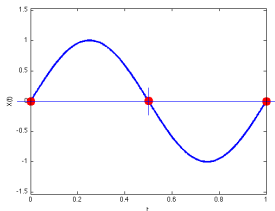
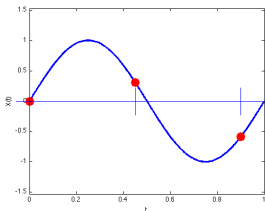
Période d'échantillonnage  $T_e = 0.1$  sec. Période d'échantillonnage  
 $T_e = 0.25$  sec.



# Echantillonnage d'une sinusoïde pure

Autre exemple: sinusoïde pure

$$X(t) = \sin(2\pi t) \quad (f = 1 \text{ Hz})$$



Période d'échantillonnage  $T_e = 0.45$  sec. Période d'échantillonnage  $T_e = 0.5$  sec.

Pour pouvoir reconstruire la sinusoïde à partir de l'échantillon, il est nécessaire que  $T_e < 0.5$  sec, autrement dit, que  $f_e = \frac{1}{T_e} > 2$  Hz.

# Echantillonnage d'une sinusoïde pure

De manière plus générale, on peut dire les choses suivantes:

Soit  $X(t)$  une sinusoïde pure dont la fréquence est *plus petite ou égale* à  $f$ .

- ▶ Pour pouvoir reconstruire cette sinusoïde à partir de sa version échantillonnée à la fréquence  $f_e$ , il est nécessaire que

$$f_e > 2f.$$

- ▶ Le *théorème d'échantillonnage* que nous verrons la semaine prochaine dit pour l'essentiel que cette condition est non seulement *nécessaire* mais aussi *suffisante*.
- ▶ Nous verrons également que ce théorème s'applique à tous les signaux, et pas seulement aux sinusoïdes.

# Application

Sur un CD, le son est échantillonné à une fréquence de **44.1 kHz**, car les sons au-dessus d'une fréquence de **22 kHz** ne sont (en général) pas perçus par l'oreille humaine.

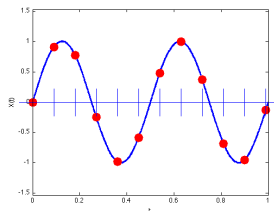
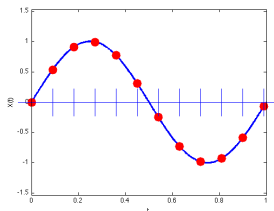
## Et si $f_e < 2f$ , que se passe-t-il ?

Que se passe-t-il lorsque la fréquence d'échantillonnage  $f_e$  est trop basse, i.e. lorsque le signal est *sous-échantillonné* ?

Nous poursuivons ici avec l'exemple d'une sinusoïde pure:

$X(t) = \sin(2\pi f t)$ , échantillonnée avec une période  $T_e = 0.09$  sec, donc  $f_e = \frac{1}{0.09} = 11.11... \text{ Hz}$ .

- ▶  $f = 1 \text{ Hz}$
- ▶  $f = 2 \text{ Hz}$



## Et si $f_e < 2f$ , que se passe-t-il ?

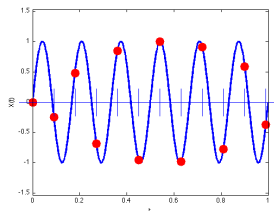
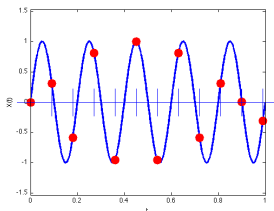
Que se passe-t-il lorsque la fréquence d'échantillonnage  $f_e$  est trop basse, i.e. lorsque le signal est *sous-échantillonné* ?

Nous poursuivons ici avec l'exemple d'une sinusoïde pure:

$X(t) = \sin(2\pi f t)$ , échantillonnée avec une période  $T_e = 0.09$  sec, donc  $f_e = \frac{1}{0.09} = 11.11... \text{ Hz}$ .

▶  $f = 5 \text{ Hz}$

▶  $f = 6 \text{ Hz}$



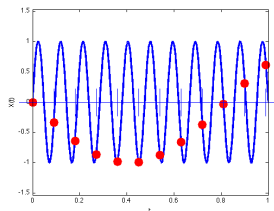
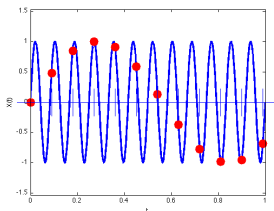
## Et si $f_e < 2f$ , que se passe-t-il ?

Que se passe-t-il lorsque la fréquence d'échantillonnage  $f_e$  est trop basse, i.e. lorsque le signal est *sous-échantillonné* ?

Nous poursuivons ici avec l'exemple d'une sinusoïde pure:

$X(t) = \sin(2\pi f t)$ , échantillonnée avec une période  $T_e = 0.09$  sec, donc  $f_e = \frac{1}{0.09} = 11.11... \text{ Hz}$ .

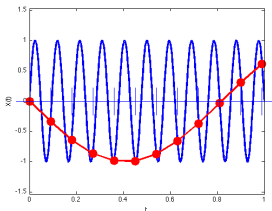
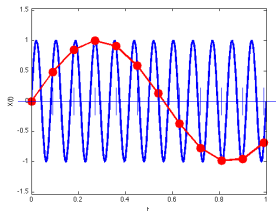
- ▶  $f = 12 \text{ Hz}$
- ▶  $f = 10.5 \text{ Hz}$



## Et si $f_e < 2f$ , que se passe-t-il ?

Dans les deux derniers cas, nous avons vu apparaître:

- ▶ une sinusoïde avec une fréquence plus lente;
- ▶ une autre sinusoïde, également avec une fréquence plus lente, qui part d'abord vers le bas.



Ce phénomène s'appelle l'**effet stroboscopique** et survient donc lorsqu'on *sous-échantillonne* un signal. Nous y reviendrons en détail la semaine prochaine.

# Effet stroboscopique: illustrations

EXEMPLE VISUEL:





# Effet stroboscopique: illustrations

## EXEMPLES VIDEO :

<http://www.youtube.com/watch?v=jHS9JGkEOmA>

<http://www.youtube.com/watch?v=r3hs8pPCQmo>

<http://www.youtube.com/watch?v=LWwmtwZLG88>

# Conclusion temporaire

- ▶ signaux / sinusoïdes
- ▶ « tout signal est une somme de sinusoïdes ! »
- ▶ fréquence(s) présente(s) dans un signal, bande passante, spectre
- ▶ filtrage et échantillonnage
- ▶ condition nécessaire pour pouvoir reconstruire le signal:  $f_e > 2f$

## La semaine prochaine:

- ▶ comment reconstruire un signal à partir d'un échantillon donné ?
- ▶ théorème d'échantillonnage
- ▶ sous-échantillonnage