



ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

**FACULTE SCIENCES ET TECHNIQUES DE  
L'INGENIEUR**

**LABORATOIRE DE SYSTEMES  
ROBOTIQUES**

**BASES  
DE LA ROBOTIQUE**

**POUR LES SECTIONS DE  
MICROTECHNIQUE  
et  
MECANIQUE  
(BACHELOR et MASTER)**

Dr M. Bouri LSRO  
Prof. H. Bleuler LSRO

Nouvelle édition

-

Octobre 2018

# **BASES DE LA ROBOTIQUE**

Edition septembre 2018

## **N° Contenu.**

- [I] **Généralités (M. Bouri)**  
Définition, historique, domaines d'application,  
Poids économique, caractéristiques.  
Robots sériels: géométries, applications.  
Robots parallèles et hybrides: mobilités, types, applications.
  
- [II] **Bases théoriques de la modélisation cinématique**  
Modélisation géométrique et Jacobien  
2.1 Cinématique. (H. Bleuler )  
2.2 Jacobien. (M. Bouri)
  
- [III] **Éléments de modélisation dynamique (M. Bouri)**  
Méthodes de modélisation par l'approche de Lagrange  
Méthode de modélisation par l'approche de Newton
  
- [IV] **Commande de robots (M. Bouri)**  
Algorithmes – Génération de trajectoire – Logiciel – Matériel
  
- [V] **Actionneurs.**  
Actionneurs – Micro actionneurs (H. Bleuler - M.Bouri )

## PARTIE I

# Généralités

Robots sériels et parallèles



### RÉSUMÉ

Ce chapitre présente les concepts de base, les définitions et la classification des robots sériels et parallèles. Les outils de calcul de mobilité y sont détaillés pour les robots parallèles.

M. Bouri, R. Clavel

---



---

## Sommaire:

1.1	Définition, historique, domaines d'application, poids économique, caractéristiques..	2
1.1.1	Définitions et historique.....	2
1.1.2	Domaines d'application, poids économique.....	3
1.1.3	Caractéristiques à préciser dans le cahier des charges.....	5
1.2	Robots sériels : géométries et applications.....	8
1.2.1	Introduction.....	8
1.2.2	Géométries.....	8
1.2.3	Applications.....	12
1.3	Robots parallèles et hybrides: mobilités, types, applications.....	14
1.3.1	Caractéristiques.....	14
1.3.2	Définition.....	16
1.3.3	Mobilité d'une structure cinématique.....	16
1.3.4	Les robots parallèles recensés.....	17
1.3.5	Description du concept DELTA et définition de ses constituants.....	24
1.3.6	Mobilité du robot DELTA à 6 barres parallèles.....	25
1.3.7	Singularités du robot DELTA.....	26
1.3.8	Etude plus complète de la structure parallèle du robot DELTA.....	27
1.3.9	Modèles géométriques.....	36
1.3.10	Bibliographie.....	40

---



---

## **1.1 Définition, historique, domaines d'application, poids économique, caractéristiques.**

### **1.1.1 Définitions et historique.**

Si le concept d'automate date de plusieurs siècles, le mot robot n'est apparu que très récemment. Il est dérivé du mot tchèque *robot* signifiant travail ou même corvée. Il a été introduit en 1920 par l'écrivain tchèque Karel Capek dans sa pièce d'anticipation "R.U.R." ("Les Robots Universels de Rossum") pour désigner des machines automatiques appelées à remplacer les hommes dans les tâches les plus pénibles.

Aujourd'hui, le mot robot est employé aussi bien pour désigner le plus simple des manipulateurs, et même des appareils ménagers, que la machine la plus sophistiquée. C'est pour cette raison que l'on a introduit la notion de robot industriel.

Le secteur d'activité des *systèmes robotiques* s'est élargi de façon importante; des applications dans les domaines médical, spatial, formation, agriculture, génie civil, voire militaire (liste non exhaustive) ont conduit à élargir de façon importante cette notion de système robotique. Sur le plan quantitatif, il est indéniable qu'actuellement les robots industriels jouent le rôle le plus important. La plupart des concepts et méthodes de la robotique industrielle sont transposables dans les autres secteurs. Les robots autonomes sont maintenant en phase de croissance marquée, en particulier dans les domaines domestiques (tondeuse à gazon, aspirateur), sécurité, espace, entretien (par exemple exploration de conduites).

Par *robot industriel* (RI) on entend une machine automatique reprogrammable et polyvalente, conçue pour déplacer des matériaux, des pièces, des outils, ou des dispositifs spécialisés au travers de déplacements variables et programmables pour accomplir diverses tâches. Cette définition s'apparente à la norme proposée par l'AFNOR (Norme enregistrée NF E 61400 en août 1983 et acceptée entre temps au niveau international ISO. Il est clair que cette définition reste encore trop vague pour permettre de classer systématiquement une machine comme étant, ou n'étant pas, un robot industriel.

Il n'en reste pas moins que les manipulateurs pneumatiques, couramment appelés *bras de charge*, bien connus, n'ont pas à être considérés comme des robots industriels car ils ne sont pas librement programmables et ne peuvent de ce fait pas exécuter un nombre variable d'opérations différentes lors d'une application. De même, il faut exclure de la famille des robots industriels les systèmes de fabrication et de montage automatiques, conçus pour une application particulière (automation rigide).

Les premiers robots industriels sont apparus sur le marché aux Etats Unis en 1962. Utilisés tout d'abord uniquement dans l'industrie automobile, ils ont peu à peu conquis d'autres secteurs de l'économie tels que la métallurgie, la microtechnique, l'agroalimentaire, la chimie-pharmacie, voire le bâtiment.

Discrédités dans les années 80 par les excès technologiques et une fréquente inadéquation aux besoins, les robots industriels reviennent en force. Devenus moins chers et plus efficaces, ils offrent des solutions rentables aux entreprises à la recherche de compétitivité. En 2008,

on peut estimer que le nombre de robots industriels installés dans le monde a largement dépassé 1 million. Environ 350'000 RI sont installés au Japon. Les deux dernières années, on a pu observer une croissance annuelle de près de 20% suivant les régions. La densité de robots pour 10'000 ouvriers varie entre 50 et 150 pour les pays industrialisés (Europe et USA) alors qu'elle atteint 330 au Japon et environ 150 en Corée.

### 1.1.2 Domaines d'application, poids économique.

Les domaines d'application sont très variables et ils évoluent avec les années. On peut citer:

<b>domaines bien établis</b>	<p><u>industrie automobile</u>: soudure par points, à l'arc, pose de roues, de vitres, de joints de colle, etc.</p> <p><u>industries mécaniques</u>: soudage, manipulations, polissage, ébavurage, alimentation de presses (injection, découpage, emboutissage), découpage par laser, par jet d'eau, usinage par enlèvement de copeaux, etc.</p> <p><u>industrie des appareils électriques</u>: assemblage, câblage, collage, tests, etc.</p> <p><u>industrie électronique</u>: assemblage, montage de composants (CMS), tests, ...</p> <p><u>industrie alimentaire et de produits de consommation</u>: conditionnement de chocolats, biscuits, découpe de produits congelés, manutention de stockage et de déstockage, regroupement de produits en cartons ou palettes, etc.</p> <p><u>agriculture</u> : traitement des fromages, traite des vaches ;</p> <p><u>habillement, chaussure</u>: découpe de tissus, de cuir, de plastique par laser ou jet d'eau, dépôt de cordons de colle, contrôle, emballage, etc.</p>
<b>en phase de développement</b>	<p>laboratoire chimique et microbiologique</p> <p>industrie textile, teintures</p> <p>micromanipulation (résolution &lt; 0,5 micron) ; en phase de progression actuellement ;</p> <p>vente par correspondance, tri de paquets</p>

**en phase de recherche  
et d'essais**

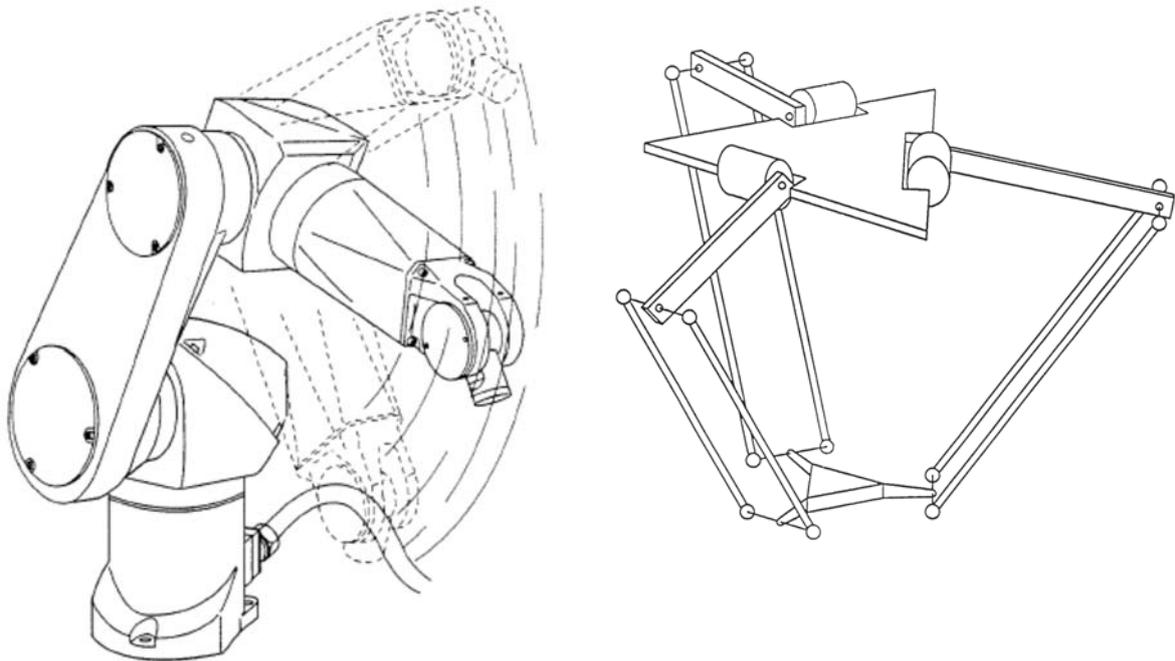
agriculture: tonte des moutons, tri de fruits et légumes, cueillette de fruits, ...  
construction en atelier ou sur le chantier: aplanissement des chapes, soudure, peinture, etc  
gestion des déchets: tri et ramassage d'ordures  
services: aide aux handicapés et aux malades, distribution de courrier, de nourriture, de médicaments, nettoyage, tankage de véhicules, surveillance, déminage  
 médecine, chirurgie (sera bientôt en phase de développement)  
espace: télémanipulation assistée

**en phase d'étude**

robot personnel (par analogie au PC)  
 robot de ménage (nettoyage, mise en ordre, cuisine, ...)  
 espace ; pour ce domaine, les applications sont tellement particulières que le passage en phase de développement sera toujours limité

La recherche d'une production de plus en plus flexible a poussé le développement des robots. Les postes de travail dangereux, malsains ou monotones ont conduit rapidement à l'implantation de robots en industrie dès le début de la robotique; quelques exemples d'applications: le soudage par points, à l'arc, la peinture au pistolet, la forge, la fonderie, la palettisation de charges relativement élevées (blocs de métal, paquets de journaux, cartons de briques de lait, etc). En microtechnique, certaines tâches très fines et précises ont été robotisées assez tôt, car il est très pénible pour un opérateur ou plus fréquemment pour une opératrice de se concentrer sur des opérations nécessitant l'usage du microscope ou du binoculaire. La *microrobotique* (voir 5.1) qui concerne les robots de haute précision s'occupe de ce type d'application; par exemple: bonding de chips, montage de quartz, assemblage d'optique intégrée ou de fibres optiques, assemblage de microréducteurs et de micro-moteurs.

Une part prépondérante des robots proposés sont de type sériel (voir 1.2 et fig.1 a) par des grandes entreprises (ABB, Fanuc, Kuka, Reiss, Stäubli, Yaskawa, Adept, ...) et quelques PME (par exemple Sysmelec) , c'est-à-dire comportant une seule chaîne cinématique entre la base fixe et l'outil mobile. Actuellement, une vingtaine de sociétés (certaines très petites et d'autres déjà bien établies comme ABB) proposent des robots parallèles comportant plusieurs chaînes cinématiques entre la base et l'outil mobile (voir 1.3 et fig.1 b). Un fabricant peut produire quelques dizaines de robots d'un modèle par année, parfois moins d'une dizaine, alors que d'autres produisent un même modèle à plus de 1000 exemplaires par année.



a) Robot sériel polyarticulé (Stäubli RX)

b) Schéma de la cinématique du robot parallèle DELTA à 3 degrés de liberté

Fig.1 Exemple de robot sériel a) et de robot parallèle b)

Dans les domaines bien établis, les applications dans l'industrie électrique et électronique représentent près de 40 % des robots alors que 27% se comptent dans les industries automobiles, motocyclettes, vélo (Shimano par exemple). Pour des raisons d'hygiène, de coût, de travail à température basse, de grandes variations de demande en cours d'année, l'industrie alimentaire s'équipe de plus en plus d'installations robotisées.

Les robots utilisés sont de type SCARA (voir 1.2.2) pour près de la moitié; le reste est presque totalement couvert par les robots polyarticulés et les robots cartésiens; quelques robots à coordonnées cylindriques et sphériques ainsi que quelques géométries particulières (dont les robots parallèles) occupent un petit 10%.

### 1.1.3 Caractéristiques à préciser dans le cahier des charges.

Bien que la principale caractéristique d'un robot industriel soit la flexibilité, il reste nécessaire de définir un cahier des charges qui précisera certains paramètres propres à permettre une comparaison des produits offerts sur le marché. Les paramètres principaux à considérer lors de l'évaluation d'un robot sont définis ci dessous :

- *La mobilité* qui définit le nombre de degrés de liberté nécessaires à l'application considérée; dans certains cas, on choisit un robot avec une mobilité supérieure au



- *La précision* sera généralement donnée globalement en bout de bras. En fait, ce qui intéresse l'utilisateur dans la plupart des applications, c'est la *répétitivité* (précision relative) plutôt que la précision absolue. Lorsqu'une bonne précision absolue est recherchée, il est nécessaire de procéder à un calibrage du robot selon une démarche du même type que celle effectuée dans le domaine des machines de mesure.
- *Le milieu* dans lequel le robot doit opérer est d'une importance primordiale. Il est essentiel de préciser certaines conditions particulières d'utilisation comme la présence de poussière abrasive, d'humidité, de vibrations, etc.; si le robot peut être perturbé par le milieu dans lequel il travaille, il ne faut pas oublier que l'inverse peut se produire et que le robot peut polluer un espace de travail destiné à des opérations nécessitant une grande propreté. D'autre part, la nature du produit manipulé peut exclure certains choix technologiques (emploi de moteurs à balais dans un milieu explosif).

Un robot industriel est amené à saisir et déplacer des objets (pièces ou outils). Il suppose donc une structure mécanique. La maîtrise d'un objet dans l'espace cartésien implique sa localisation et son orientation. Pour positionner un point de l'objet dans l'espace, il faut disposer de 3 degrés de liberté. Le point correspondant à l'objet étant fixé, si l'on désire orienter l'objet de manière quelconque, il faut disposer en plus de trois nouveaux degrés de liberté.

Pour les robots de type sériel et pour quelques hybrides, les trois premiers degrés de liberté définissent ce que l'on appelle le *porteur*, alors que les trois suivants constituent le *poignet*. Il faut donc au moins 6 axes pour qu'un robot industriel puisse être dit complet. Signalons que si le bras humain en compte 7 (3 au niveau de l'épaule, 2 au niveau du coude et 2 au niveau du poignet), il s'agit d'une redondance dans la mesure où le coude nous permet de contourner les obstacles.

## 1.2 Robots sériels : géométries et applications

### 1.2.1 Introduction.

Sans entrer dans trop de détails, on peut classer les robots fixes selon 2 groupes principaux :

- les robots **sériels**, caractérisés par le fait qu'une seule chaîne cinématique relie la base fixe à l'organe terminal mobile (1.1 / fig.1 a);
- les robots **parallèles** caractérisés par le fait que plus d'une chaîne cinématique assure la liaison entre la base fixe et l'organe terminal mobile; on parle également de cinématique bouclée (1.1 / fig.1 b). Certains robots peuvent être une combinaison de cinématiques sérielles et parallèles; on parle dans ce cas de robots hybrides (fig.1 ci-contre). Vu les caractéristiques de ces cinématiques, nous classerons pour simplifier les robots hybrides avec les robots parallèles qui sont étudiés dans la section 1.3.

A part le robot Pollard (voir 1.3), la plupart des robots conçus avant les années 80 étaient de type sériel; les raisons principales sont les suivantes:

- similitude avec le bras humain, les ponts roulants ou certaines machines de chantier,
- facilité de calcul des transformations de coordonnées qui permettent de déterminer la position des axes du robot selon la position dans l'espace de travail ou l'inverse.

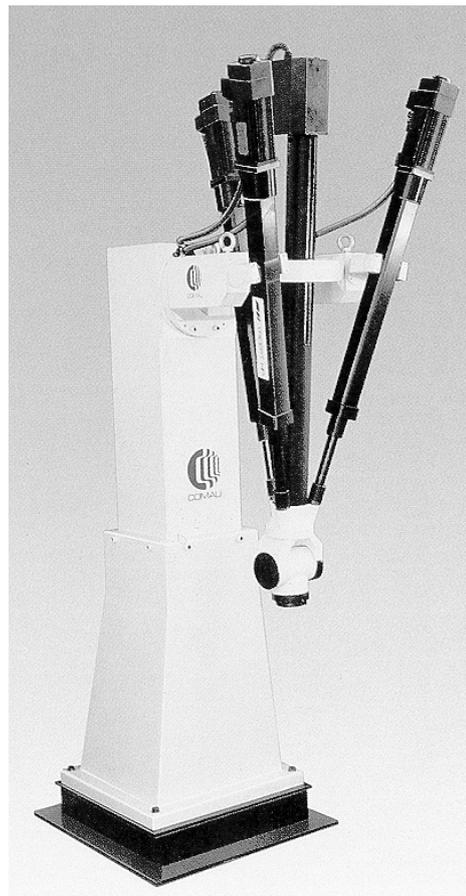


Fig.1 Le robot hybride Tricept industrialisé par les entreprises NEOS, COMAU et Siemens.

### 1.2.2 Géométries.

Rappelons que pour les robots sériels, les trois premiers degrés de liberté définissent ce que l'on appelle le *porteur*, alors que les trois suivants constituent le *poignet*.

En ce qui concerne le porteur, les axes (appelés axes principaux) peuvent être en translation ou en rotation. Si l'on ne prend pas en compte l'ordre, on dénombre 4 configurations principales : TTT, RTT, RRT, RRR.

La configuration TTT (3 translations) est bien adaptée à notre représentation cartésienne de l'espace (fig.2), elle correspond au monde du concepteur. La position des axes les uns par rapport aux autres ne variant pas au cours d'un mouvement (on parle de géométrie différentielle constante dans l'espace), le calcul de trajectoires et le contrôle (pas de variation d'inertie) s'en trouvent simplifiés. Cette variante est particulièrement intéressante pour l'assemblage de précision ou pour les grandes manipulations ; sa mécanique peut être assez délicate (fig.3).

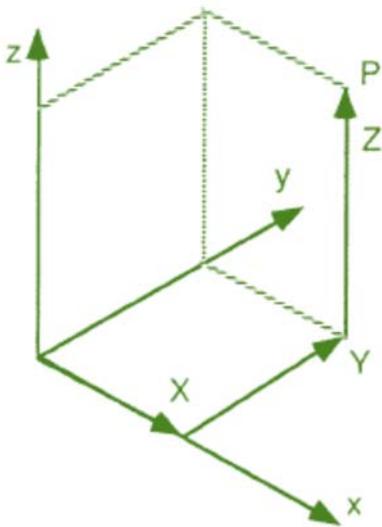


Fig.2 Système cartésien (TTT)

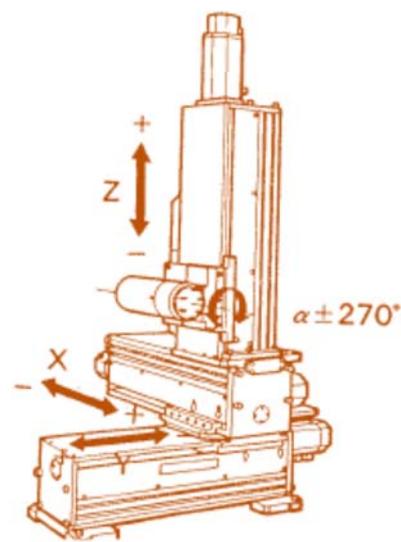


Fig.3 Robot cartésien

La configuration RTT (à coordonnées cylindriques) est la combinaison d'une rotation et de deux translations (fig.4). Elle conduit à une variante, le SCARA, qui a eu du succès en assemblage (fig.8). Les complications de construction (guidages prismatiques) et la résolution variable selon le rayon d'extension réduisent de plus en plus son utilisation; un robot SCARA le remplace avantageusement pour les applications de moyenne précision et un robot cartésien pour les hautes précisions.

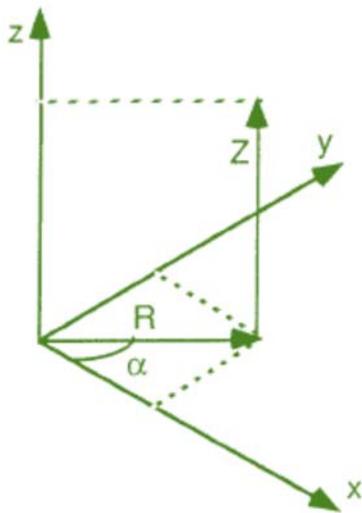


Fig.4 Système cylindrique (RTT)

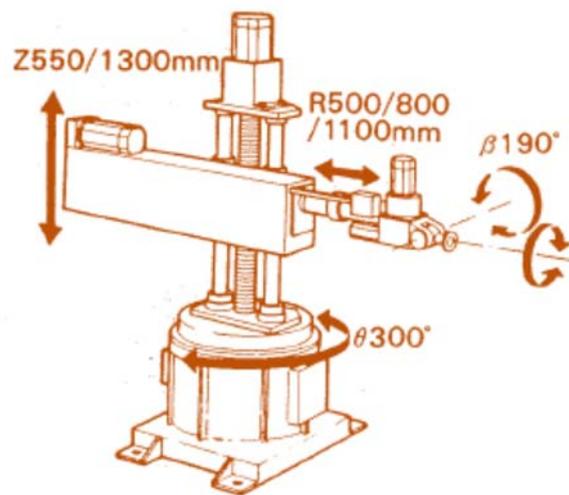


Fig.5 Robot cylindrique

Dans la configuration RRT (fig.6), on trouve une grande variété de combinaisons. La plus ancienne d'entre elles est le robot à coordonnées sphériques (fig.7).

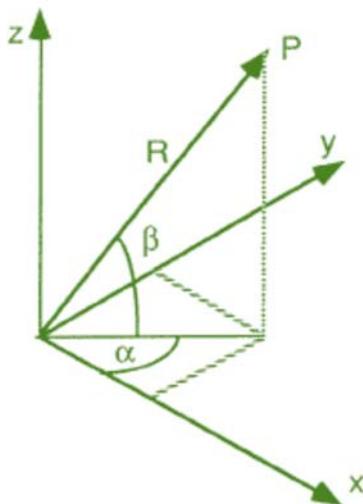


Fig.6 Système sphérique (RRT)

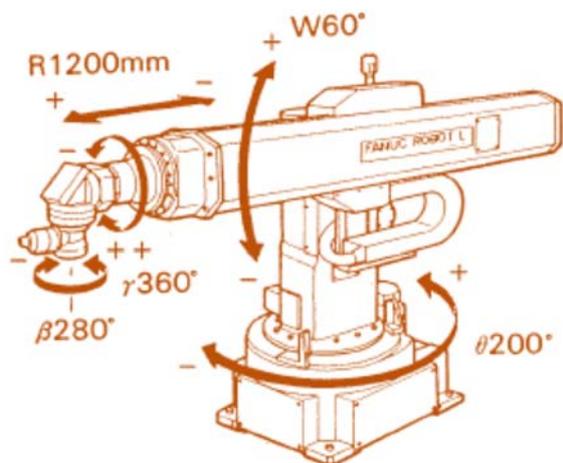


Fig.7 Robot à configuration sphérique

D'autres robots industriels disponibles sur le marché présentent la translation sur un axe vertical (fig.8 et fig.9). Cette configuration RRT, dénommée *SCARA (Selective Compliance Assembly Robot Arm)*, a été développée au Japon dans les années 1980. Elle est la configuration la plus répandue dans le domaine de l'assemblage, alors que le type « tourelle » (fig.7) voit son utilisation fortement réduite.

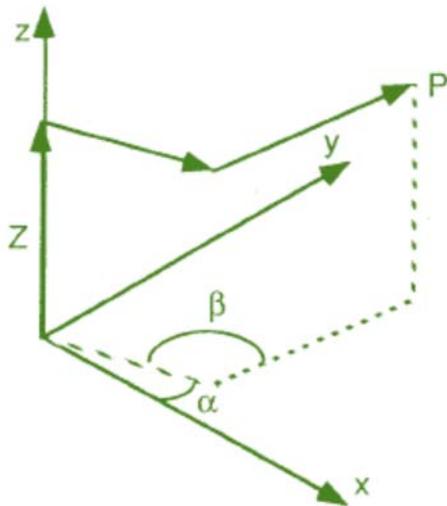
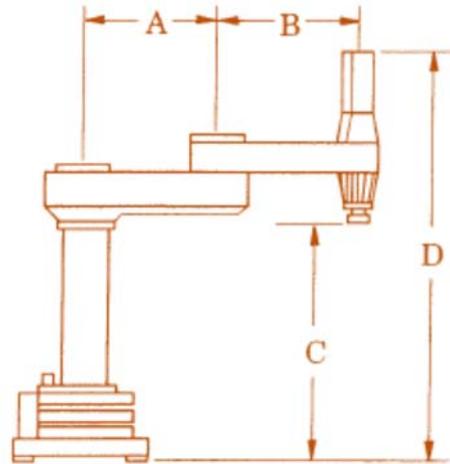


Fig.8 Configuration SCARA (RRT)



Le système RRR à coordonnées angulaires également appelé robot polyarticulé (fig.10 et 11) est certainement le plus simple du point de vue mécanique (formé uniquement par des axes rotatifs), mais il nécessite une commande sophistiquée, par exemple pour effectuer des déplacements en ligne droite. Il faut également apporter une grande attention à la conception des axes rotatifs qui doivent être très rigide pour assurer une fréquence propre élevée, nécessaire à une bonne répétitivité. Certains fabricants (Stäubli par exemple) ont fait en sorte que la totalité du câblage passe à l'intérieur du robot, au travers des articulations qui, de ce fait, deviennent plus compliquées.

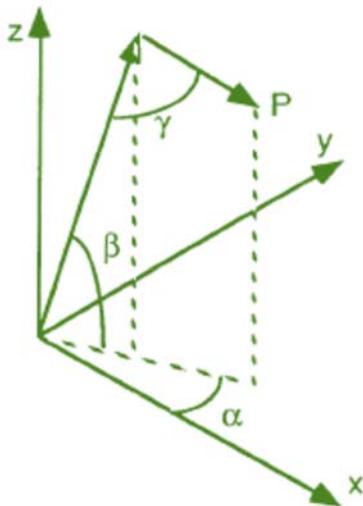


Fig.10 Configuration angulaire (RRR)

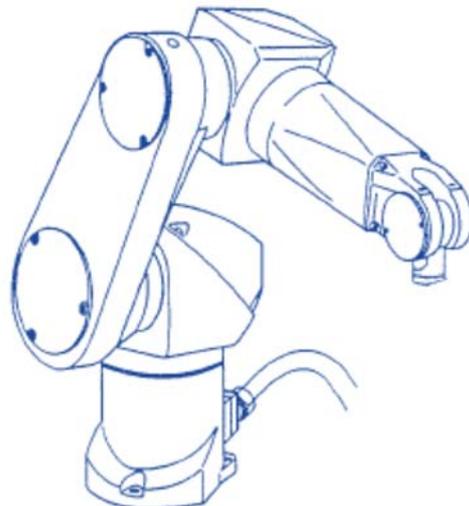


Fig. 11 Robot angulaire polyarticulé

Les trois axes du porteur ne sont pas forcément indispensables, si l'on travaille selon un plan, par exemple. Mais l'économie en axes se fait le plus souvent au niveau du poignet. En considérant certaines symétries (un corps cylindrique ne nécessite que 5 coordonnées pour

la description de sa position et une sphère n'en nécessite que 3) ou en se limitant à une famille d'opérations simples, on peut réduire le nombre d'axes du robot industriel à 5, 4 ou même 3.

### 1.2.3 Applications.

Au début de la robotique, un rêve était de concevoir le robot universel. L'éventail des diverses applications mentionnées sous 1.1.2 montre que ce rêve est une utopie et que cette voie conduirait inévitablement à des solutions beaucoup trop chères, compliquées et peu fiables.

Axé principalement au départ sur l'automobile (dans cette branche industrielle les opérations sont maintenant conçues dès le départ pour les robots), le plus fort pourcentage des installations récentes se rencontre aujourd'hui dans le domaine de la construction électrique et électronique (montage). Ensuite, on trouve des secteurs nouvellement gagnés comme la mécanique, le traitement des matières synthétiques et des métaux (polissage, ébavurage, etc.). Les robots industriels ont fait leur apparition dans de nouveaux domaines allant de l'agro-alimentaire à la confection en passant par la micro-manipulation; on peut affirmer sans le moindre doute qu'aucun secteur ne sera "épargné" par la robotisation.

La plus grande partie des applications mentionnées sous 1.1.2 dans les domaines bien établis sont réalisées avec des robots de type sériel. Les robots parallèles et hybrides, souvent plus compliqués à contrôler auront des débouchés dans les secteurs demandant des très grandes cadences (alimentation en particulier) ou une très grande précision et raideur (assemblage de haute précision et probablement l'usinage).

#### **Quelques exemples d'applications de robots sériels :**

- polissage et ébavurage de pièces de fonderie, de pièces de robinetterie, de poignées (porte, frein de vélo, ...); boîtiers et pièces de bracelet de montre, coutellerie, etc.; ces opérations sont en général effectuées par des robots angulaires à 5 ou 6 degrés de liberté;
- assemblage de microsystèmes tels que accéléromètres pour air bag, micro-moteur, liaison chip – circuit imprimé ou grille, assemblage de montres, ...; ces opérations sont habituellement réalisées par des robots cartésiens à 4 degrés de liberté ( $x, y, z, \alpha_z$ ); de façon générale, les robots cartésiens sont bien adaptés pour les travaux de précision (résolution constante dans tout le volume de travail et pas de variation d'inertie);
- assemblage de magnétoscopes, de lecteurs CD, d'appareils de téléphone, de moyeux de bicyclettes, d'imprimantes, ... effectués par des robots SCARA; pour que l'utilisation de tels robots à 4 degrés de liberté soit possible, il est indispensable de concevoir le produit à assembler en conséquence et définir une seule direction d'insertion verticale;

- soudage par points de carrosseries d'automobiles; ces applications sont pratiquement toujours effectuées par des robots angulaires à 6 degrés de liberté; parfois, pour gagner de la place dans les chaînes, les 2 premiers axes sont parallèles et horizontaux et le 3e leur est perpendiculaire; ils doivent pouvoir manipuler une charge assez élevée, vu la masse de la pince de soudage (de 50 à 150 kg); ce travail par robot permet de garantir une meilleure qualité par une plus grande régularité de l'opération; de plus, ce type d'activité est extrêmement pénible pour les opérateurs. A des échelles quelque peu différentes, ces opérations se retrouvent dans l'électroménager;
- palettisation de paquets de journaux pour l'expédition; ces applications sont en général effectuées par des robots SCARA qui ont dans ce cas la particularité d'avoir leur axe de translation positionné en première, voire en deuxième position; cette disposition permet d'obtenir des mouvements de grande amplitude verticale sans trop pénaliser l'inertie; ce genre d'opération ne requiert pas une grande précision;
- des robots RRT de type tourelle ont été utilisés dans l'automobile et également pour des manutentions dans la transformation de produits alimentaires; les premières applications (Robots Unimation) utilisaient l'énergie hydraulique ; vu qu'en général 4 degrés de liberté (x, y, z,  $\alpha_z$ ) sont suffisants pour ces opérations de manutention, le choix de robots « tourelle » n'est pas judicieux; dans le cas particulier, c'est la charge manipulable qui a conduit au choix de ce robot hydraulique;
- un robot ABB de type RRT dit pendulaire a été présenté en 1984 pour des applications d'assemblage; sa complexité et la concurrence des SCARA ont très sérieusement limité sa diffusion.

Lorsqu'on s'occupe de systèmes robotisés, il faut être conscient que le robot en est un élément particulier et que les "accessoires" que l'on classe dans la périphérie jouent un rôle important aussi bien sur le plan des fonctions demandées que sur le plan coût (le coût total d'une installation peut varier, suivant les cas, entre 2 et 10 fois le prix du robot); il ne faut pas oublier les coûts de conception, de programmation, de mise au point, d'assemblage, de câblage, de formation et de garantie. Pour le dépannage d'installations, le télédiagnostic permettra de limiter les coûts de maintenance et de réparation alors que la réalité virtuelle et l'intelligence artificielle devraient conduire à une plus grande facilité de programmation.

Le choix du robot est lié au choix de la périphérie et réciproquement; un robot avec un axe supplémentaire pourra, dans certains cas, sérieusement simplifier la périphérie ou bien le choix d'un robot capable d'un plus grand volume de travail pourra diminuer l'importance des systèmes de transfert.

Comme pour la conception de tout système ou produit, il est indispensable d'avoir une approche globale. De plus, la concertation entre concepteurs de produits et concepteurs de systèmes d'automatisation dès le début du projet permet d'obtenir des simplifications intéressantes et des avantages substantiels au niveau coût et fiabilité.

### 1.3 Robots parallèles et hybrides: mobilités, types, applications

#### 1.3.1 Caractéristiques

La plupart des robots industriels construits à ce jour sont de type sériel, c'est-à-dire que leur structure mobile est une chaîne ouverte formée d'une succession de segments reliés entre eux par des liaisons à un degré de liberté; chaque articulation est commandée par un actionneur situé à l'endroit de l'articulation ou sur un des segments précédents; dans ce dernier cas, un mécanisme assure la transmission entre l'actionneur et l'articulation considérée.

Ces robots ont pour avantage de disposer d'un grand volume de travail et d'être relativement simples sur le plan des calculs liés à leur commande. Leurs principaux défauts sont résumés ci-dessous:

- inertie élevée due aux masses réparties sur toute la chaîne cinématique (actionneurs, organes de transmission);
- manque de rigidité par la mise en série d'éléments élastiques;
- fatigue et usure des liaisons de puissance assurant l'alimentation des actionneurs (câbles, tuyaux flexibles);
- fatigue et usure des liaisons assurant la circulation des informations entre les capteurs et la commande; sur le plan sécurité, ce point est essentiel puisqu'une erreur de transmission peut avoir des conséquences désastreuses sur les mouvements du robot.

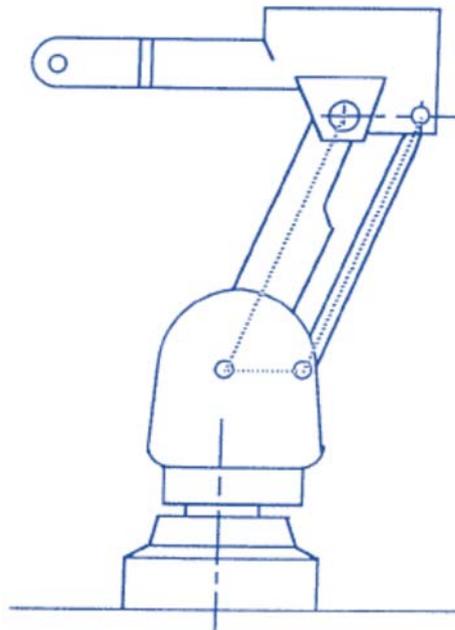


Fig.1  
Exemple de robot comportant une boucle polygonale plane: ABB IRB 2'400.

Dans le but de diminuer les masses en mouvement, certains robots du marché comportent une ou plusieurs boucles fermées formant un polygone articulé plan; la figure 1 représente un cas typique. Toutes les articulations d'une boucle n'étant pas indépendantes, il est possible

de choisir dans la boucle celle que l'on veut motoriser; ceci permet de ramener les moteurs vers la base, donc de diminuer les masses en mouvement.

Certains auteurs [FICHTER 86] [DOMBRE 88] considèrent qu'un robot parallèle est caractérisé par le fait que les différents corps mobiles forment plusieurs chaînes cinématiques qui relient toutes directement la base à l'organe terminal; certains auteurs parlent dans ce cas de robots pleinement parallèles. Le robot type correspondant à cette définition est la plate-forme de STEWART [STEWART 65] dans sa variante représentée à la figure 2.

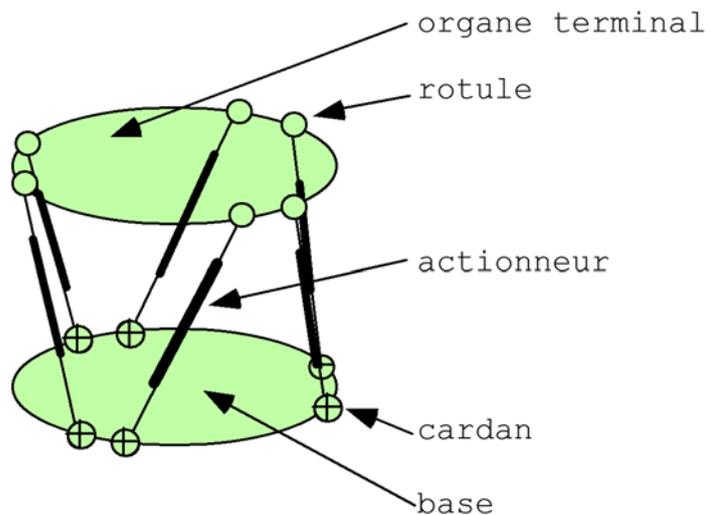
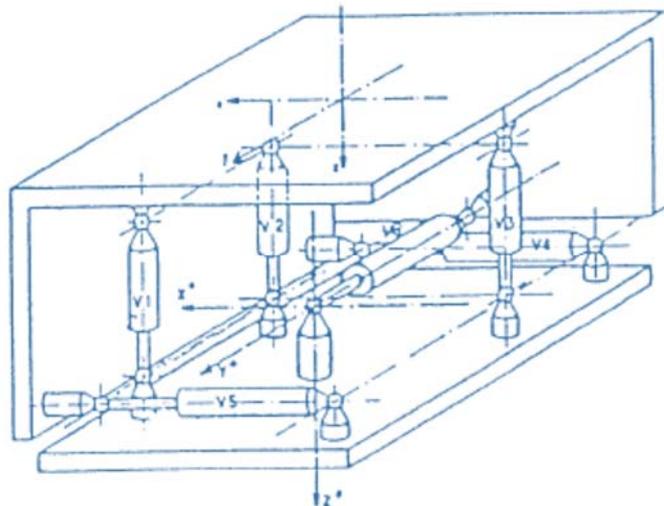


Fig.2  
Plate-forme de **Gough-Stewart**

Cette plate-forme mobile à 6 degrés de liberté a été développée pour remplir la fonction de simulateur de vol; un mécanisme du même type a été utilisé précédemment pour le test de pneumatiques [GOUGH 62]; plusieurs robots expérimentaux ont été construits sur la base de ce concept; en particulier le robot "GADFLY" de GEC [DWOLATZKY 88] et le poignet "SPACE 1" (système poignet à contrôle d'effort) [REBOULET 88]. Artigue propose une structure mobile sur un principe identique, mais avec une disposition spatiale différente [ARTIGUE 84] (Cf.Fig.3). La mise en série de plusieurs plate-formes de STEWART permet de créer un robot redondant en forme de trompe [KWASNY 87].

Fig.3  
Manipulateur parallèle à 6 degrés de liberté utilisé comme poignet actif pour le montage d'un triangle de suspension; course de chaque actionneur hydraulique:  $\pm 5$  mm.



### 1.3.2 Définition

Nous appellerons **robot parallèle** un robot comportant au moins 2 corps reliés par plus d'une chaîne cinématique en excluant les robots qui diffèrent des robots à structure série uniquement par le fait qu'ils comportent une ou plusieurs boucles formant chacune un polygone plan.

Une chaîne cinématique est un ensemble de segments disposés en alternance avec des liaisons.

### 1.3.3 Mobilité d'une structure cinématique

#### Définitions

##### Degré de liberté (DL):

le nombre de degrés de liberté d'un système est le nombre de variables indépendantes nécessaires à la description totale de la structure cinématique.

##### Structure cinématique mobile:

une structure cinématique est dite mobile lorsque le nombre de DL est supérieur ou égal à 1; soit MO la mobilité de la structure considérée; MO est égal au nombre de DL de la structure cinématique.

##### Mobilité d'une structure cinématique.

Considérons une structure cinématique formée de n pièces solides; le nombre de degrés de liberté de cet ensemble avant tout assemblage en vue de créer la structure cinématique considérée est évidemment  $MO = 6n$ .

Chaque liaison entre 2 pièces diminue la mobilité de l'ensemble d'une valeur correspondant au nombre de forces généralisées (NFG) présentes dans la liaison considérée ; avec k liaisons MO prend la valeur suivante:

$$MO = 6n - \sum_{i=1}^k NFG_i$$

Le nombre de forces généralisées (NFG<sub>i</sub>) intervenant dans une liaison est le complément à 6 du nombre de degrés de liberté (MO<sub>i</sub>), soit:  $NFG_i = 6 - MO_i$  d'où:

$$MO = 6n - 6k + \sum_{i=1}^k MO_i$$

$$MO = 6(n - k) + \sum_{i=1}^k MO_i \quad \text{Formule de Grübler}$$

Considérons qu'une des pièces est fixe (ses 6 DL sont bloqués) et prenons-la comme référence (bâti pour un robot); MO prend ainsi la valeur suivante:

$$MO = \sum_{i=1}^k MO_i - 6bo$$

Créer une boucle dans une structure donnée consiste à ajouter une liaison sans ajouter de pièce.

Ajouter une pièce conduit obligatoirement à ajouter une liaison supplémentaire.

Ces 2 constatations conduisent à la relation suivante pour un système de  $n$  pièces,  $k$  liaisons et  $bo$  boucles:

$$n = k - bo + 1$$

Avec cette expression, la mobilité  $MO$  prend la forme suivante:

$$MO = \sum_{i=1}^k MO_i - 6bo$$

La mobilité d'une structure cinématique dont un des éléments est fixé sur une base fixe est donc égale à la somme des mobilités de toutes les liaisons moins 6 fois le nombre de boucles.

Cette expression peut être utilisée pour rechercher systématiquement de nouvelles géométries de robots; elle est également très intéressante pour déterminer la mobilité d'un système cinématique donné; les hyperguidages ou les trop grandes mobilités peuvent facilement être mis en évidence par cette formulation.

### 1.3.4 Les robots parallèles recensés.

Les brevets et la littérature nous ont permis de recenser un certain nombre de structures cinématiques qui ont conduit ou qui peuvent conduire à des concepts de robots parallèles conformes à la définition donnée précédemment. Nous les avons réunies en 4 groupes.

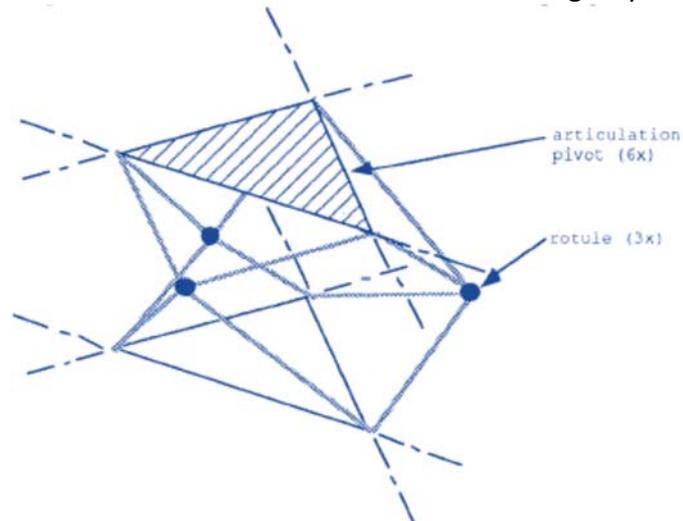


Fig.4  
Principe du mécanisme polyarticulé inventé par Lambert [LAMBERT 83].

Le **premier groupe** concerne des modules de robots comportant 3 degrés de liberté; ces modules [LAMBERT 83] (Cf.Fig.4) [KRUEGER 85] [KIMURA 83] seront souvent mis en série les uns avec les autres pour former des robots en forme de trompe. Le principe de base est identique pour ces 3 inventions; il s'agit d'un module comportant 2 plaques reliées par 3 (dans certains cas 4) chaînes cinématiques munies chacune d'un actionneur; la combinaison du mouvement des actionneurs assure le déplacement d'une plaque par rapport à l'autre selon

une translation et 2 rotations. Selon un principe proche, Lande et David [LANDE 78] ont proposé une articulation permettant 3 rotations; ce mécanisme peut être utilisé comme poignet de robot.

Le **deuxième groupe** concerne des robots à 5 ou 6 degrés de liberté comportant un porteur formé de 2 ou 3 chaînes cinématiques parallèles [POLLARD 38] (Cf.Fig.5) [SHUM 81] [ASEA 85] (Cf.Fig.6) [DWOLATZKY 88]. Ces structures fonctionnent selon le même principe: 3 bras concourent vers un même point; le mouvement de ces bras provoque le déplacement de ce point; l'orientation de la pièce porteuse du poignet est assurée soit par un des bras (Pollard, Asea, Shum), soit par un support passant par un point fixe (Dwolatzki).

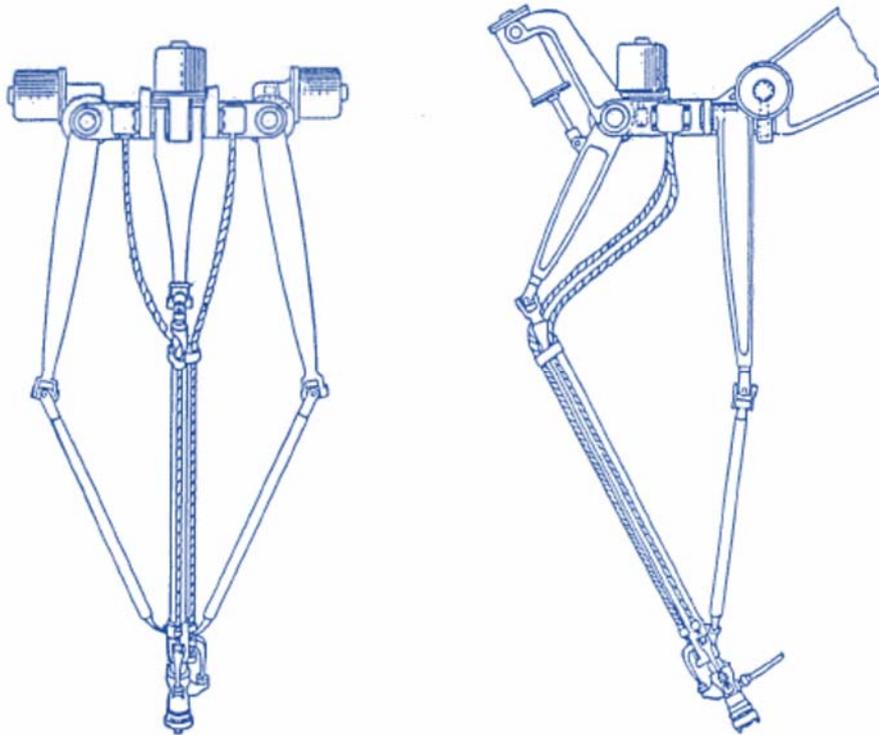


Fig.5 Le robot "POLLARD" prévu pour effectuer la peinture de voitures [POLLARD 38]; en 1938, les moyens électroniques et informatiques ne permettaient pas de commander un tel robot.

On peut également inclure dans ce groupe le robot miniature nommé "Colibri" [BURCKHARDT 88] [LIU 90] développé à l'Institut de microtechnique de l'EPFL; une variante de ce robot à 6 degrés de liberté est montrée à la figure 7.

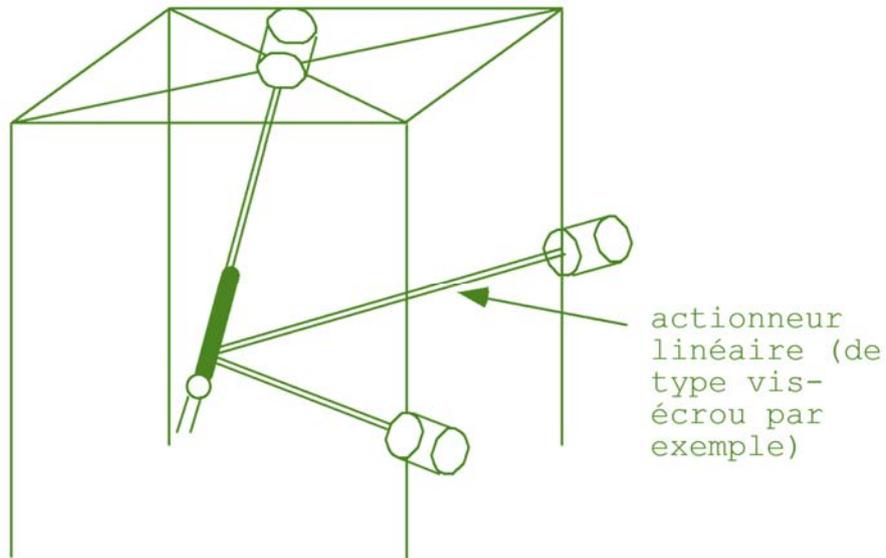


Fig.6 Etape du développement du robot pendulaire IRB 1'000 d'Asea [ASEA 85]; les actionneurs sont liés au bâti par des cardans et la jonction des 2 modules inférieurs avec le support du poignet est assurée par 2 rotules.

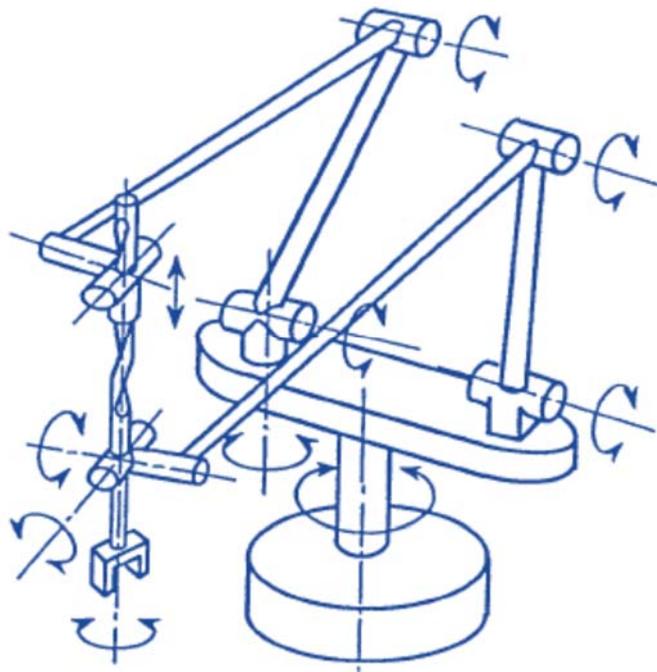


Fig.7 Robot parallèle "Colibri" à 6 degrés de liberté formé d'une plate-forme pivotante sur laquelle sont montés 2 bras articulés comportant respectivement 2 et 3 degrés de liberté; la boucle est fermée par le système à vis reliant les extrémités des 2 bras.



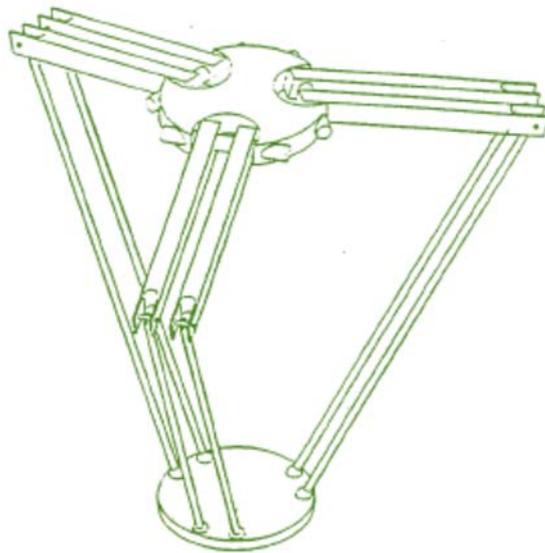


Fig.9 Robot HEXA proposé par Pierrot du LIRMM (Laboratoire d'informatique, de robotique et de microélectronique de Montpellier)

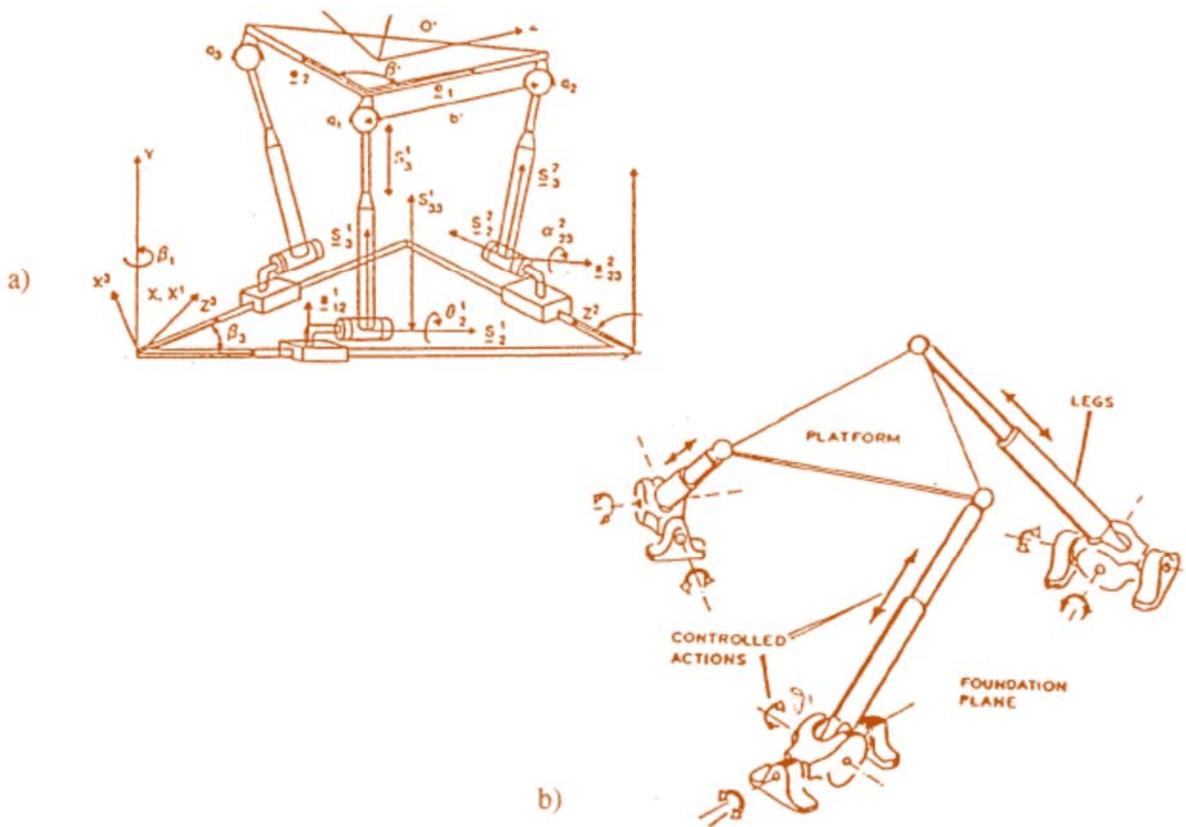


Fig. 10 a) Manipulateur de Behi [BEHI 88]  
 b) Simulateur de vol de Stewart [STEWART 65]

Le **quatrième groupe** englobe les structures parallèles permettant de déplacer l'élément porteur du poignet en conservant constantes ses 3 orientations.

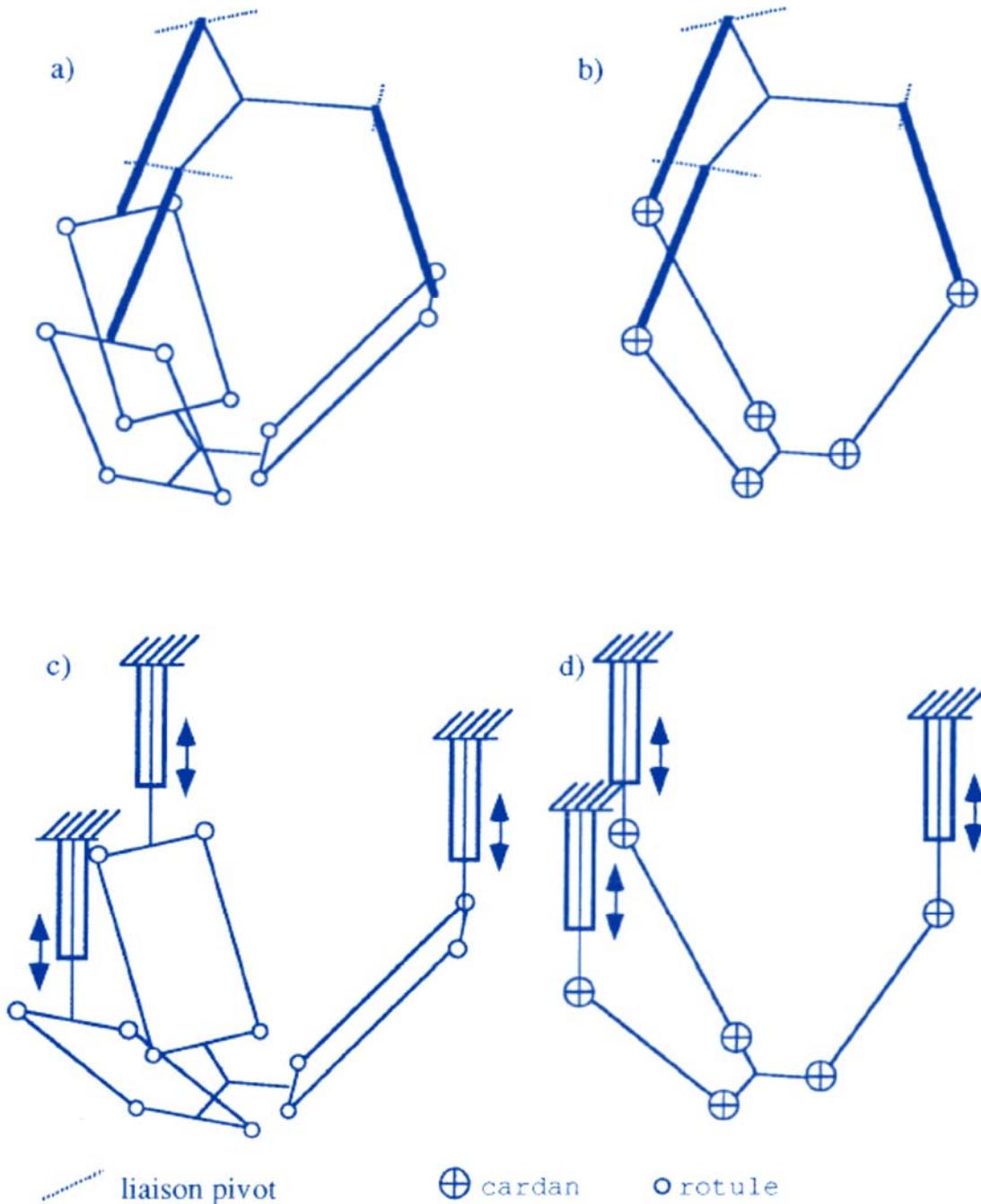
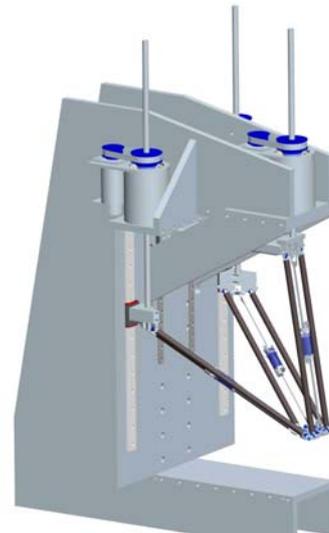


Fig.11 Les 4 structures de base du robot DELTA; les cas a) et b) comportent des actionneurs tournants (liaison pivot), les cas c) et d) des actionneurs linéaires (liaison glissière); dans les cas a) et c), les liaisons entre la nacelle et les bras sont assurées par 3 paires de barres parallèles et 12 rotules; pour les cas b) et d), ces liaisons sont assurées par 3 barres et 6 cardans; la structure a) a été retenue pour la réalisation des premiers robots.

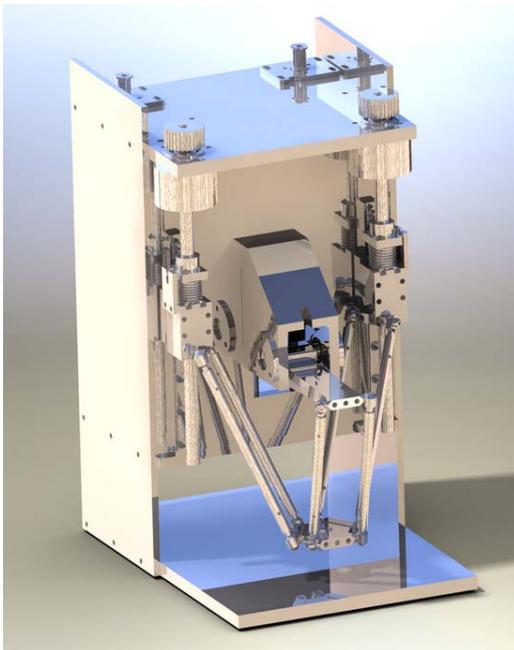
En c) et d), les guidages rectilignes peuvent être disposés différemment, par exemple sur les arrêtes d'une pyramide ; cela donne le DELTA Keops. Une combinaison avec un bras tournant et 2 guidages rectilignes donne le robot DELTA Ibis.



a) Delta linéaire vertical à 3 colonnes



b) Delta linéaire vertical à bâti déporté



c) Delta Ibis



d) Delta Keops

Fig.11' Quatre versions de Delta conduisant à des caractéristiques spécifiques pour le chassage (a), pour travail de précision en interaction avec une table rotative (b), pour assemblages horlogers et / ou intégration dans une micro fabrique (c) et pour manipulations sur une surface importante (d). Dans ce dernier cas, un paramètre supplémentaire (l'angle entre le guidage rectiligne et la verticale) peut être judicieusement utilisé pour privilégier la force en vertical ou la surface de travail.

La solution présentée à la figure 12a de Flory [FLORY 67] est une sorte de parallélogramme de l'espace si les plates-formes ne peuvent pas pivoter autour d'un axe vertical; la figure 12b montre une solution originale de Simunovic [SIMUNOVIC 84].

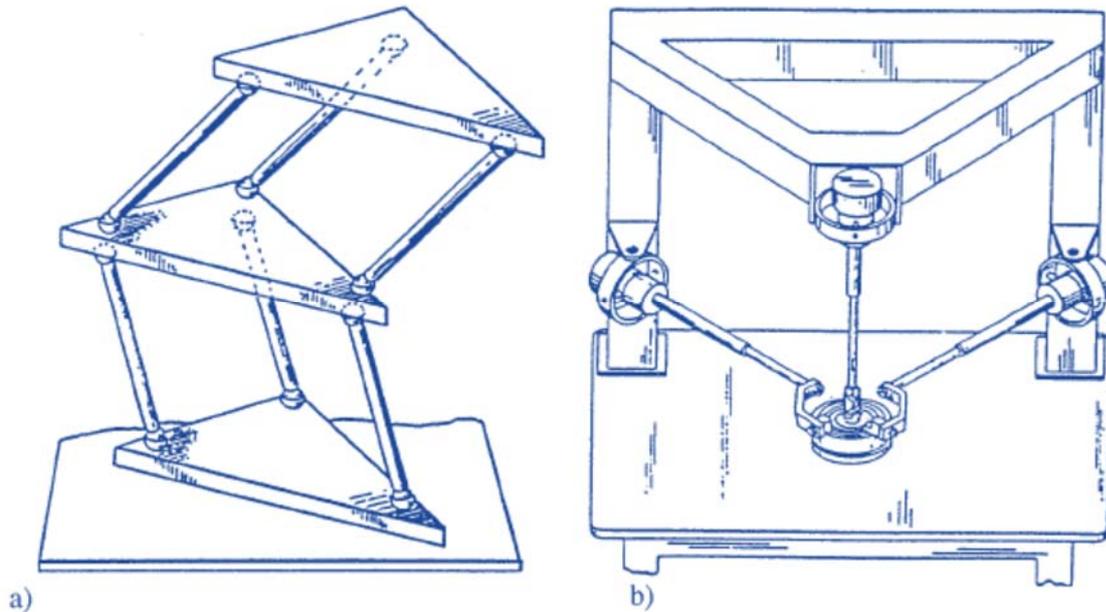


Fig.12 a) Structure **mobile Flory**; pour garantir le maintien de l'orientation des plates-formes mobiles, il est nécessaire que chaque étage comporte une barre munie d'un cardan à chaque extrémité; la position de la plate-forme centrale représente un degré de liberté supplémentaire.  
b) Manipulateur **Simunovic**.

### 1.3.5 Description du concept DELTA et définition de ses constituants.

La figure 13 nous servira de support pour la description du robot DELTA4 et de son fonctionnement.

Ce robot à 4 degrés de liberté est essentiellement un **parallélogramme de l'espace** [CLAVEL 85]; il est principalement constitué d'une "**base fixe**" (1) solidaire d'un bâti support de l'installation (non représenté) et d'une plaque mobile (5); le nom donné à cette dernière pièce est "**nacelle**". La liaison entre la base fixe (1) et la nacelle (5) est assurée par 3 chaînes cinématiques principales; chacune d'elles est formée d'un "**bras**" (2) monté en articulation pivot sur la base fixe et de 2 "**barres parallèles**" (3) munies chacune d'une articulation (4) à chaque extrémité; l'ensemble formé de 2 barres parallèles et des 2 éléments de liaison au bras et à la nacelle sera nommé "**parallélogramme**". Chaque bras (2) est entraîné par un "**moteur de bras**" (7) qui aura le plus souvent la forme d'un ensemble moteur-réducteur-capteur. Le "**préhenseur**" (10) sera monté en pivotement sur la nacelle et entraîné par le moteur (6) par l'intermédiaire de l'"**arbre télescopique**" (8) muni d'une articulation de type cardan (9) à chacune de ses extrémités; cette solution pourra, suivant les cas, être remplacée par d'autres variantes telles que:

- un petit moteur-réducteur monté sur la nacelle,
- un câble flexible tournant entraîné par un moteur fixe sur le bâti; un réducteur monté sur la nacelle (vis tangente par exemple) transmet la rotation du câble au préhenseur,
- un câble travaillant en traction dont l'extrémité côté nacelle est enroulée sur un tambour; un ressort de torsion monté entre la nacelle et le préhenseur assure la tension du câble quel que soit le sens de rotation; le câble est guidé dans une gaine flexible pour assurer une relation constante entre l'extrémité côté moteur et le tambour.

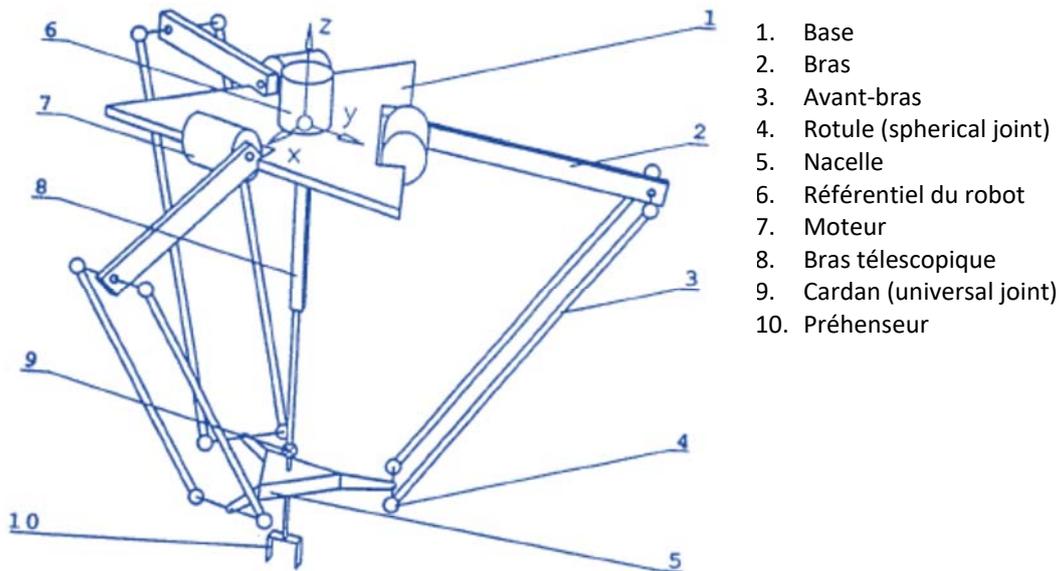


Fig.13 Schéma de principe du robot DELTA4.

L'orientation de la nacelle est constamment assurée par les 3 parallélogrammes comportant chacun 2 petits côtés et 2 grands côtés formés par les barres parallèles; chaque petit côté solidaire de l'extrémité d'un bras reste constamment parallèle à l'axe de rotation du bras considéré; les 3 paires de barres parallèles garantissent que les 3 petits côtés solidaires de la nacelle restent parallèles à ceux solidaires de l'extrémité des bras et donc parallèles aux axes de rotation des bras qui, par construction, sont situés dans un même plan. Les articulations aux extrémités des barres parallèles sont de type rotule.

### 1.3.6 Mobilité du robot DELTA à 6 barres parallèles.

Un simple examen de la figure 13 montre que cette structure mobile sans le 4e axe est composée de 5 boucles; le compte des mobilités des articulations donne le résultat suivant:

- 3 articulations à MO=1 (moteur de bras)
- 12 rotules (MO=3)

La mobilité de l'ensemble est donc de:  $12 \times 3 + 3 \times 1 - 5 \times 6 = 9$  alors que l'on attendait 3.

Par Grübler.

$$\begin{array}{|l} n = 11 \\ k = 15 \\ MO = 6(11 - 15 - 1) + 12 \times 3 + 3 \times 1 = -30 + 39 = 9. \end{array}$$

Ce résultat est dû au fait qu'avec une rotule à chaque extrémité, chaque barre parallèle peut pivoter autour de son axe longitudinal, ce qui donne 6 degrés de liberté supplémentaires. Ce mouvement intempestif est limité constructivement par l'effet des ressorts de maintien des barres parallèles sur les étriers. Un cardan à l'une des extrémités de chacune des six barres conduirait à la mobilité attendue de 3.

### 1.3.7 Singularités du robot DELTA

Dans un manipulateur sériel, les positions singulières découlent de la perte de degrés de liberté alors que dans un manipulateur parallèle, elles résultent du gain de un ou plusieurs degrés de liberté [FICHTER 86]. La plupart du temps, le passage par une singularité provoque un hyperguidage pour ensuite passer par la perte de contrôle d'un ou plusieurs degrés de liberté.

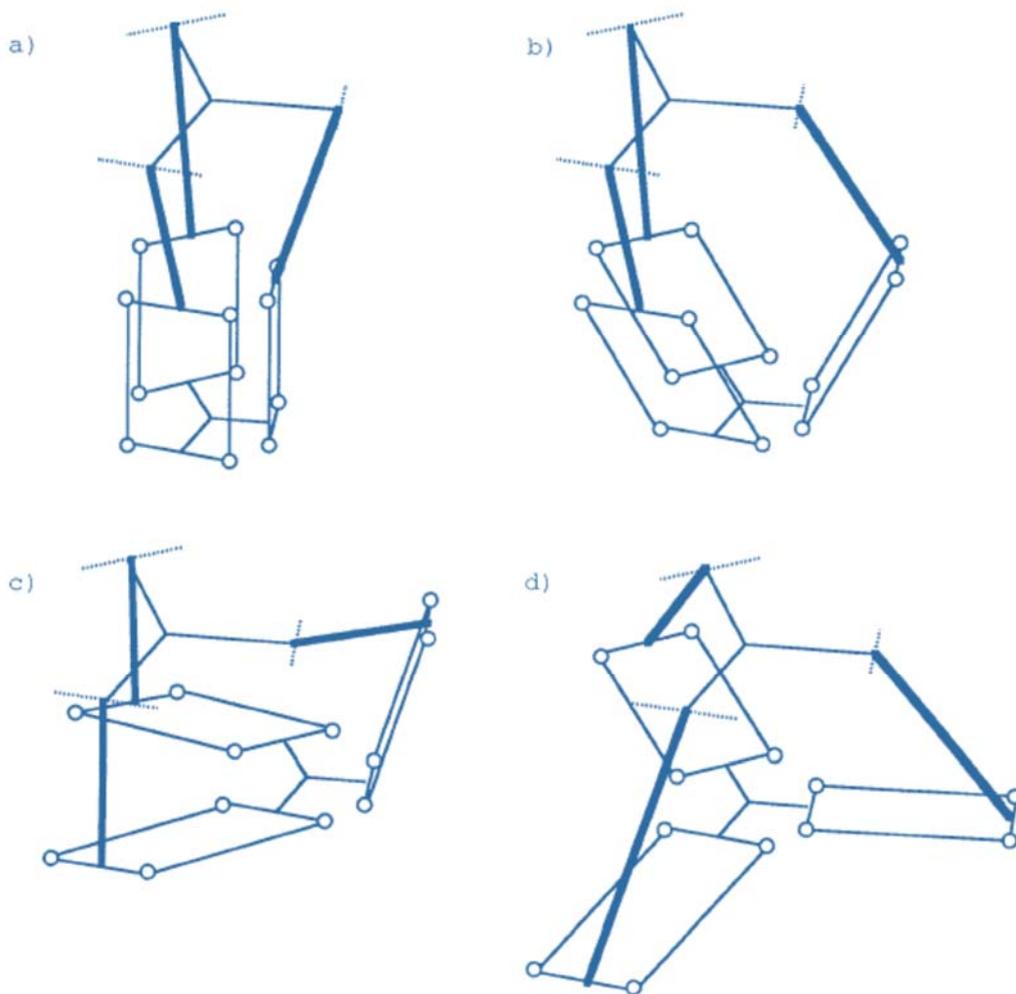


Fig.14 Représentation des 4 types de singularités du robot DELTA.

Les singularités de la structure considérée ont été déterminées à partir de l'analyse de la position relative des 6 barres solidaires de la nacelle; nous considérons que chaque barre transmet uniquement une force dont la ligne d'action est confondue avec la droite reliant les 2 articulations à ses extrémités.

La position de la nacelle est totalement définie et sa stabilité assurée si les conditions suivantes sont respectées:

- les lignes d'action des forces (les barres parallèles dans le cas présent) sont situées dans 3 plans différents non parallèles ;
- 2 lignes d'action au maximum sont parallèles.

Ces conditions mettent en évidence les 4 types de singularités schématisées à la figure 14

- a) lorsque les 6 barres (3 paires) sont toutes parallèles à une même direction (fig.14.a), la nacelle conserve 3 degrés de liberté, soit: déplacement sur une portion de sphère et rotation autour d'un axe perpendiculaire à la nacelle;
- b) si 4 barres (2 paires) sont parallèles (fig.14.b), la nacelle conserve un degré de liberté, soit: déplacement sur un arc de cercle;
- c) si 4 barres (2 paires) sont dans un même plan ou dans 2 plans parallèles (fig.14.c), la nacelle conserve un degré de liberté, soit: rotation définie par l'axe reliant les deux articulations situées entre la nacelle et les deux barres non considérées;
- d) lorsque les 3 parallélogrammes sont situés dans 3 plans parallèles ou confondus (fig.14.d), la nacelle conserve 3 degrés de liberté, soit: 2 rotations d'axes appartenant au plan de la nacelle (axes horizontaux) et translation de faible amplitude perpendiculairement au même plan.

### 1.3.8 Etude plus complète de la structure parallèle du robot DELTA.

Le but de cette partie est de montrer sur un exemple suffisamment simple une manière d'aborder l'étude plus complète d'un robot parallèle.

Comme déjà mentionné sous 5, l'élément essentiel de la structure mobile du robot DELTA est le **parallélogramme de l'espace** formé de 3 chaînes cinématiques principales reliant la base fixe à la nacelle; la cinématique nécessaire à la rotation du préhenseur ne sera pas abordée ici.

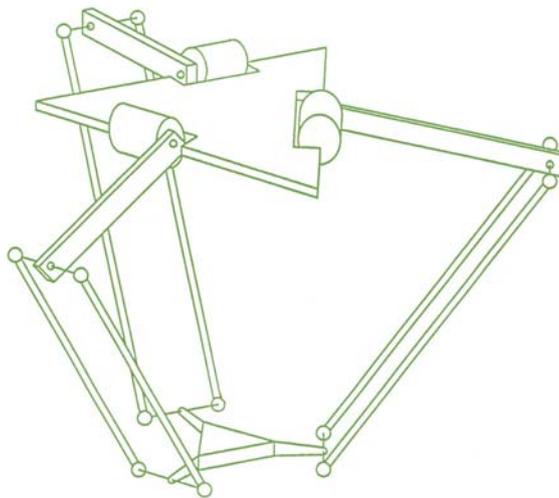


Fig.15 Structure mobile du robot DELTA formant un **parallélogramme de l'espace**.

Au cours de cette partie, nous présenterons les différentes **grandeurs géométriques** liées à cette structure parallèle, puis nous montrerons les **déplacements limites**; ces derniers permettront de mettre en évidence le **volume de travail** de ce robot. Nous étudierons ensuite la relation qui permet, à partir de la position des 3 bras, de déterminer la position de la nacelle (**modèle géométrique direct**); l'opération inverse sera également explicitée (**modèle géométrique inverse**).

### Hypothèses simplificatrices.

Lors de toutes les études géométriques et cinématiques, les articulations seront considérées idéales (sans jeu, sans élasticité et sans frottement) et les corps seront supposés géométriquement exacts et parfaitement rigides. Cette dernière hypothèse a été confirmée a posteriori par la détermination des fréquences propres des différents prototypes réalisés (valeurs mesurées: 120 à 250 Hz).

### Longueurs paramétriques.

Nous considérons la configuration à symétrie ternaire formée de 3 chaînes cinématiques identiques disposées selon une période de  $120^\circ$  (Cf.Fig.15). Les longueurs paramétriques et les angles caractéristiques de cette structure sont représentés à la figure 16.

**RA:** distance entre le centre de la base fixe et l'axe de rotation du bras;

**RB:** distance entre le centre de la nacelle et le côté du parallélogramme solidaire de la nacelle;

**LA:** longueur du bras;

**LB:** longueur d'une barre parallèle;

**R :** différence entre les longueurs RA et RB; cette distance définit la position du point  $A_i$ ; ce dernier est obtenu par une translation d'amplitude RB de la chaîne cinématique  $i$  qui amène le point  $B_i$  au centre de la nacelle, le point  $O_i$  en  $A_i$  et le point  $C_i$  en  $C_i'$ ; l'axe de rotation du bras ainsi translaté est nommé  $a_i$ .

### Angles caractéristiques.

**$\alpha_i$ :** angle entre le  $i^e$  bras et le plan de la base fixe; dans la suite, il sera considéré que la base fixe est horizontale; par convention, l'angle  $\alpha_i$  est positif lorsque le bras est situé du côté de la nacelle;

**$\beta_i$ :** angle entre le plan du  $i^e$  parallélogramme et le plan horizontal, mesuré dans un plan vertical  $\beta_i$  contenant le bras  $i$ ;

**$\gamma_i$ :** angle entre le plan vertical  $\pi_i$  et une des barres du parallélogramme  $i$ ;

**$\theta_j$ :** angle entre le plan  $\pi_j$  et le plan  $Oxz$ .

### Longueurs paramétriques adimensionnelles.

Afin de généraliser l'étude des relations entre les longueurs paramétriques du robot et ses différentes caractéristiques, nous choisissons de rapporter toutes les dimensions à la longueur de référence LA.

Soit:  $r = R/LA$

$$b = LB/LA$$

### Dimension globale du robot DELTA.

Pour qualifier la dimension globale DG du robot DELTA, nous avons choisi de considérer comme référence la somme des longueurs LA et LB exprimées en millimètres; cette valeur peut être formulée comme suit:

$$DG = LA(1+b)$$

Par exemple, le prototype n°2 dont LA = 200 mm et LB = 380 mm est un DELTA 580.

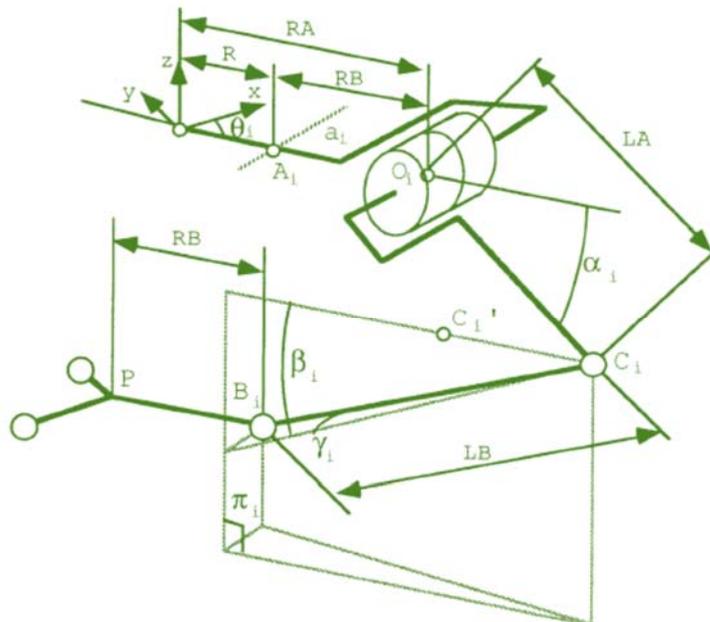


Fig.16. Longueurs paramétriques et angles caractéristiques du robot DELTA; pour simplifier, chaque parallélogramme est représenté par un seul segment.

### Simplification de la géométrie pour l'étude.

Lors de la description du fonctionnement du robot, nous avons vu que les 3 orientations de la nacelle sont constantes; sur le plan cinématique, on peut donc considérer le robot équivalent dont une chaîne cinématique est représentée à la figure 17; on l'obtient en tradant les ensembles bras-barres parallèles comme mentionné dans la définition de R.

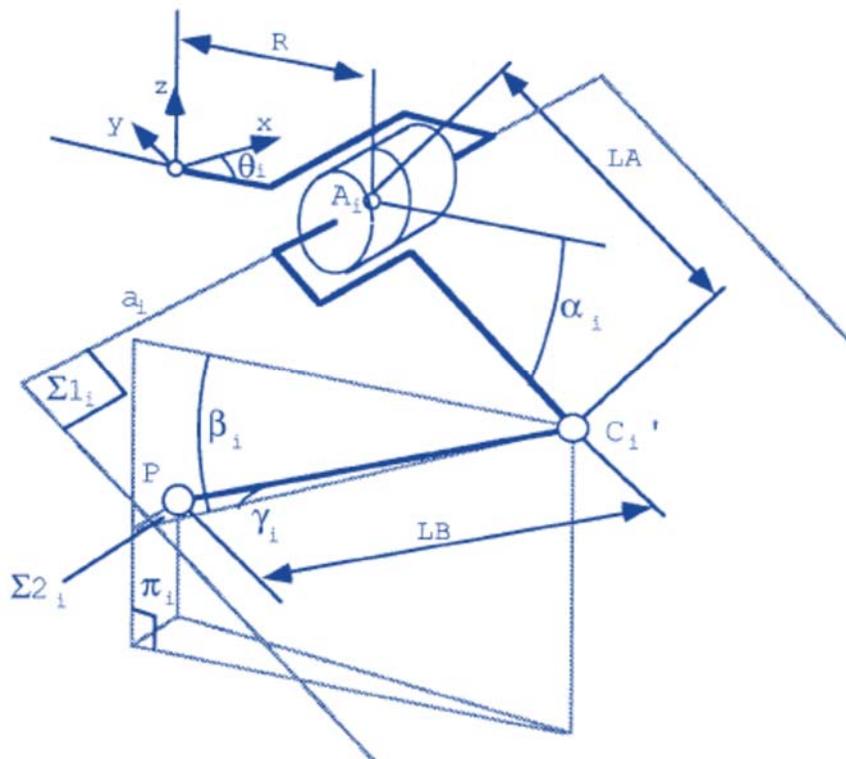


Fig.17. Chaîne cinématique équivalente en considérant que la nacelle est réduite à un point.

### Volume de travail.

#### Limites géométriques.

Par le fait que les dimensions des constituants sont finies et qu'ils ont des mouvements relatifs restreints, le déplacement de la nacelle est limité à une portion de l'espace. Il est encore nécessaire d'imposer des restrictions à certains mouvements pour éviter les ambiguïtés lors du calcul des transformations de coordonnées et les singularités mentionnées précédemment.

**Limite 1:**  $-\gamma_{\max} \leq \gamma_i \leq \gamma_{\max}$

**Origine :** les contraintes de construction des articulations aux 2 extrémités des barres parallèles limitent cet angle à  $\gamma_{\max} = 40^\circ$ ;

**limite 2:**  $30^\circ \leq \alpha_i + \beta_i \leq 180^\circ$

#### Pour les 2 raisons suivantes:

- éviter les interférences entre le bras et les barres parallèles ainsi qu'entre les barres parallèles et les moteurs de bras lorsque  $\alpha_i + \beta_i$  est petit;
- éviter les ambiguïtés de transformation de coordonnées qui se produisent lorsque l'angle  $(\alpha_i + \beta_i)$  devient supérieur à  $180^\circ$ ; ceci donne 2 ensembles de consignes articulaires pour un seul point de l'espace opérationnel.

### Volume de travail.

Le volume de travail est la zone que le point P, centre de la nacelle, peut atteindre. Le montage d'un outil provoquera un décalage du point de travail vers le bas et une translation correspondante du volume de travail.

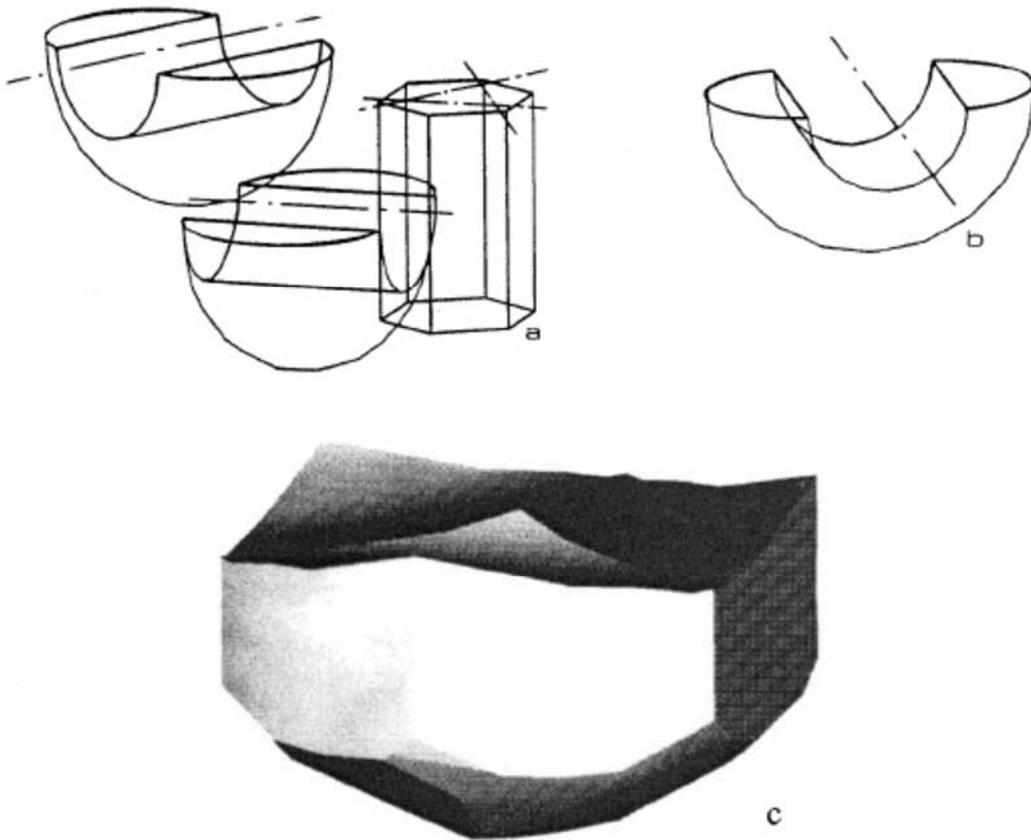


Fig.18. Le volume de travail du robot DELTA (en c) est donné approximativement par l'intersection du prisme hexagonal droit a) avec les 3 corps de révolution b) dont les axes sont indiqués en a).

### Diamètre D du cylindre inscrit dans le volume de travail:

Cette dimension D est directement donnée par la limite 1:

$$D = 2 LB \sin \gamma_{\max}$$

si on rapporte cette valeur à LA:

$$d = D/LA = 2 b \sin \gamma_{\max} \approx 1,3 b \text{ pour } \gamma_{\max} = 40^\circ$$

Il est intéressant de remarquer que d ne dépend que de b pour un angle  $\gamma_{\max}$  donné.

**Surface de travail:**

la valeur de  $d$  déterminée ci-dessus permet de calculer la surface  $S$  de l'hexagone, projection du volume de travail sur un plan horizontal; la valeur adimensionnelle de cette surface sera donnée par  $s = S/LA^2$ .

$$s = 3 \frac{b^2 \sin^2 \gamma_{\max}}{\cos 30^\circ} = 2 \sqrt{3} \sin^2 \gamma_{\max} b^2$$

$$s = 1,431 b^2 \quad \text{pour } \gamma_{\max} = 40^\circ$$

**Hauteur du volume de travail:**

Soient  $Z_h$  et  $Z_b$  les coordonnées selon  $z$  respectivement du haut et du bas du volume de travail; la hauteur  $H$  du volume de travail sera donnée par:  $Z_h - Z_b$ ;  $z_h$  et  $z_b$  sont les valeurs adimensionnelles de  $Z_h$  et  $Z_b$ .

Selon le schéma de la figure 19, on obtient directement:

$$z_h = -\sqrt{1+b^2-2b \cos(\alpha_i+\beta_i)_{\min}}$$

$$z_h = -\sqrt{1+b^2- b\sqrt{3}} \quad \text{pour } (\alpha_i+\beta_i)_{\min}=30^\circ$$

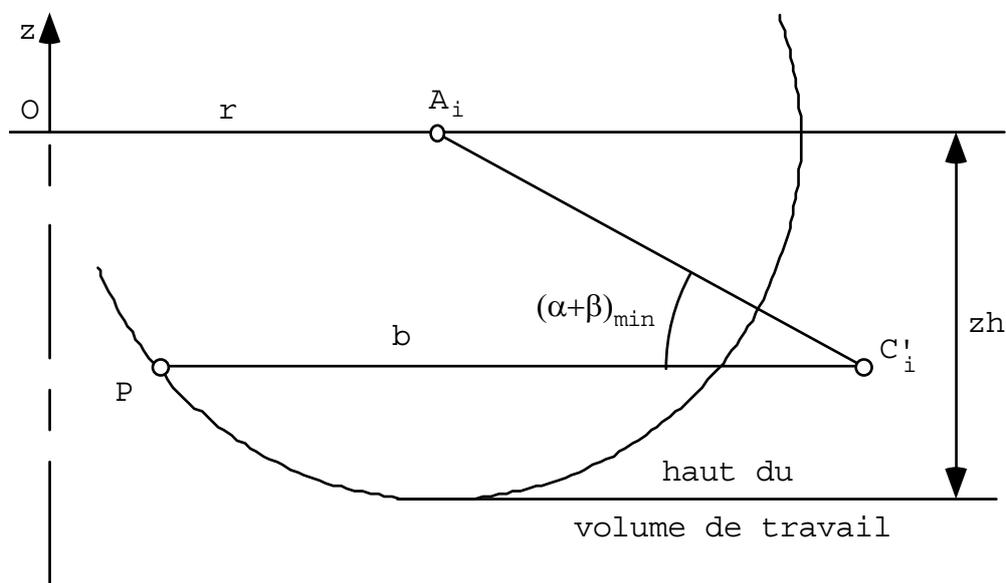


Fig.19 Détermination de la limite supérieure du volume de travail.

Pour déterminer la limite inférieure du volume de travail (cote  $z_b$ ), reportons-nous à la figure 20.

Le point d'intersection de la surface générée par l'arc de cercle centré en  $C_i'$  par une rotation d'axe  $a_j$  (Cf.Fig.17) avec  $\alpha+\beta=180^\circ$  avec l'arête verticale du prisme hexagonal opposée à chaque bras est appelé  $T$ ; l'intersection de la même surface avec les 2 arêtes verticales adjacentes donne les points  $T'$ ; vu la symétrie ternaire, les points  $T'$  définis par chacun des bras sont confondus 2 à 2.

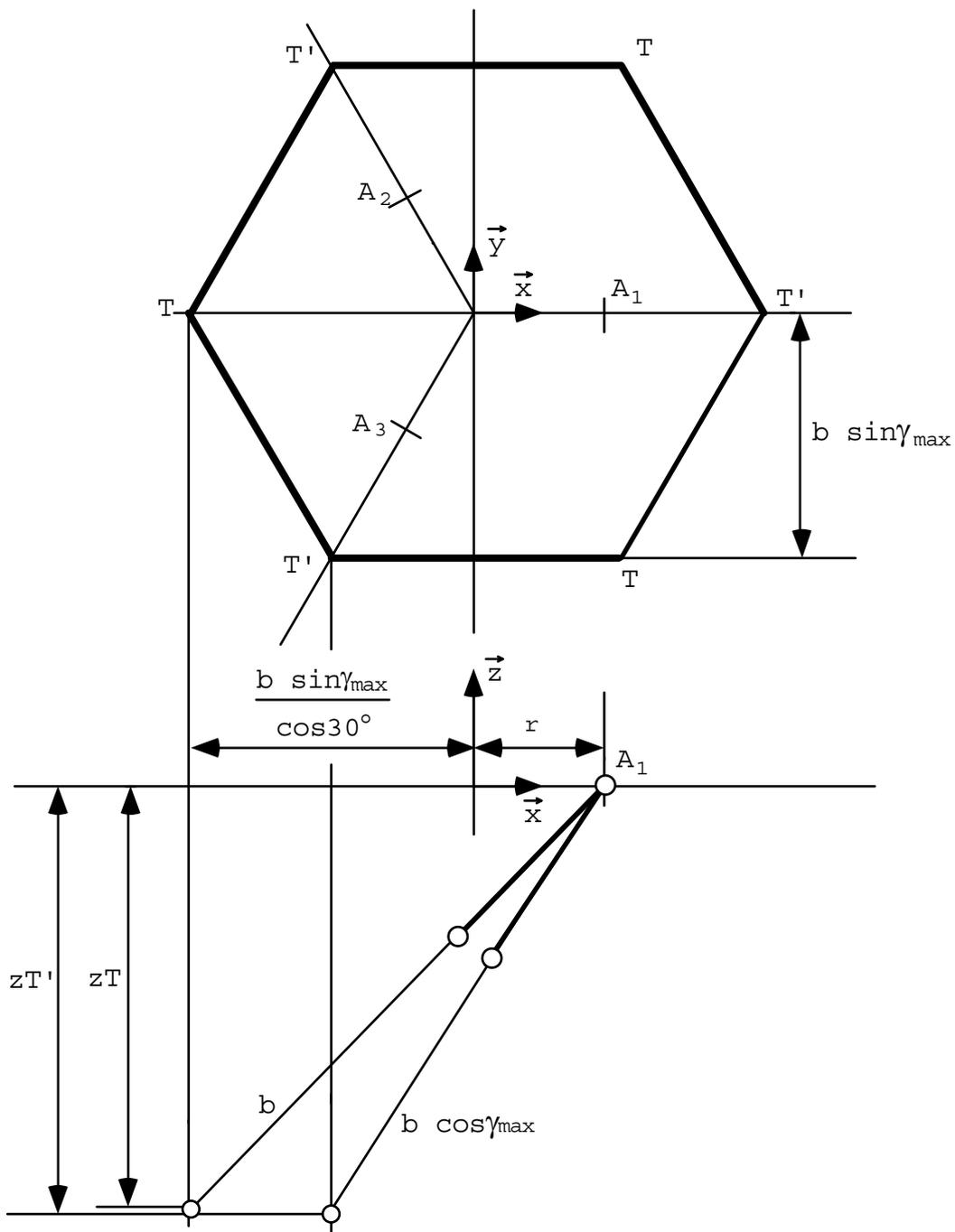


Fig.20- Détermination de la limite inférieure du volume de travail  $z_b = \max.(zT, zT')$ .

Les coordonnées de T et T' selon z ont la valeur suivante:

$$\left| \begin{array}{l} z_T = -\sqrt{(1+b)^2 - \left(r + 2 \frac{b \sin \gamma_{\max}}{\sqrt{3}}\right)^2} \\ z_{T'} = -\sqrt{(1+b \cos \gamma_{\max})^2 - \left(r + \frac{b \sin \gamma_{\max}}{\sqrt{3}}\right)^2} \end{array} \right.$$

La cote  $z_b$  sera la valeur maximum de  $z_T$  et  $z_{T'}$ .

On remarque que l'augmentation de l'angle  $\gamma_{\max}$  conduit à une augmentation de surface de travail (voir: "surface de travail"), mais diminue la hauteur sur laquelle le prisme hexagonal est complet; la faible hauteur de la zone de travail gagnée par un angle  $\gamma_{\max}$  nettement plus élevé que  $40^\circ$  rend cette démarche peu intéressante sur le plan utilisation et complique sérieusement la construction des articulations.

On peut tirer des 2 expressions précédentes la condition pour que  $z_T = z_{T'}$ :

$$\left| r = \sqrt{3} \frac{1 - \cos \gamma_{\max}}{\sin \gamma_{\max}} \right.$$

Pour  $\gamma_{\max} = 40^\circ$ ,  $r = 0,63$  pour que les points T et T' soient situés à la même hauteur; c'est dans cette condition que l'on obtient la forme de la calotte inférieure du volume de travail la plus régulière.

h aura donc la valeur suivante:

si  $r \geq 0,63$

$$\left| h = \sqrt{(1+b)^2 - \left(r + 2 \frac{b \sin \gamma_{\max}}{\sqrt{3}}\right)^2} - \sqrt{1+b^2 - b\sqrt{3}} \right.$$

si  $r \leq 0,63$

$$\left| h = \sqrt{(1+b \cos \gamma_{\max})^2 - \left(r + \frac{b \sin \gamma_{\max}}{\sqrt{3}}\right)^2} - \sqrt{1+b^2 - b\sqrt{3}} \right.$$

Pour mieux appréhender le volume de travail complet avec la calotte inférieure, il est intéressant d'en connaître la hauteur maximum  $h_{\max}$ ; celle-ci est donnée par la distance entre le haut du volume de travail ( $z_h$ ) et le point le plus bas que la structure mobile peut atteindre; ce point est situé sur l'axe Oz à la cote adimensionnelle:  $\sqrt{(1+b)^2 - r^2}$ , d'où:

$$\left| h_{\max} = \sqrt{(1+b)^2 - r^2} - \sqrt{1+b^2 - b\sqrt{3}} \right.$$

Le tableau 21 et la figure 22 donnent une vue synthétique de  $zh$ ,  $h$ ,  $h_{max}$ ,  $d$ ,  $s$  et  $v$  (égal à  $h.s$ ); ces valeurs sont déterminées avec  $\gamma_{max}=40^\circ$  et  $(\alpha_i+\beta_i)_{min}=30^\circ$ .

r	b	zh	h	hmax	d	s	v
	1,75	-1,02	1,06	1,68	2,25	4,38	4,67
	2	-1,24	1,01	1,71	2,57	5,72	5,79
0,5	2,25	-1,47	0,95	1,74	2,89	7,24	6,87
	2,5	-1,71	0,88	1,75	3,22	8,94	7,87
	2,75	-1,95	0,81	1,76	3,54	10,82	8,76
	3	-2,19	0,74	1,77	3,86	12,88	9,47
	1,75	-1,02	0,94	1,65	2,25	4,38	4,14
	2	-1,24	0,89	1,69	2,57	5,72	5,09
0,63	2,25	-1,47	0,83	1,71	2,89	7,24	5,98
	2,5	-1,71	0,76	1,73	3,22	8,94	6,76
	2,75	-1,95	0,68	1,74	3,54	10,82	7,4
	3	-2,19	0,61	1,76	3,86	12,88	7,84
	1,75	-1,02	0,76	1,61	2,25	4,38	3,34
	2	-1,24	0,71	1,65	2,57	5,72	4,04
0,8	2,25	-1,47	0,64	1,68	2,89	7,24	4,65
	2,5	-1,71	0,57	1,69	3,22	8,94	5,11
	2,75	-1,95	0,5	1,71	3,54	10,82	5,4
	3	-2,19	0,42	1,72	3,86	12,88	5,46
	1,75	-1,02	0,49	1,54	2,25	4,38	2,17
	2	-1,24	0,44	1,58	2,57	5,72	2,53
1	2,25	-1,47	0,38	1,62	2,89	7,24	2,77
	2,5	-1,71	0,32	1,64	3,22	8,94	2,82
	2,75	-1,95	0,25	1,66	3,54	10,82	2,66
	3	-2,19	0,17	1,68	3,86	12,88	2,23

Tableau 21 Influence de  $r$  et  $b$  sur les dimensions ( $h$ ,  $h_{max}$ ,  $d=D/LA$ ,  $s=S/LA^2$ ,  $v=V/LA^3=sh$ ) et la position ( $zh$ ) du volume de travail.

Exemples de robots réalisés et volume de travail correspondant:

Les volumes de travail donnés ne tiennent pas compte d'une éventuelle limitation provoquée par l'entraînement du 4<sup>e</sup> axe.

<b>Micro-DELTA 240</b>	RA=67 mm	RB=17 mm	r=0,625
	LA=80 mm	LB=160 mm	b=2
	D=206 mm	H=71,5 mm	Hmax=136 mm
	S=3,66 10 <sup>4</sup> mm <sup>2</sup>		
	V=2,62 10 <sup>6</sup> mm <sup>3</sup>		

<b>DELTA 580</b>	RA=150 mm	RB=25 mm	r=0,625
	LA=200 mm	LB=380 mm	b=1,9
	D=489 mm	H=183 mm	Hmax=336 mm
	S=20,7 10 <sup>4</sup> mm <sup>2</sup>		
	V=37,9 10 <sup>6</sup> mm <sup>3</sup>		
<b>DELTA 740</b>	RA=194 mm	RB=30 mm	r=0,631
	LA=260 mm	LB=480 mm	b=1,846
	D=617 mm	H=240 mm	Hmax=435 mm
	S=33 10 <sup>4</sup> mm <sup>2</sup>		
	V=79,2 10 <sup>6</sup> mm <sup>3</sup>		

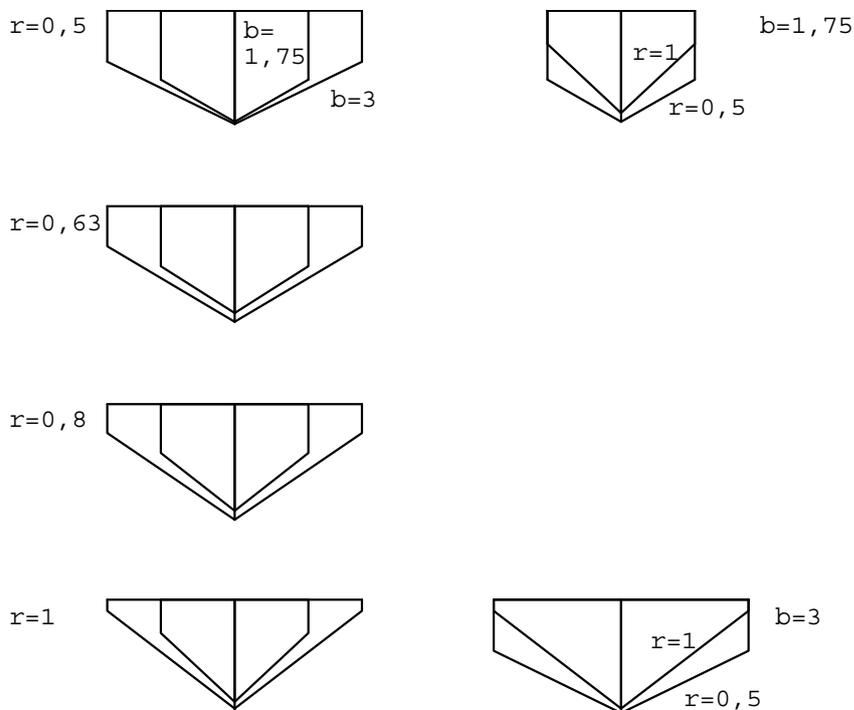


Fig.22 Représentation simplifiée de l'influence de r et b sur les dimensions h et d du volume de travail.

### 1.3.9 Modèles géométriques.

#### 1.3.9.1 Introduction.

Une caractéristique essentielle du robot DELTA est le fait que sa structure mobile est un parallélogramme de l'espace, c'est-à-dire que quels que soient ses mouvements et sa position, il conserve constantes les 3 orientations de sa nacelle sans aucune action de moteurs.

Une des applications typiques du robot DELTA est le conditionnement de composants légers; cette opération consiste essentiellement à prendre une pièce à une position donnée et la déposer à une autre position en suivant une trajectoire compatible avec les contraintes de prise et d'accostage et celles dépendant des obstacles constitués par les divers éléments de la périphérie. Vu la géométrie particulière de ce robot, il est illusoire de programmer les trajectoires par l'apprentissage de quelques points.

Les modèles géométriques direct et inverse sont les relations qui expriment la situation de l'organe terminal du robot (la nacelle dans le cas présent) en fonction de la configuration du mécanisme (coordonnées articulaires) et inversement. La connaissance des modèles géométriques direct et inverse est donc absolument indispensable pour programmer le robot DELTA dans l'espace opérationnel (points de prise et dépose ainsi que trajectoire) et bénéficier ainsi totalement de ses propriétés. Ces modèles seront également indispensables pour la partie dynamique.

Le fait que la nacelle n'effectue que des mouvements de translation permet une formulation simple des modèles géométriques. Nous considérons la simplification de représentation décrite sous 1.3.8, fig.17 qui réduit la nacelle à un point.

Sur cette base, Sternheim [STERNHEIM 87] a établi une méthode pour déterminer les modèles direct et inverse du robot DELTA; pour cette opération, il fait intervenir les angles  $\beta_i$  et  $\gamma_i$  (Cf. Fig.17) qui définissent les directions des barres parallèles.

Nous proposons ci-dessous une méthode de la géométrie analytique qui consiste à exprimer les intersections d'une sphère avec 3 cercles.

Nous nous référons à la figure 17; le point P peut être considéré comme le centre d'une sphère de rayon LB; les points  $A_i$  sont les centres de cercles de rayon LA appartenant aux plans  $\pi_i$  et les points  $C_i$  sont donnés par les intersections des trois cercles de rayon LA avec la sphère de rayon LB centrée en P.

Coordonnées des points  $C_i$ :

$$\left| \begin{array}{l} [(R + LA \cos\alpha_i)\cos\theta_i, (R + LA \cos\alpha_i)\sin\theta_i, - LA \sin\alpha_i] \end{array} \right.$$

Equation de la sphère de centre P(x,y,z) et de rayon LB:

$$\left| \begin{array}{l} (X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 = LB^2 \end{array} \right.$$

Les points  $C_i$  appartiennent à la sphère:

$$\left| \begin{array}{l} [(R + LA \cos\alpha_i)\cos\theta_i - x]^2 + [(R + LA \cos\alpha_i)\sin\theta_i - y]^2 + [- LA \sin\alpha_i - z]^2 = LB^2 \\ x^2 - 2x(R + LA \cos\alpha_i)\cos\theta_i + y^2 - 2y(R + LA \cos\alpha_i)\sin\theta_i + z^2 + 2z LA \sin\alpha_i = LB^2 - LA^2 - R^2 - 2 R LA \cos\alpha_i \end{array} \right. \text{[eq.1]}$$

Ces trois équations peuvent être résolues selon x, y, z pour le modèle direct et selon  $\alpha_i$  pour le modèle inverse. Afin de conserver les possibilités de contrôle dimensionnel des différentes équations, nous n'introduisons pas ici les facteurs adimensionnels r et b.

### 1.3.9.2 Modèle géométrique direct.

En posant:

$$D_i = -LB^2 + LA^2 + R^2 + 2R LA \cos\alpha_i$$

$$E_i = 2(R + LA \cos\alpha_i)\cos\theta_i$$

$$F_i = 2(R + LA \cos\alpha_i)\sin\theta_i = E_i \operatorname{tg}\theta_i$$

$$G_i = -2 LA \sin\alpha_i$$

$$H_1 = E_1G_2 - E_1G_3 - E_2G_1 + E_2G_3 + E_3G_1 - E_3G_2$$

$$H_2 = -E_1F_2 + E_1F_3 + E_2F_1 - E_2F_3 - E_3F_1 + E_3F_2$$

$$H_3 = -E_1D_2 + E_1D_3 + E_2D_1 - E_2D_3 - E_3D_1 + E_3D_2$$

$$H_4 = F_1D_2 - F_1D_3 - F_2D_1 + F_2D_3 + F_3D_1 - F_3D_2$$

$$H_5 = -F_1G_2 + F_1G_3 + F_2G_1 - F_2G_3 - F_3G_1 + F_3G_2$$

Alors :

$$x = z \frac{H_5}{H_2} + \frac{H_4}{H_2} \quad \text{[eq.2]}$$

$$y = z \frac{H_1}{H_2} + \frac{H_3}{H_2} \quad \text{[eq.3]}$$

[eq.2] et [eq.3] dans [eq.1] pour  $i=1$

$$z = \frac{-M \pm \sqrt{M^2 - 4LN}}{2L} \quad \text{[eq.4]}$$

avec:

$$L = \frac{H_5^2 + H_1^2}{H_2^2} + 1$$

$$M = 2 \frac{H_5 H_4 + H_1 H_3}{H_2^2} - \frac{H_5 E_1 + H_1 F_1}{H_2} - G_1$$

$$N = \frac{H_4^2 + H_3^2}{H_2^2} - \frac{H_4 E_1 + H_3 F_1}{H_2} + D_1$$

### 1.3.9.3 Modèle géométrique inverse:

Considérant,  $Q_i = 2x \cos\theta_i + 2y \sin\theta_i$

$$S = \frac{1}{LA} (-x^2 - y^2 - z^2 + LB^2 - LA^2 - R^2)$$

La résolution des équations [eq.1] donne l'expression suivante :

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_i}{2} = \frac{-2z \pm \sqrt{4z^2 + 4R^2 - S^2 + Q_i^2 \left(1 - \frac{R^2}{LA^2}\right) + Q_i \left(-2\frac{RS}{LA} - 4R\right)}}{-2R - S - Q_i \left(\frac{R}{LA} - 1\right)}$$

**Remarques au sujet des résultats obtenus pour les modèles géométriques direct et inverse:**

- fonction de la géométrie et de l'origine choisie pour l'angle  $\alpha_i$ , la valeur absolue de ce dernier est toujours inférieure à  $180^\circ$ , donc  $\text{tg}(\alpha_i/2)$  ne peut pas prendre la valeur infini; toutefois, des singularités mathématiques de type 0/0, génératrices de bruit numérique peuvent apparaître; afin d'écarter ce problème, Codourey [CODOUREY 91] a utilisé avec des prémisses identiques, une résolution différente du modèle géométrique inverse; toutefois, cette résolution est légèrement plus exigeante en temps de calcul;
- les deux valeurs obtenues pour chaque  $\alpha_i$  proviennent du fait que chaque arc de cercle coupe la sphère en deux points; la valeur utile est la plus petite des deux; l'autre valeur correspond à une position où l'angle  $\alpha_i + \beta_i$  est supérieur à  $180^\circ$ ; on prendra donc le signe "-" dans l'expression de  $\text{tg}(\alpha_i/2)$ ;
- les deux valeurs obtenues pour chacune des coordonnées  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , dans le cadre de la transformation directe ont pour origine le fait que par les 3 points  $C_i$  peuvent passer deux sphères de rayon donné; leurs centres respectifs sont placés symétriquement par rapport au plan défini par les trois points considérés; la valeur minimum de  $z$  sera celle à prendre en considération; on choisira le signe "-", dans l'expression [3.4.4] ;
- pour accélérer les calculs numériques, on aura avantage à choisir un des angles  $\theta_i$  égal à 0; nous prendrons donc  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = 120^\circ$  et  $\theta_3 = 240^\circ$ ; avec ces valeurs,  $Q_1 = 2x$ ,  $F_1 = 0$ ,  $H_2$ ,  $H_4$  et  $H_5$  ont 2 termes en moins.

### 1.3.10 Bibliographie

#### References concepts généraux

- 1) Sciavicco, Lorenzo, and Bruno Siciliano. *Modelling and control of robot manipulators*. Springer Science & Business Media, 2012.
- 2) Craig, John J. *Introduction to robotics: mechanics and control*. Vol. 3. Upper Saddle River, NJ, USA:: Pearson/Prentice Hall, 2005.
- 3) Codourey A, Contribution à la commande des robots rapides et précis, (Application au robot DELTA), these No. 922, 1991 (EPFL)
- 4) Dombre E., Khalil W., Modélisation et commande des robots, Editions Hermès, 1988.
- 5) Clavel, R., Conception d'un robot parallèle rapide à 4 degrés de liberté, thèse No. 925, 1991 (EPFL)
- 6) Siciliano, Bruno, and Oussama Khatib, eds. *Springer handbook of robotics*. Springer, 2016.

#### References robot Delta – Reymond Clavel

- [CLAVEL 85b] R.Clavel, "Dispositif pour le déplacement et le positionnement d'un élément dans l'espace", brevet suisse n° 672089 A5, priorité décembre 1985
- [CLAVEL 88a] R.Clavel, "DELTA, a fast robot with parallel geometry", proc. of the 18th Int. Symposium on Industrial Robots, p.91-100, IFS Publications, 1988
- [CLAVEL 89a] R.Clavel, "Une nouvelle structure de manipulateur parallèle pour la robotique légère", APII, vol.23, No 6, p.501-519, AFCET, 1989
- CLAVEL 91] R.Clavel, "Conception d'un robot parallèle rapide à 4 degrés de liberté", thèse de doctorat No 925, EPFL, 1991
- [CODOUREY 91] A.Codourey, "Contribution à la commande des robots rapides: application au robot DELTA à entraînement direct", thèse de doctorat No 922, EPFL, 1991
- [LIU 90] S-M.Liu, "Etude et conception de petits robots industriels: réalisation du robot miniature "Colibri"", thèse de doctorat No 888, EPFL, 1990
- [PIERROT 90] F.Pierrot, Cl.Reynaud, A.Fournier, "DELTA: a simple and efficient parallel robot", *Robotica* volume 8, p.105-109, Cambridge University Press, 1990
- [Bouri 2012] Bouri, Mohamed, and Reymond Clavel. "The linear delta: Developments and applications." *Robotics (ISR)*, 2010 41st International Symposium on and 2010 6th German Conference on Robotics (ROBOTIK). VDE, 2010.
- [Clavel 2008] Clavel, Reymond, et al. "New variants of delta robots and double-tilt platform for assembly." *Proceedings of Robotic Systems for Assembly*. No. LSRO-CONF-2010-004. 2008.

#### Autres référence historique

- [ASEA 85] I.Oestman, C-A Allared, U.Holmqvist, "Pendulum robot", reprint of Asea Journal 3.4.1985
- [BEHI 88] F.Behi, "Kinematic analysis for a six-degree-of-freedom 3-PRPS parallel mechanism", vol.4, num.5, p.561-565, IEEE Journal of Robotics and Automation, 1988
- [DENAVIT 55] J.Denavit, R-S.Hartenberg, "A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices", *J. of applied Mechanics*, 1955
- [DWOLATZKY 88] B.Dwolatzki, G-S.Thornton, "The GEC Tetrabot - a serial-parallel topology robot: control design aspects", Proc. Control 88 International Conference, Conference Publication No 285 IEE, 1988

- [FICHTER 86] E-F.Fichter, "A Stewart platform-based manipulator: general theory and practical construction", the International Journal of Robotics Research, vol.5, No.2, p.157-182, 1986
- [FLORY 67] J-F.Flory, "Parallel platform linkages for shock isolation systems", brevet USA 68, priorité juin 1967
- [GOUGH 62] V-E.Gough, S-G.Whitehall, "Universal tyre test machine", Proc.9th Intern. Automobile Technical Congress, p.117-137, FISITA, IMechE (London), 1962
- [HUNT 83] K-H.Hunt, "Structural kinematics of in-parallel-actuated robot-arms", Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, Transactions of the ASME, vol 105, p.705 à 712, 1983
- [INOUE 83] H.Inoue, K.Yoshida, Y.Kida, "Positioning mechanism", brevet européen 1984; priorité juin 1983
- [KIMURA 83] M.Kimura, "Bras extensible et rétractable", demande de brevet d'invention à l'Institut national de la propriété industrielle, Paris 1984; priorité août 1983
- [KRUEGER 85] H.Krueger-Beuster, "Gelenkelement für Manipulatoren", demande de brevet d'invention au deutsches Patentamt, Munich, avril 1985
- [KWASNY 87] N.Kwasny, "structure triangulée animée: 24 degrés de liberté, 24 t de charge utile", No 37, p.27-30, Bureaux d'études Automatismes, CEPIT Paris 87
- [LAMBERT 83] M.Lambert, "Mécanisme polyarticulé rétractile", demande de brevet d'invention à l'Institut national de la propriété industrielle, Paris, mars 1983
- [LANDE 78] M-A.Lande, R.David, "Articulation pour bras de manipulateur", demande de brevet européen 1979; priorité septembre 1978
- [POLLARD 38] W-L-V.Pollard, "Position controlling apparatus", brevet USA 1942; priorité avril 1938
- [SHUM 81] L-Y.Shum, "Multi-arm robot", brevet USA 1983; priorité mai 1981
- [SIMUNOVIC 84] S-N.Simunovic, "Robotic manipulator", brevet USA 86, priorité juin 84
- [STERNHEIM 87] F.Sternheim, "Computation of the direct and inverse geometric models of the DELTA4 parallel robot", Robotersysteme, vol.3, p.199-203, Springer, 1987
- [STEWART 65] D.Stewart, "A platform with six degree of freedom", Proc. Instn. Mech. Engrs, vol.180, pt.1, NO.15, p.371-378, 1965-66

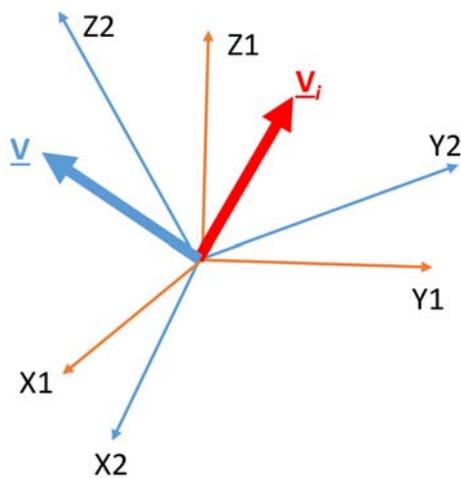
## PARTIE II

# Bases théoriques de la modélisation cinématique

Matrices de Rotation, Homogène et Jacobien

## 2.1 Cinématique.

## 2.2 Jacobien.



### RÉSUMÉ

Ce chapitre est divisé en 2 parties. 1) Les éléments de géométrie et transformation de coordonnées. 2) Jacobien et cinématique différentielle.

M Bouri

H. Bleuler, M. Bouri, 2018

## Sommaire

2.1	Cinématique .....	2
2.1.1	But du Chapitre ; Transformations actives et passives .....	2
2.1.2	Translations et rotations 2D autour de l'origine .....	3
2.1.3	Combinaison de rotations et translations 2D; représentation homogène .....	4
2.1.4	Rotations 2D autour d'un point arbitraire.....	5
2.1.5	Rotations 3D autour de l'origine, Axe de rotation et Quaternions.....	6
2.1.5.1	Matrices de rotation : cas générale.....	6
2.1.5.2	Rotation autour d'un axe quelconque .....	7
2.1.5.3	Quaternions : Paramètres d'Euler, paramètres d'Olinde-Rodriguez.....	9
2.1.6	Translations et rotations 3D en représentation homogène.....	10
2.1.7	Variables robots, modèle géométrique direct .....	11
2.1.8	Poignets de robot, angles d'Euler, tangage, roulis, lacet .....	14
2.1.9	Modèle géométrique inverse, postures .....	15
2.1.10	Récapitulation, robots parallèles :.....	16

## 2.1 Cinématique

### 2.1.1 But du Chapitre ; Transformations actives et passives

La tâche du robot étant de déplacer des objets, il s'agit de décrire précisément la géométrie de tels déplacements. C'est le sujet de la cinématique, c'est à dire de la science de **la géométrie des mouvements**, sans tenir compte des forces. " Mouvement " est défini dans notre contexte comme **changement de position**. L'étude de l'effet des forces sur les mouvements, décrit par les équations différentielles (**Newton-Euler ou Lagrange**), est le domaine de la dynamique. Ce sont les équations du mouvement (Bewegungs-Differentialgleichungen, equations of motion). La connaissance des solutions de ces équations permettra de mettre au point la commande "optimale" du robot.

Variables Robot – Variables opérationnelles

Tout robot est contrôlé par des consignes angulaires ou linéaires envoyées aux actionneurs (moteurs). Ces variables sont appelées « **variables robot** » ou « **joint variables** » en anglais (« joint » signifiant « articulation »). Ces variables définissent le « **joint space** ». Le nombre  $n$  de ces variables correspond au nombre de **degrés de liberté (degrees of freedom)** du robot. Nous utiliserons pour ces variables les notations

$$\{ q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n \} \text{ ou } \{ \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i, \dots, \theta_n \}$$

La tâche du robot, elle, se décrit dans d'autres variables, indépendantes du robot utilisé. Par exemple, dans le cas d'un assemblage, il peut s'agir de coordonnées cartésiennes liées à une platine à assembler, donnant la position cible d'une composante à monter.

Ces variables décrivent donc l'opération à effectuer par le robot, on les appelle « **variables opérationnelles** ». En anglais, on parle de « **operational space** » ou, quelque fois aussi, de « **world coordinates** »

Pour définir la position et l'orientation d'un objet (rigide), nous avons besoin en général de ses six coordonnées (trois pour la position d'un point, par ex. du centre de masse, et trois pour définir l'orientation dans l'espace).

La tâche de la cinématique sera, d'établir les liens entre les variables robot et les variables opérationnelles. Par exemple, l'expression des coordonnées opérationnelles en fonction des variables robot est appelée « **Modèle Géométrique Direct** » (« **Forward Kinematics** » en anglais). Il s'agit donc de la position de la « main » ou de l'outil du robot (end-effector) en fonction de ses positions articulaires. La fonction inverse est le « **Modèle Géométrique Indirect** » (**Backward Kinematics**), donc les positions articulaires en fonction de la posture opérationnelle désirée. Le but principal de ce chapitre est d'établir et d'étudier ces deux fonctions multivariées essentielles en robotique.

La cinématique est également nécessaire à l'établissement du **modèle dynamique (équations du mouvement)** utilisé pour le dimensionnement de la mécanique, la conception de l'entraînement et finalement le contrôle du robot.

Parmi toutes ces démarches, la cinématique s'avère souvent la plus difficile. Elle nous occupera donc un temps substantiel. Décrire la cinématique d'un système multi-corps (par ex. d'un robot) peut représenter 80% de l'effort dans l'établissement du modèle dynamique. La cinématique à elle seule pourrait bien nous occuper pendant un semestre entier!

Une des sources de difficulté dans la cinématique est le fait de devoir travailler souvent avec des référentiels (systèmes de coordonnées) multiples, par ex. des **référentiels fixes** et des **référentiels solidaires au corps en mouvement**, donc mobiles. Il en découle la nécessité d'étudier des changements de référentiels d'un objet fixe ou, au contraire, des changements de position d'un objet par rapport à un référentiel fixe.

Le premier cas (changement de référentiel) est appelé **transformation passive**, le second cas (mouvement de l'objet réel) **transformation active**, les deux types de transformations étant évidemment étroitement liés mathématiquement. (Gruber p.89)

Dans les trois premières sections, nous nous limitons aux **transformations actives**. Ceci facilite le traitement considérablement, ne serait-ce que par l'omission des indexes multiples qui caractérisent tant de livres sur la robotique. Une fois la compréhension de base acquise, des référentiels multiples adaptés au problème concret seront également introduits et utilisés.

Dans ces mêmes premières sections nous traitons uniquement la géométrie du mouvement, **sans nous préoccuper du temps, donc ni de vitesse, ni d'accélération**.

### 2.1.2 Translations et rotations 2D autour de l'origine

On distingue **deux types de changement de position** d'un **objet solide** (caractérisé par des distances invariables entre les points le constituant): Translation et rotation.

La **translation** est définie par un seul et même **vecteur  $\underline{t}$**  de déplacement valable pour tous les points du solide.

La **rotation** est définie par un **axe fixe** (pas nécessairement lié à l'objet) ainsi qu'un **angle de rotation** autour de cet axe. (Rappel du cours « Statique et Dynamique » : Où se trouve l'axe fixe d'une roue ayant roulé d'une distance  $d$ ?)

La description mathématique de ces changements de position se fait de façon suivante: Les points de l'objet sont décrits par des vecteurs de position dans un référentiel fixe. Nous utilisons le plus souvent un référentiel cartésien avec les trois axes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et l'origine  $O$ . Le changement de position d'un point décrit par un vecteur  $\underline{v}_1$  aura pour effet de modifier le vecteur de position. Le vecteur donnant la nouvelle position soit appelé  $\underline{v}_2$ .

La translation est triviale. Les vecteurs de tous les points du corps solide  $C$  se transforment par la même formule:

$$\underline{v}_2 = \underline{v}_1 + \underline{t} \quad (1)$$

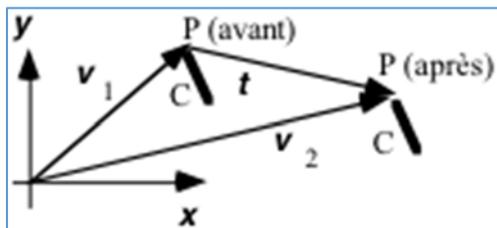
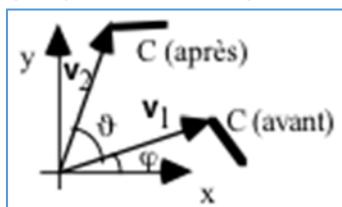


Fig. 1 Translation du point  $P$  de la position  $\underline{v}_1$  à la position

$\underline{v}_2$ . Cette translation est valable pour tous les points de  $C$

Dans le cas de mouvements dans le plan (2D), l'**axe** de rotation est toujours en direction  $z$ . Les coordonnées  $x_C$  et  $y_C$  de cet axe définissent le **centre de rotation** dans le plan. Il nous faut également définir un troisième paramètre, l'angle de rotation  $\vartheta$

Une rotation d'un objet autour de l'origine d'un angle  $\vartheta$  modifiera les vecteurs de position de n'importe quel point fixé à l'objet de la façon suivante :



$$\begin{aligned} \underline{v}_1 &= \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{bmatrix} \\ \underline{v}_2 &= \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos(\varphi + \vartheta) \\ r \sin(\varphi + \vartheta) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

Fig. 2 Rotation pure

En utilisant les coordonnées polaires  $(r, \varphi)$  cette rotation est triviale. Pour passer directement de  $[x_1, y_1]$  à  $[x_2, y_2]$  en coordonnées cartésiennes, sans devoir calculer  $(r, \varphi)$  à partir de  $[x_1, y_1]$ , les théorèmes trigonométriques suivants seront utiles:

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)\end{aligned}\quad (3)$$

En les appliquant à (2), on obtient les coordonnées de  $\mathbf{v}_2$  exprimées en composants de  $\mathbf{v}_1$ .

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos(\varphi + \vartheta) \\ r \sin(\varphi + \vartheta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \cos \vartheta - r \sin \varphi \sin \vartheta \\ r \cos \varphi \sin \vartheta + r \sin \varphi \cos \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (4)$$

Nous avons donc trouvé une représentation de cette rotation par multiplication matricielle du vecteur  $\mathbf{v}_1$  avec une matrice de rotation  $\mathbf{R}$  dépendant uniquement de l'angle de rotation  $\vartheta$ :

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{R} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \quad (5)$$

### Exercice Série-2.1:

1a)  $\mathbf{R}(\vartheta=0) = ?$

1b)  $\mathbf{R}(-\vartheta) = ?$

1c)  $\mathbf{R}(\vartheta)^{-1} = ? \mathbf{R}^T$  (6)

1d)  $\mathbf{v}_3 = \mathbf{R}(\vartheta_2)\mathbf{v}_2 = \mathbf{R}(\vartheta_2)\mathbf{R}(\vartheta_1)\mathbf{v}_1 = \mathbf{R}(\vartheta)\mathbf{v}_1 ?$  (7)

1e)  $\mathbf{R}(\vartheta_2)\mathbf{R}(\vartheta_1) = \mathbf{R}(\vartheta_1)\mathbf{R}(\vartheta_2) ?$

En transformant les deux vecteurs  $[1,0]^T$  et  $[0,1]^T$ , on constate que les colonnes de  $\mathbf{R}$  forment elles-mêmes un repère orthogonal tourné de  $\vartheta$  par rapport au repère cartésien d'origine. La condition que le volume (ou, dans le cas 2D, la surface) de l'objet transformé reste constante est liée à la valeur du déterminant  $|\mathbf{R}| = 1$ , l'orthogonalité géométrique du nouveau repère est liée à l'orthogonalité des colonnes ( $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ ). Ces conditions impliquent  $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$  (matrices orthogonales).

Les petits exercices illustrent les concepts d'identité, d'inversion, d'orthogonalité, d'enchaînement et de commutativité pour le cas de rotations autour de l'origine. Ces concepts sont nécessaires pour introduire les rotations autour de centres arbitraires. Dans ce but, des mouvements combinés composés de rotations et de translations sont introduits.

### 2.1.3 Combinaison de rotations et translations 2D; représentation homogène

Un **mouvement général dans le plan** peut être décrit par une combinaison de translations et de rotations autour de l'origine. Un enchaînement de translations et de rotations se heurte au fait que la translation est une addition vectorielle tandis que la rotation est une multiplication matricielle.

Il serait très souhaitable, de pouvoir intégrer rotation et translation dans une seule opération afin de pouvoir les enchaîner. Les **matrices homogènes** permettent cette intégration de la translation à la matrice de transformation. Le prix à payer est d'augmenter l'ordre de la matrice de un. Le vecteur de translation  $\mathbf{t}$  s'ajoute à droite et une ligne  $[0 \ 0 \ 1]$  en bas:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & t_x \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Ceci est la matrice **homogène** des transformations dans un espace à deux dimensions (un plan), la troisième ligne n'a aucune signification spatiale (pas d'axe z pour le moment!!). Cette matrice agit sur un **vecteur homogène** dans un espace à deux dimensions qui se compose de ses deux coordonnées plus un "**facteur d'échelle**" égale à un:

$$\mathbf{v} = [x, y, 1]^T$$

Pour retrouver les vecteurs familiers, il suffit de supprimer le dernier élément. Les matrices et vecteurs homogènes pour **trois dimensions** contiennent **quatre éléments**.

**Exemple d'utilisation** : Imaginons un mouvement du point  $\mathbf{v}_1$  en deux phases composé de

- 1.) rotation (toujours autour de l'origine O pour toute cette section 2.1.2) d'un angle  $\vartheta_1$
- 2.) translation de  $\mathbf{t}_1$

$$\text{pour obtenir } \mathbf{v}_2 = \mathbf{R}(\vartheta_1) \mathbf{v}_1 + \mathbf{t}_1$$

Appliquons de nouveau un mouvement composé de deux phases ( $\mathbf{R}(\vartheta_2)$ ,  $\mathbf{t}_2$ ) à  $\mathbf{v}_2$  :

- 3.) rotation autour de l'origine O d'un angle  $\vartheta_2$
- 4.) translation de  $\mathbf{t}_2$

pour finalement obtenir  $\mathbf{v}_3$  :

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{R}(\vartheta_2) \mathbf{v}_2 + \mathbf{t}_2 = \mathbf{R}(\vartheta_2) \mathbf{R}(\vartheta_1) \mathbf{v}_1 + \mathbf{R}(\vartheta_2) \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 \quad (9)$$

Ces quatre mouvements qui se suivent ( $\mathbf{R}(\vartheta_1)$ ,  $\mathbf{t}_1$ ,  $\mathbf{R}(\vartheta_2)$ ,  $\mathbf{t}_2$ ) peuvent s'exprimer dans une seule matrice homogène qui se calcule simplement par produit matriciel.

**Exercice** : Effectuer cette opération avec l'aide de deux matrices homogènes. Calculer la matrice homogène de l'opération complète par produit matriciel. Ce résultat contiendra la translation totale et la rotation totale équivalente aux quatre mouvements.

Nous constatons que la **rotation**  $\mathbf{R}(\vartheta_2) \mathbf{R}(\vartheta_1)$  est équivalente à  $\mathbf{R}(\vartheta_1 + \vartheta_2)$  et la **translation** totale est égale à  $\mathbf{R}(\vartheta_2) \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2$  :

$$\mathbf{R}(\text{tot}) = \mathbf{R}(\vartheta_1 + \vartheta_2) \quad \text{et} \quad \mathbf{t}(\text{tot}) = \mathbf{R}(\vartheta_2) \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2$$

**Exercice série-2-2**: Donnez les matrices homogènes des mouvements suivants:

- 3a) Translation pure? Rotation pure? Identité?
- 3b) Translation de  $\mathbf{t}$  puis rotation de  $\vartheta$ ?
- 3c) Opération inverse de 3b), c'est à dire rotation de  $-\vartheta$  puis translation de  $-\mathbf{t}$ ?

### 2.1.4 Rotations 2D autour d'un point arbitraire

Ces préparations nous permettent d'aborder le mouvement général dans le plan, la rotation autour d'un point  $\mathbf{p}$  arbitraire. Ceci est simplement réalisé en effectuant

- 1) une translation de  $\mathbf{p}$  vers l'origine  $\mathbf{t}_1 = -\mathbf{p}$
- 2) une rotation autour de l'origine O comme avant
- 3) une translation ramenant le centre de rotation à  $\mathbf{p}$   $\mathbf{t}_2 = \mathbf{p}$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -p_x \\ 0 & 1 & -p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p} - \mathbf{R}\mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Cette expression nous montre qu'une rotation autour du point  $\mathbf{p}$  est équivalente à une rotation autour de l'origine O suivi d'une translation  $\mathbf{p} - \mathbf{R}\mathbf{p}$ . A l'inverse, toute combinaison de translation et rotation peut être exprimée en rotation pure autour d'un centre de rotation  $\mathbf{p}$ .

Exercice série-2.4:

4a) Le paragraphe précédent est-il entièrement correct?

4b) Trouver le centre de rotation 1.) par un dessin, 2.) à l'aide de la formule précédente 3.) en cherchant un vecteur propre de la matrice homogène.

4c) Trouver la matrice homogène qui décrit une rotation de  $60^\circ$  autour d'O

4d) Trouver la matrice homogène qui décrit une translation de un en direction  $x$ , puis une rotation de  $60^\circ$  autour d'O

4e) Trouver la matrice homogène qui décrit une rotation de  $60^\circ$  autour de  $[1,1]^T$ .

4.f) Un objet avec deux points  $\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1$  est déplacé de sorte que ces points se retrouvent aux locations  $\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2$ .

$$\mathbf{v}_1 = [1,0]^T, \mathbf{w}_1 = [1,1]^T, \quad \mathbf{v}_2 = 0.5 [1-\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}]^T, \mathbf{w}_2 = 0.5 [2-\sqrt{3}, 1]^T$$

Trouver la matrice homogène,  $\mathcal{G}, \mathbf{p}$  (solution graphique) qui décrit ce déplacement.

## 2.1.5 Rotations 3D autour de l'origine, Axe de rotation et Quaternions

### 2.1.5.1 Matrices de rotation : cas générale

Dans trois dimensions, il ne suffit plus d'indiquer un angle et un centre de rotation. Il nous faut également définir la **direction de l'axe** autour de laquelle la rotation est à effectuer. Le pas à franchir entre deux et trois dimensions est considérable, surtout au niveau de l'imagination et du sens géométrique.

Le nombre de paramètres de l'orientation d'un objet dans l'espace est trois: La direction de l'axe est définie par deux paramètres seulement, par exemple longitude et latitude en coordonnées sphérique. Le troisième paramètre est l'angle de rotation autour de l'axe. Si l'axe de rotation est donnée par un vecteur (trois paramètres), la longueur de ce vecteur est redondante. Nous avons donc quatre paramètres, le vecteur de l'axe et l'angle de rotation, et une contrainte, par exemple limitant la longueur du vecteur à 1. Nous retrouvons ainsi les trois paramètres libres de l'orientation spatiale.

Il existe plusieurs façons de choisir ces trois paramètres de l'orientation spatiale. En général, il s'agit d'angles de rotation autour de trois axes définis en fonction de l'application (axes mobiles, tangage, roulis, lacet, angles d'Euler, axes fixes  $x, y, z$ , etc.). Nous verrons plusieurs exemples ultérieurement.

Nous avons déjà vu une méthode (redondante) à définir la rotation dans le plan: la matrice de rotation  $\mathbf{R}(\mathcal{G})$  compte quatre éléments, mais seulement un paramètre libre, l'angle  $\mathcal{G}$  lui-même, puisque l'axe de rotation est toujours la normale au plan. Les éléments de la matrice de rotation sont appelés **cosinus directeurs**. Une matrice de cosinus directeurs tridimensionnelle contient 9 éléments. Nous allons maintenant trouver cette matrice.

Pour faciliter la compréhension, nous commençons avec de simples vecteurs et matrices à trois dimensions et passerons ensuite (section 2.1.6) à la représentation homogène. Cette dernière sera caractérisée par des vecteurs de quatre éléments et des matrices 4 fois 4. Donc, dans cette section-ci (2.1.5), aucun vecteur et aucune matrice n'est en représentation homogène, les trois éléments sont maintenant les trois coordonnées spatiales cartésiennes  $x, y$  et  $z$ .

Nous connaissons en principe déjà une matrice de rotation spéciale dans l'espace 3D: Celle des rotations autour de l'axe  $z$ ,  $R(\vartheta, \mathbf{v}_z)$ . La coordonnée  $z$  reste insensible à une telle rotation. Ceci permet de trouver  $R(\vartheta, \mathbf{v}_z)$ . Dans cette notation, l'axe de rotation est donnée par le vecteur  $\mathbf{v}_z = [0 \ 0 \ 1]^T$  et l'angle de rotation autour de cet axe est  $\vartheta$ .

**Exercice série-3.1** Trouver les matrices de rotations de base autour des trois axes  $x, y, z$  ;

Solutions :

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_y = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & 0 & \sin \vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Voir slides pour l'approche de calcul.

**Exercice série-3.2** Les deux séquences suivantes sont-elles équivalentes?

- rotation de  $90^\circ$  autour de  $z$ , puis rotation de  $90^\circ$  autour de  $y$
- rotation de  $90^\circ$  autour de  $y$ , puis rotation de  $90^\circ$  autour de  $z$

Trouver la solution :

- Par essai
- Par multiplication matricielle. Donnez les matrices de rotation de a) et de b)

### 2.1.5.2 Rotation autour d'un axe quelconque

**Exercice série-3.3** Trouvez les axes et les angles de rotation de a) et de b) de l'exercice 3.2 à l'aide du dessin suivant:

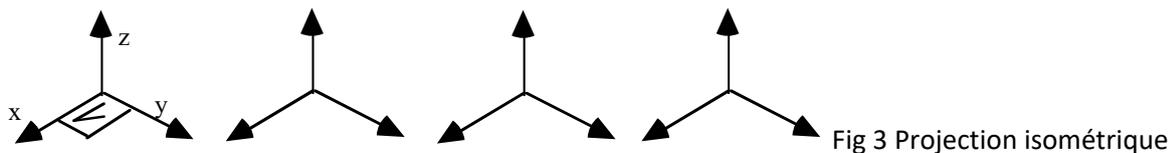


Fig 3 Projection isométrique

Cet exemple illustre que tout changement d'orientation spatiale peut être vu de deux façons équivalentes :

- Composé de plusieurs rotations autour de **plusieurs axes spéciaux** (par ex. axes du repère  $x, y, z$  ou axes définis par rapport au véhicule: tangage roulis lacet, angles cardaniques, angles d'Euler etc. Dans de tels cas, avec des axes en mouvement, le traitement peut devenir lourd)
- Une unique rotation autour d'un seul axe

Il n'est pas toujours facile de deviner la direction de cet axe. Mathématiquement, on peut trouver cet axe  $\mathbf{v}$  par exemple par la condition qu'un point sur l'axe ne change pas de position:  $\mathbf{R}\mathbf{v} = \mathbf{v}$  (vecteur propre).

Lequel des trois vecteurs propres faut-il choisir ? Exemple de résultat de calcul de MATLAB:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
 La commande `[V,d] = eig(A)` rends les vecteurs propres dans la matrice V et les valeurs propres sur la diagonale de la matrice d

$$V = \begin{bmatrix} -0.05 - 0.57i & -0.05 + 0.57i & 0.57 \\ -0.47 + 0.32i & -0.47 - 0.32i & 0.57 \\ 0.52 + 0.24i & 0.52 - 0.24i & 0.57 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} -0.50 + 0.86i & 0 & 0 \\ 0 & -0.50 - 0.86i & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

**Exercice série-3.4** Trouvez la matrice de cosinus directeurs d'une rotation autour d'un axe  $\mathbf{k}$  d'un angle  $\theta$  qui se trouve dans le plan  $x=0$  et qui est incliné d'un angle  $\phi$  par rapport à l'axe  $z$  (Fig 4):

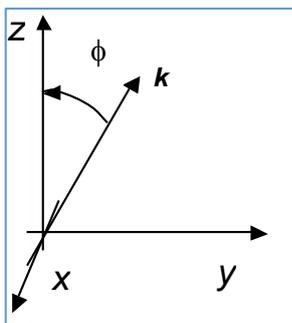


Fig. 4 Trouvez la matrice d'une rotation autour de l'axe  $\mathbf{w}$

Une méthode facilement compréhensible de trouver l'angle de rotation une fois que l'axe est trouvée consiste à

- 1.) construire un vecteur  $\mathbf{k}$  perpendiculaire à l'axe
- 2.) transformer ce vecteur  $\mathbf{k}_2 = \mathbf{R}\mathbf{k}$
- 3.) déterminer l'angle entre  $\mathbf{k}_2$  et  $\mathbf{k}$ .

Les formules (10) et (11) plus complètes pour passer de la représentation (axe/angle) à la matrice de cosinus directeurs et vice et versa sont données dans la littérature, par ex. [J. J Craig, Introduction to Robotics, Addison Wesley 1989, p 52] et dérivées par ex. dans [Dombre & Khalil: Modélisation et commande des robots, Hermès, 1988, pp 53]. Les voici:

Pour une rotation d'un angle  $\vartheta$  autour de l'axe  $[x, y, z]^T$  avec  $\| [x, y, z]^T \| = 1$  on obtient la matrice

$$(1 - \cos \vartheta) \begin{bmatrix} xx & xy & xz \\ xy & yy & yz \\ xz & yz & zz \end{bmatrix} + \cos \vartheta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \sin \vartheta \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

La formule suivante nous permet l'inverse, donc de trouver l'axe de rotation et l'angle à partir d'une matrice  $R$ , et ce plus directement que par le vecteur propre:

$$\text{avec } R = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix} \text{ on obtient l'axe } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2 \sin(\vartheta)} \begin{bmatrix} f - h \\ g - c \\ b - d \end{bmatrix} \text{ et l'angle } \vartheta$$

$$\begin{aligned} \cos(\vartheta) &= \frac{1}{2}(\text{tr}(R) - 1) \\ \sin(\vartheta) &= \frac{1}{2} \sqrt{(f - h)^2 + (g - c)^2 + (b - d)^2} \end{aligned} \quad (11)$$

Ces expressions sont non-unique: Le signe de la racine peut être positif ou négatif. Pire, pour  $\vartheta=0$  l'axe n'est pas défini. Cela pose des problèmes numériques dans la réalisation du contrôle.

Ces deux inconvénients disparaissent de façon élégante en employant les **paramètres d'Euler** ou **quaternions** ou paramètres d'Olinde-Rodriguez. Ces trois expressions sont synonymes dans notre contexte. Les **angles d'Euler** sont d'autres paramètres, ils seront introduit à la section 2.1.8. Les paramètres d'Euler ou quaternions sont employés en robotique industrielle:

### 2.1.5.3 Quaternions : Paramètres d'Euler, paramètres d'Olinde-Rodriguez

Les quaternions sont une **généralisation des nombres complexes**. Ils ont été découvert par Hamilton après de longs et infructueux essais d'étendre l'interprétation géométrique des nombres complexes dans le plan (Argand, 1768-1822, mathématicien genevois) aux trois dimensions spatiales. L'intuition géniale de Hamilton consiste en deux astuces:

- 1.) Il n'y aura pas deux, mais trois parties imaginaires, en plus de la partie réelle.
- 2.) Il faut abandonner la commutativité de la multiplication.

Ces nouveaux nombres "hypercomplexes", dorénavant appelés quaternions, contiennent une partie réelle scalaire  $\lambda_0$  et trois parties imaginaires  $[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]^T$  qui sont interprétées comme partie vectorielle  $\underline{\lambda}$ .

le quaternion Q est donc le quadruple

$$Q = \{ \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \} = \{ \lambda_0, \underline{\lambda} \} \quad (11a)$$

La direction de l'axe de rotation  $[x, y, z]^T$  est donnée par le vecteur  $\underline{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]^T$ .

L'angle de rotation  $\vartheta$  est introduit de la façon suivante dans le quaternion Q:

$$\lambda_0 = \cos(\vartheta/2) \quad \text{et} \quad \underline{\lambda} = \sin(\vartheta/2) [x, y, z]^T, \quad ||x, y, z|| = 1 \quad (11b)$$

Les rotations sont donc représentés par des quaternions **unitaires**:

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1 \quad (11c)$$

Les règles de multiplication des quaternions sont une généralisation des règles de multiplication des nombres complexes:

$$Q = \{ \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \} = \lambda_0 + i \lambda_1 + j \lambda_2 + k \lambda_3 \quad (11d)$$

$$\text{avec } i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \quad (11e)$$

$$\text{et } ij = k = -ji \quad jk = i = -kj \quad ki = j = -ik \quad (11f)$$

Notez la **multiplication non-commutative** ! (William Rowan Hamilton, Dublin, 1843)

Ces règles mènent au produit

$$Q_M Q_L = \{ \mu_0, \underline{\mu} \} \{ \lambda_0, \underline{\lambda} \} = \{ \mu_0 \lambda_0 - \underline{\mu}^T \underline{\lambda}, \mu_0 \underline{\lambda} + \lambda_0 \underline{\mu} + \underline{\mu} \times \underline{\lambda} \} \quad (11g)$$

Ce produit définit l'enchaînement des rotations  $Q_L$  puis  $Q_M$ .

**Exercice série-3.5** Trouvez les solutions de l'exercice 7 avec des quaternions.

### Passage des quaternions aux matrices de rotations

Le passage du quaternion aux cosinus directeurs et vice-versa est: (11h)

$$R = \begin{bmatrix} 2(\lambda_0^2 + \lambda_1^2) - 1 & 2(\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_0 \lambda_3) & 2(\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_0 \lambda_2) \\ 2(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_0 \lambda_3) & 2(\lambda_0^2 + \lambda_2^2) - 1 & 2(\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_1) \\ 2(\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_2) & 2(\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_0 \lambda_1) & 2(\lambda_0^2 + \lambda_3^2) - 1 \end{bmatrix}$$

et

$$\lambda_0 = \frac{1}{2} \sqrt{r_{11} + r_{22} + r_{33} + 1} \quad \underline{\lambda} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \text{sgn}(r_{32} - r_{23}) \sqrt{r_{11} - r_{22} - r_{33} + 1} \\ \text{sgn}(r_{13} - r_{31}) \sqrt{r_{22} - r_{11} - r_{33} + 1} \\ \text{sgn}(r_{21} - r_{12}) \sqrt{r_{33} - r_{22} - r_{11} + 1} \end{bmatrix} \quad (12)$$

### 2.1.6 Translations et rotations 3D en représentation homogène

Ce pas est parfaitement analogue au cas 2D. Le vecteur en représentation homogène se compose simplement en ajoutant un facteur d'échelle "1" qui n'a aucune signification de "quatrième dimension" dans le sens géométrique. La matrice de transformation complète se compose de la matrice de rotation  $R$  et du vecteur de translation  $\underline{t}$  plus une ligne [0 0 0 1]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3 \times 3} & \mathbf{t}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Une transformation combinée (rotation **puis** translation) se calcule en multipliant un vecteur de départ homogène par cette matrice de transformation pour obtenir le vecteur transformé, exactement comme dans le cas 2D. La transformation puis la rotation se trouve en multipliant les matrices appropriées entre elles, avec toujours **la matrice du premier changement de position à droite**.

Une rotation autour d'un axe ne passant pas par l'origine se compose de la même façon que dans le cas 2D:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{p}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p} - \mathbf{R}\mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

avec le vecteur  $\mathbf{p}$  de l'origine  $O$  à un point quelconque **sur l'axe de rotation**

Une différence importante avec le cas 2D est à noter: Le mouvement général en 3D est équivalent à une rotation autour d'un axe **plus une translation en direction de cet axe**. Cette combinaison s'appelle une vis (a screw, eine Schraube) pour des raisons évidentes.

**Exercice série-3.6:** Trouver la matrice de transformation homogène menant de la forme  $\{A, B, C\}$  vers  $\{A', B', C'\}$ .

$$A = [1 \ 0 \ 0]^T, B = [0 \ 0 \ 0]^T \text{ et } C = [0 \ 1 \ 0]^T \text{ vers } A' = [1 \ 0 \ 1]^T, B' = [1 \ -1 \ 1]^T \text{ et } C = [0 \ -1 \ 1]^T$$

Quels sont l'axe, l'angle de rotation, la translation en direction de l'axe? La solution se trouve facilement par un petit dessin. Imaginez les trois points liés à un solide.

### 2.1.7 Variables robots, modèle géométrique direct

Enfin, nous pouvons passer à l'application de ces transformations. Concrètement, il s'agit de décrire la position et l'orientation d'un objet manipulé par un robot. Le robot est commandé par des **variables articulaires**, c'est à dire en lui envoyant des **consignes angulaires** pour ses moteurs. Pour ces variables importantes nous utiliserons (comme dans plusieurs ouvrages en robotique) le symbole  $\theta$  (théta majuscule; Le symbole "q" est également souvent utilisé dans ce contexte.

Le **modèle géométrique direct (MGD)** n'est autre que les formules donnant position et orientation de l'objet manipulé en fonction de ces variables  $\theta$ . Le nombre de variables  $\theta$  correspond au nombre de degrés de liberté du robot. Certaines de ces variables peuvent être des **variables linéaires** et non angulaires, selon la construction du robot. Ces mêmes variables sont souvent également appelées **variables robots**.

Comme exemple, nous allons dériver le modèle géométrique direct (MGD) d'un robot industriel extrêmement répandu, le **SCARA** (Selective Compliance Assembly Robot Arm) présenté au chapitre 1. Le modèle géométrique de ce robot est particulièrement simple pour deux raisons:

Premièrement, il ne comprends que quatre degrés de liberté. Judicieusement choisis, ces degrés de liberté permettent de couvrir un très vaste segment des tâches d'assemblage.

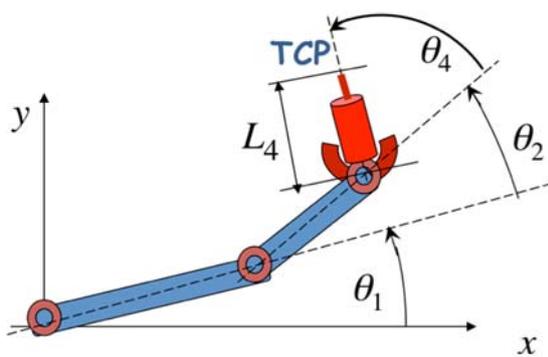
Deuxièmement, les trois degrés de liberté angulaires sont tous autour d'un axe vertical, les mouvements hors du plan x-y se limitent à la seule translation verticale.

Ces conditions permettent de traiter la partie difficile, les rotations, du MGD du SCARA dans le plan x-y uniquement.

Le premier pas dans l'établissement de tout MGD consiste dans la définition

- des variables articulaires (variables robot)  $\theta_i$ ,
- de leurs **positions de référence**  $\theta_i = 0$  ainsi que
- des paramètres géométriques du robots.

Pour le SCARA, nous définissons donc  $\theta_1$  comme l'angle à la base du robot,  $\theta_2$  comme l'angle entre le premier et le second membre,  $\theta_3$  comme **déplacement linéaire** en direction de l'axe verticale z et  $\theta_4$  comme l'angle au poignet. Notez bien que les variables articulaires sont définis **entre les membres** et non pas par rapport au référentiel fixe. Ceci est très important en vue de l'utilisation pratique des variables (consignes angulaires des moteurs).



**Fig. 8** Définition des variables robot  $\theta_i$  pour le SCARA.

$\theta_3$  est le déplacement vertical entre le bras  $L_2$  et le préhenseur. Paramètres du robot:  $L_1$  et  $L_2$

Positions de référence:  $\theta_i = 0$

TCP = Tool Center Point,

$L_4$  longueur de l'outil

Cette façon de procéder à partir de la base (qui serait donc membre zéro) est également standard, au moins dans la plupart d'ouvrages théoriques sur la robotique, bien que l'on soit en principe libre de définir ces variables de façon différente.

Le MGD doit décrire position et orientation de l'objet manipulé, donc permettre de trouver la position de n'importe quel point arbitraire  $\mathbf{p}$  de cet objet en fonction des  $\theta_j$ . Il consiste donc en la matrice de transformation  $\mathbf{K}_{\text{MGD}}(\theta_j)$  donnant la position de ce point en fonction des variables articulaires  $\theta_j$ . Le point  $\mathbf{P}$  sur l'objet (l'outil ou le préhenseur) est lui-même défini en **position de référence**  $\theta_j = 0$ .

$$\mathbf{P}(\theta_j) = \mathbf{K}_{\text{MGD}}(\theta_j) \mathbf{P}(\theta_j = 0) \quad (14)$$

Il existe deux possibilités de définir  $\mathbf{K}_{\text{MGD}}(\theta_j)$ : (utilisant  $c_1 = \cos\theta_1$ ,  $s_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$  etc.) (15)

### Exercice (sur slides):

a.)  $\mathbf{K}_{\text{MGD}}(\theta_j) = (\text{rot } \theta_1 \text{ autour de } [0, 0]^T) \text{ puis } (\text{rot } \theta_2 \text{ autour de } [L_1 c_1, L_1 s_1]^T) \text{ puis } (\text{rot } \theta_4 \text{ autour de } [L_1 c_1 + L_2 c_{12}, \quad ]^T)$

b.)  $\mathbf{K}_{\text{MGD}}(\theta_j) = (\text{rot } \theta_4 \text{ autour de } [ \quad ]^T) \text{ puis } (\text{rot } \theta_2 \text{ autour de } [ \quad ]^T) \text{ puis } (\text{rot } \theta_1 \text{ autour de } [ \quad ]^T)$

c.) Calculez  $\mathbf{K}_{\text{MGD}}(\theta_j)$  du SCARA. Quelle méthode, sera plus simple? Où vient la matrice de rotation autour de  $\theta_1$ , a gauche ou a droite dans la chaîne de multiplications?

**Exercice (sur slides):** Un point de travail poignet se trouve à une distance horizontale  $L_4$  de l'axe de  $\theta_4$  avec  $\mathbf{P}(\theta_j = 0) = [L_1 + L_2 + L_4, 0, 0, 1]^T$ . Donnez la position de ce point en fonction des variables robot  $\mathbf{P}(\theta_j)$ .

La matrice ainsi trouvée contient une description complète de la géométrie du SCARA. Les équations définies par cette matrice sont le modèle géométrique direct. On les appelle parfois "équations cinématiques" du robot. Dans le cas du SCARA, elles peuvent immédiatement être obtenues par des simples équations trigonométriques. Mais la méthode appliquée ici nous permet de trouver ces équations de la même façon systématique dans des cas moins évidents comme par exemple le suivant.

Nous appliquons maintenant cette méthode pour trouver le MGD d'un robot industriel très répandu et classique, le **PUMA** (Programmable Universal Manipulator Arm, Stäubli RX) présenté au chapitre 1.

Le **premier pas** consiste donc à définir les **variables robots**, ( $\theta_i$  ou  $q_i$ ), s'en suit la position de référence et les paramètres du robot.

Ceci doit se faire sur des dessins. Nous traitons directement le PUMA avec un poignet 3R complet à trois degrés de liberté. Ces trois d.d.l. sont à ajouter au trois d.d.l. de base du PUMA qui est par conséquent un robot "complet" à 6 d.d.l.

Les variables robot (ou articulaires) 1–3 se retrouvent sur la figure 9, les variables 4-6 sont celles du poignet qui se retrouvent sur la figure 10 pour mieux voir les détails.

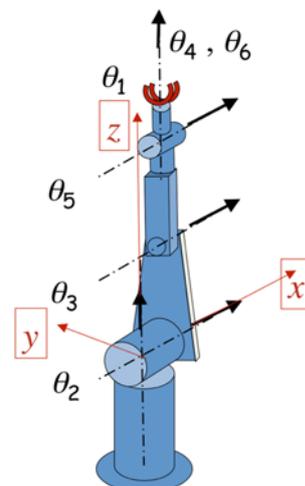


Fig. 9 Le robot PUMA et sa position de référence

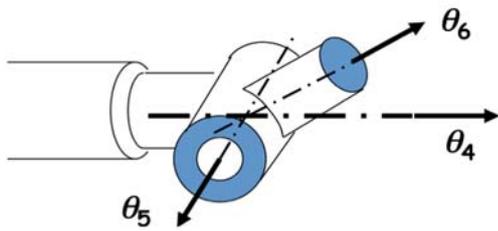


Fig. 10 Poignet à trois axes concurrents

Les paramètres du robot sont la longueur  $L_2$  entre l'axe 2 et l'axe 3 ainsi que les distances  $D_3$  et  $D_4$ . L'utilisation de symboles différents ( $L$  ou  $D$  en l'occurrence) indique une différence fondamentale de ces paramètres: Alors que les paramètres " $L$ " désignent une distance **entre deux axes** consécutifs, les paramètres " $D$ " indiquent une distance **sur les axes** eux-mêmes. Les premiers sont appelés "Link Length" en anglais et les seconds "Joint Offset".

"Joint" est le mot anglais pour "articulation", les « Joint Offset » sont chacun lié à une articulation particulière tandis que les "Link Length" font la transition d'une articulation à la prochaine.

Les paramètres "**Link Length**", "**Joint Offset**" ainsi que l'angle  $\alpha$  entre deux axes consécutifs ("**twist angle**") **définissent entièrement la géométrie** d'un robot. Ces paramètres sont appelés paramètres de "**Denavit Hartenberg**" d'après une publication qui les introduisit. Ils sont traités en grand détail dans beaucoup d'ouvrages sur la robotique.

Dans le cas de déplacements linéaires (tel par exemple le mouvement vertical du SCARA), le joint offset peut devenir une des variables robot tandis qu'un angle d'articulation (**joint angle**) peut devenir paramètre fixe dans certains cas spéciaux. La définition du twist angle (toujours fixe) pour des axes non-concurrents se fait autour de la droite la plus courte perpendiculaire aux deux axes.

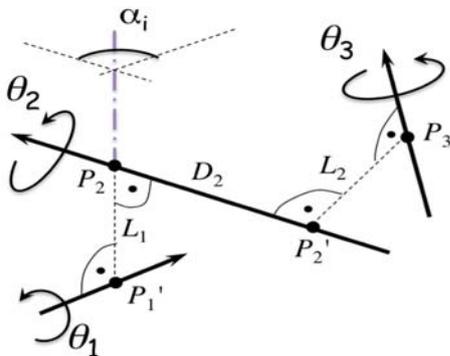


Fig. 11 Les quatre paramètres Denavit-Hartenberg (Link length  $L$ , Joint angle  $\theta$ , Joint offset  $D$ , Twist angle  $\alpha$ ) dans le cas général. Une flèche marquée  $\theta$  indique une articulation du robot. La variable en est soit l'angle de rotation  $\theta$  autour de l'axe  $J$  soit le déplacement linéaire  $D$  le long de l'axe.

Revenons au MGD du PUMA. Le dessin nous indique les matrices de transformation qui entrent en jeu. Comme nous avons vu dans l'exercice 9, il convient de commencer par la rotation  $\theta_6$  et de poursuivre les opérations pour aboutir avec la rotation  $\theta_1$ . Par conséquent les matrices s'inscrivent dans l'ordre inverse dans la chaîne de multiplications. Le grand avantage de cette démarche est que les axes de rotation sont ceux de la position de référence. Nous avons donc de gauche à droite:

- 1.) rotation de  $\theta_1$  autour de l'axe  $z$ .
- 2.) rotation de  $\theta_2$  autour de l'axe  $x$
- 3.) rotation de  $\theta_3$  autour de l'axe  $x$  décalé de  $L_2$  en direction de  $z$ .
- 4.) rotation de  $\theta_4$  autour de l'axe  $z$  décalé de  $D_3$  en direction de  $x$ .
- 5.) rotation de  $\theta_5$  autour de l'axe  $x$  décalé de  $(L_2+D_4)$  en direction de  $z$ .
- 6.) rotation de  $\theta_6$  autour de l'axe  $z$  décalé de  $D_3$  en direction de  $x$ .

Avec les abréviations  $s_1 = \sin \theta_1$ ,  $c_1 = \cos \theta_1$  et  $v_1 = \text{versine}(\theta_1) = 1 - \cos \theta_1$  on trouve les matrices suivantes:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p} - \mathbf{R}\mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & D_3 v_6 \\ s_6 & c_6 & 0 & -D_3 s_6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K}_6$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p} - \mathbf{R}\mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_5 & -s_5 & L_{24} s_5 \\ 0 & s_5 & c_5 & L_{24} v_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K}_5$$

... etc .

Le MGD du PUMA est donc  $K_{\text{MGD}}(\theta_i) = K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6$

Ces expressions peuvent être calculées analytiquement une fois pour être programmées dans le processeur de la commande du robot. Elles sont en général trop compliquées pour aider à la compréhension concrète du comportement du robot. L'analyse d'une certaine partie du MGD du PUMA nous donnera une idée de cette complexité tout en nous fournissant la description mathématique d'un sous-système robotique important: Il s'agit du poignet.

### 2.1.8 Poignets de robot, angles d'Euler, tangage, roulis, lacet

La figure 10 représente un poignet de robot typique (poignet sphérique). Il est caractérisé par trois axes concurrents (qui ont une intersection commune). La particularité de ce poignet réside dans la définition des positions de référence des angles  $\theta_4 \theta_5 \theta_6$ . Ces positions sont telles que les axes de rotation de  $\theta_4$  et de  $\theta_6$  coïncident pour  $\theta_5 = 0$  (position de référence).

Dans cette section, nous discutons uniquement les rotations sans nous préoccuper des translations. Nous déplaçons donc l'origine du référentiel au point d'intersection des axes du poignet. Ces axes forment un référentiel mobile. Les deux façons équivalentes de décrire l'orientation définie par le poignet sont:

a) Rotation  $\theta_4$  autour de l'axe z, puis rotation  $\theta_5$  autour de l'axe x' (formant un angle de  $\theta_4$  avec l'axe x) puis rotation  $\theta_6$  autour du nouvel axe z' (qui forme un angle de  $\theta_5$  avec l'axe z fixe).

b) Rotation  $\theta_6$  autour de l'axe z, puis rotation  $\theta_5$  autour de l'axe x puis rotation  $\theta_4$  autour de l'axe z (toujours fixe).

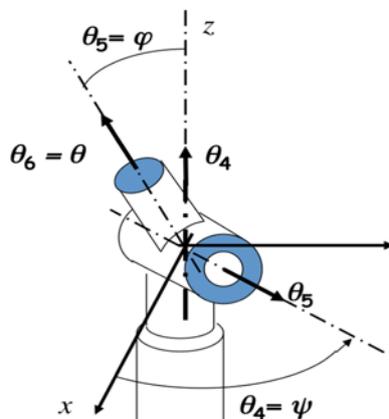


Fig. 12 Angles d'Euler (zxx)

Comme précédemment, la façon b) est de loin plus simple, dans la méthode a) il nous faudrait d'abord calculer les rotations autour des axes avec la formule (10). On obtient donc :

$$\mathbf{R}(\text{poignet}) = \mathbf{R}_4 \mathbf{R}_5 \mathbf{R}_6 \quad (15)$$

Ces angles sont appelés angle d'Euler (z,x,z). Ils sont caractérisés par la coïncidence de l'axe de la première et de la dernière rotation en position de référence. En choisissant une position de référence différente de  $\pi/2$  pour le deuxième angle de rotation, on obtient les angles d'un poignet cardanique qui est caractérisé par trois axes mutuellement perpendiculaires en position de référence. Ces angles sont aussi nommés tangage-roulis-lacet (roll pitch yaw) selon le contexte.

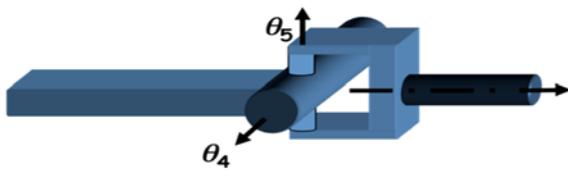


Fig. 13  
Poignet sphérique en configuration dite  
« cardanique »

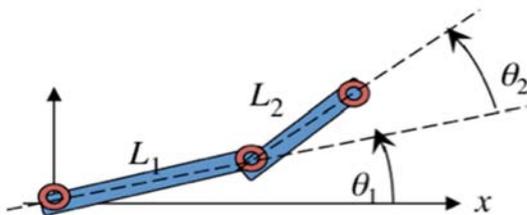
Tangage (pitch) :  $\Theta_4$

Roulis (roll)  $\Theta_6$

Lacet (yaw)  $\Theta_5$

### 2.1.9 Modèle géométrique inverse, postures

Le MGD donne la position et l'orientation en fonction des variables robot. En pratique nous sommes confrontés plus souvent au problème inverse, c'est à dire de trouver les variables robot nécessaires pour atteindre une position et une orientation données. Ces équations sont appelées "modèle géométrique inverse" (MGI, inverse kinematics).



Comme premier exemple, nous traitons le manipulateur planaire simple à deux membres. Il s'agit donc de trouver les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  à partir d'une position  $x, y$  donnée. Le MGD est

$$x = L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y = L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

Pour trouver la solution, nous devons d'abord appliquer les équations trigonométriques (2). Utilisant les symboles  $c_1 = \cos \theta_1$  et  $s_1 = \sin \theta_1$  etc., on obtient

$$x = L_1 c_1 + L_2 c_1 c_2 - L_2 s_1 s_2 \quad (a)$$

$$y = L_1 s_1 + L_2 s_1 c_2 + L_2 c_1 s_2 \quad (b)$$

$$c_1^2 + s_1^2 = 1 \quad (c)$$

$$c_2^2 + s_2^2 = 1 \quad (d)$$

S'agissant de quatre équations quadratiques, nous pouvons nous attendre à des solutions multiples. La somme des carrés de (a) et (b) nous donne la relation du cosinus d'un triangle bien connue:

$(x^2 + y^2) = L_1^2 + L_2^2 + 2 L_1 L_2 c_2$ , qui nous donne  $c_2$ , et, avec (d), deux solutions pour  $s_2$ . Les inconnues  $s_1$  et  $c_1$  se trouvent avec des sommes pondérées des expressions (a) et (b) :

$$x c_1 + y s_1 \quad \text{et} \quad -x s_1 + y c_1.$$

Dans le cas du robot puma, le MGI des trois premiers d.d.l. consistent en deux chaînes identiques à l'exemple précédent, avec deux solutions pour chaque paire  $(\theta_1, \theta_2)$  et  $(\theta_2, \theta_3)$ . En combinaison, cela donne donc quatre solutions distinctes. Pratiquement, cela signifie que les trois premiers bras de la chaîne cinématique de la base au poignet peuvent atteindre un point donné de quatre façons différentes (avec, chaque fois, des orientations différentes). On appelle de telles solutions les "postures" du robot. (Fig. 14)

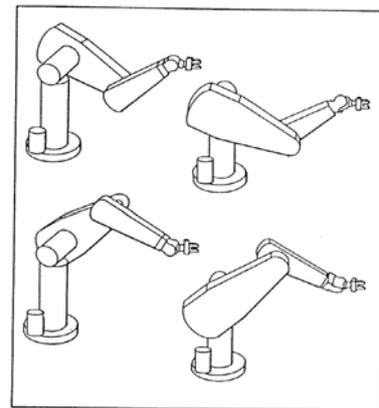


Fig. 14 Les quatre postures des premiers trois d.d.l. du PUMA

A cela, il faut ajouter les postures du poignet. (Lesquelles? Combien de solutions du MGI du PUMA?)  
 Le nombre de postures d'un robot général est inconnu.

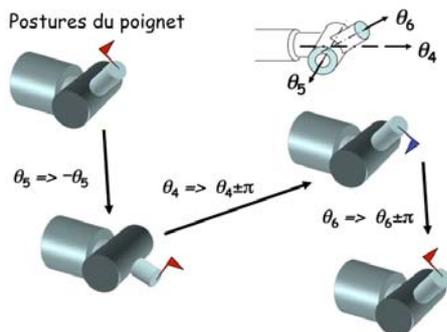


Fig. 15 Postures d'un poignet sphérique

**2.1.10 Récapitulation, robots parallèles :**

Le MGD a une seule solution: Pour des variables articulaires données, la position du robot est définie.  
 Pour le MGI, il peut y avoir plusieurs solutions (par ex. Fig. 14).

---

Il se trouve que les exemples choisis sont tous des **robots sériels** (Puma, SCARA). Dans le cas de **robots parallèles**, nous trouvons **juste le contraire!** Le MGD a plusieurs solutions (appelées "contorsions" du robot), le MGI en a une seule.

---

On peut facilement se convaincre de cela avec un simple robot parallèle à 2 ddl dans le plan :

Le MGI du robot parallèle, par contre, n'a qu'une seule solution, comme on peut s'en rendre compte avec la même structure parallèle planaire : Si la position et l'orientation de l'élément terminal sont données, les longueurs des vérins sont déterminées de façon univoque.

Robots parallèles?

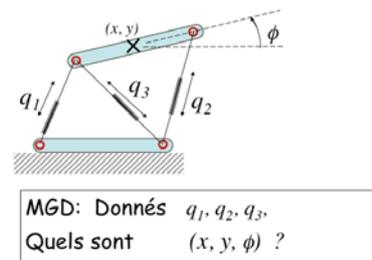


Fig. 16 : Robot parallèle planaire

## 2.2 Le Jacobien

---

### Sommaire

<b>2.2 Le Jacobien</b>	<b>1</b>
2.2.1 Introduction	1
2.2.2 Jacobien géométrique	2
2.2.3 Jacobien analytique	4
2.2.4 Discussion	7
2.2.5 Singularités d'un robot	7
2.2.6 Utilités du Jacobien	9
2.2.7 Références	9
2.2.8 Annexe	10
2.2.8.1 Jacobien géométrique	10
2.2.8.2 Passage entre les représentations analytique et géométrique	15
2.2.8.3 Vitesses d'un corps rigide	17

---

### 2.2.1 Introduction

Dans les paragraphes précédents, nous avons traité la cinématique des robots sériels et parallèles. Nous avons présenté la relation liant la position de l'organe terminal à celles des moteurs, notamment appelée le modèle géométrique. Dans ce paragraphe, nous allons essayer d'étendre l'étude depuis une analyse liée à la position à une analyse liée aux vitesses.

La relation qui lie les vitesses opérationnelles (celles de l'organe terminal) aux vitesses articulaires (celles des moteurs) est appelée **Jacobien**.

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = J \cdot \dot{q} \quad \text{2.2.1}$$

$v$  et  $\omega$  représentent respectivement les composantes translationnelles et rotationnelles des vitesses de l'organe terminal.

Rappelons que le vecteur des coordonnées articulaire du robot (correspondant aux positions de chacune des articulations (moteurs)) est donnée par :

$$q = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_n]^T \quad \text{2.2.2}$$

$n$  étant le nombre d'articulations du robot.

Et le vecteur vitesse articulaire associé s'écrit comme suit :

$$\dot{q} = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \cdots \quad \dot{q}_n]^T \quad \text{2.2.3}$$

Dans ce cours, nous allons traiter :

- les vitesses opérationnelles d'un corps rigide et les notations associées,
- les différentes manières de calculer le Jacobien :
  - Analytique,
  - Vectorielle (géométrique) – réf. Annexe
  - Numérique,
- Discuter sur les différentes représentations du Jacobien,

- Enumérer quelques utilités de Jacobien.
- L'analyse des singularités d'un robot.

### **Le Jacobien, définitions et méthodes de détermination,**

Les mathématiciens parlent de ***matrice Jacobienne*** alors que les roboticiens utilisent plutôt les termes ***Jacobien*** ou ***Jacobienne***. C'est une matrice qui relie les vitesses de l'organe terminal (la poignée du robot) aux vitesses articulaires du robot (Equation 2.2.1).

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = J \cdot \dot{q}$$

$v$  et  $\omega$  sont les vitesses translationnelles et rotationnelles de l'organe terminal. Ces composantes sont choisies pour pouvoir identifier d'une manière unique la vitesse de ce dernier.

Dans ce qui suit nous allons traiter les méthodes de détermination du Jacobien et la terminologie associée. Ainsi le Jacobien obtenu directement depuis une dérivation analytique du modèle géométrique est appelé ***Jacobien analytique***. Quand le Jacobien est déduit à partir d'une construction vectorielle, il sera nommé ***Jacobien géométrique***.

### **2.2.2 Jacobien géométrique**

Une méthode de déduire le Jacobien est de le construire d'une manière vectorielle. Ce Jacobien est ainsi appelé ***Jacobien géométrique*** ou parfois ***Jacobien de base***.

---

L'avantage de cette construction est que ce Jacobien **ne dépend pas du mode de représentation des orientations de l'organe terminal** et il est ainsi unique.

---

Le vecteur de vitesse de rotation  $\vec{\omega}$  considéré dans ce cas est exprimé dans le repère de base avec ces trois composantes vectorielles  $\{\omega_x \ \omega_y \ \omega_z\}$ .

- $\omega_x$ , est la composante du vecteur rotation selon l'axe x.
- $\omega_y$ , est la composante du vecteur rotation selon l'axe y.
- $\omega_z$ , est la composante du vecteur rotation selon l'axe z.

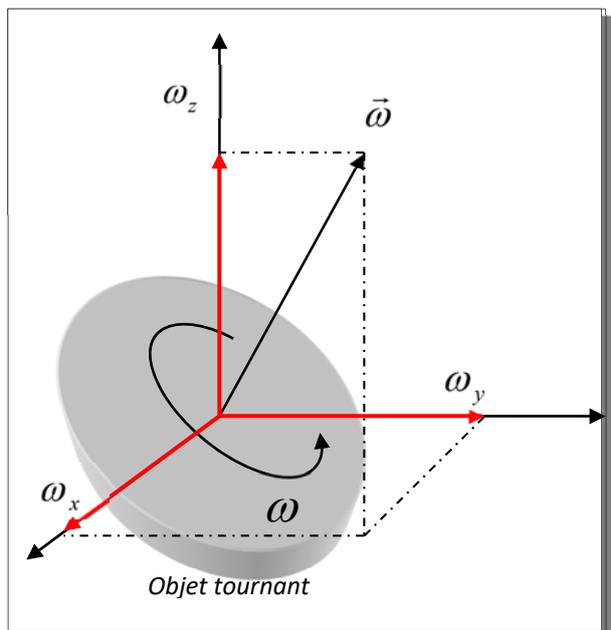


Figure 2.2.1, composantes vectorielles d'une rotation

### **Construction de la matrice Jacobienne géométrique**

La matrice Jacobienne géométrique est construite d'une manière vectorielle. Considérons une succession de liaisons d'un robot sériel donné comme à la figure ci-dessous. Cette chaîne cinématique est ouverte et met en liaison plusieurs actionneurs linéaires et rotatifs.

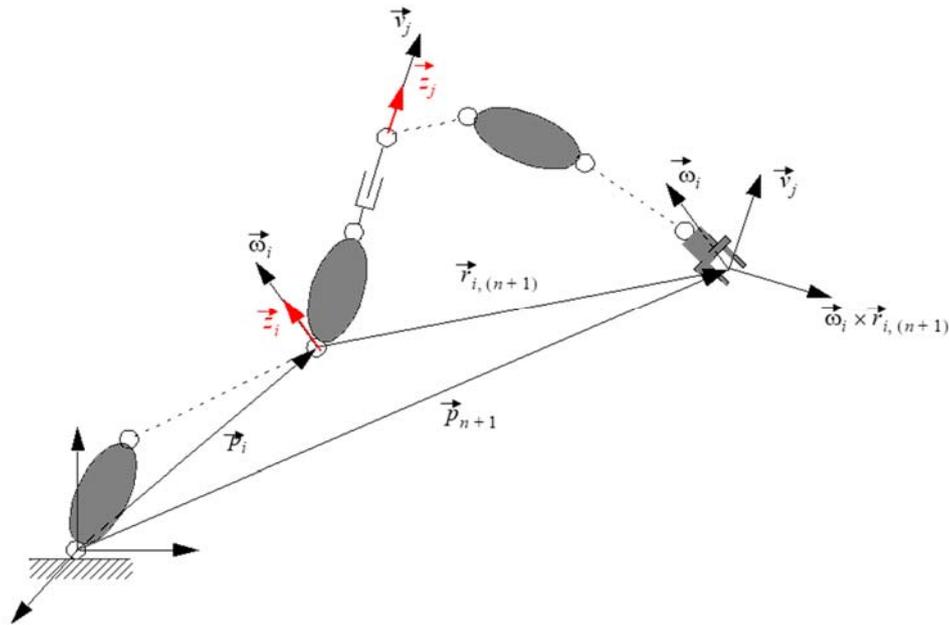


Figure 2.2.2, Chaîne cinématique ouverte et propagation de la vitesse

La vitesse du corps de liaison  $i$  par rapport au corps précédent  $i-1$  dépend du type d'articulation  $i$ . Si l'articulation est de type prismatique alors cette vitesse est linéaire et elle est décrite par un vecteur  $\vec{v}_i$ . Pour une articulation rotoïde, cette vitesse est décrite par un vecteur vitesse angulaire  $\vec{\omega}_i$ .

$\vec{z}_i$  donne la direction du mouvement selon l'articulation (serrage d'une vis si articulation rotoïde).

Le formalisme du Jacobien réponds à la question suivante :

**[Q] Quelle est la contribution du mouvement d'une ou plusieurs articulations sur l'organe terminal ?**

Dans le cas de construction géométrique, le principe est le suivant :

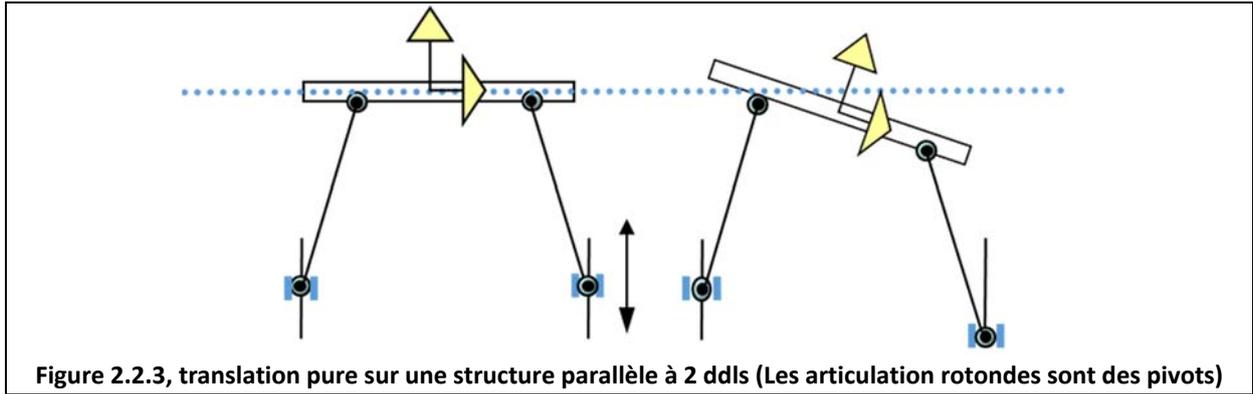
- Une articulation prismatique  $i$  contribue directement par une vitesse linéaire  $\vec{v}_i$ .
- Par contre, une articulation rotoïde  $i$  tournant avec une vitesse rotative  $\vec{\omega}_i$  donne lieu au niveau de l'organe terminal non seulement à une vitesse de rotation  $\vec{\omega}_i$  mais aussi à une vitesse translationnelle  $\vec{\omega}_i \wedge \vec{r}_{i,n+1}$ .  $\vec{r}_{i,n+1}$  est le vecteur liant l'origine du repère attaché à l'articulation  $i$  à l'origine du repère attaché à l'organe terminal.

Ainsi, la vitesse de l'organe terminal est obtenue en sommant toutes les contributions de chacune des articulations.

Les détails de calcul mathématique sont fournis en annexe.

**Remarque :**

La méthode de construction de la Jacobienne géométrique traitée dans ce paragraphe n'est pas valable pour les robots parallèles. Effectivement, dans cette méthode vectorielle nous avons supposé que la chaîne cinématique était ouverte et qu'une pure translation au niveau d'une articulation prismatique induisait une pure translation au niveau de la sortie. Dans le cas d'un robot parallèle cette hypothèse n'est pas forcément valable en raison de la fermeture de la boucle cinématique. Ainsi, une translation induit facilement une rotation (Voir Error! Reference source not found.). Pour plus de détail voir sur la méthode vectorielle dédié aux robots parallèles voir [Craig, 89].



### 2.2.3 Jacobien analytique

Une autre manière de déduire le Jacobien est de l'obtenir d'une manière analytique à partir de la dérivation du modèle géométrique.

Dans un cas général, la sortie du robot ou les coordonnées de son organe terminal est décrite par deux types d'informations :

- la position translationnelle  $p(q)$ , et
- L'orientation  $\phi(q)$

$$X(q) = \begin{bmatrix} p(q) \\ \phi(q) \end{bmatrix} \quad 2.2.4$$

La dimension de cet espace opérationnel est  $m$ , donnant lieu au vecteur opérationnel suivant<sup>1</sup> :

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix} \quad 2.2.5$$

A titre d'exemple, en choisissant les angles d'Euler pour la représentation de l'orientation nous aurons:

$$X(q) = \begin{bmatrix} p_x(q) \\ p_y(q) \\ p_z(q) \\ \alpha(q) \\ \beta(q) \\ \gamma(q) \end{bmatrix} \quad 2.2.6$$

Soit la fonction  $f(q_1, q_2, \dots, q_n)$  donnant la relation entre les coordonnées opérationnelles et articulaires (Modèle géométrique). Nous pouvons écrire :

<sup>1</sup> Les coordonnées opérationnelles permettent de référencer l'organe terminal dans l'espace tridimensionnel de la même manière qu'un corps rigide. De ce fait, il faut au maximum 6 coordonnées pour identifier sa disposition dans l'espace. Pas seulement, car les coordonnées opérationnelles donnent aussi la possibilité de reconnaître la disposition du robot dans l'espace. Ainsi, l'espace opérationnel peut être composé par l'association des positions et orientations de plusieurs sorties convenablement choisies sur la structure (par exemple dans le cas d'un robot redondant). Ceci donnerait lieu à une dimension de l'espace opérationnel  $m$  pouvant excéder 6.

**Robot redondant:** robot pour lequel la dimension de l'espace opérationnel excède celle des actionneurs.

$$X(q) = \begin{bmatrix} X_1(q) \\ X_2(q) \\ \vdots \\ X_m(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ f_2(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ \vdots \\ f_m(q_1, q_2, \dots, q_n) \end{bmatrix} \quad 2.2.7$$

En appliquant la loi des dérivées partielles sur l'équation ci-dessus, nous trouvons :

$$dX = \begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ \vdots \\ dX_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} \cdot dq_1 + \frac{\partial f_1}{\partial q_2} \cdot dq_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \cdot dq_n \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} \cdot dq_1 + \frac{\partial f_2}{\partial q_2} \cdot dq_2 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial q_n} \cdot dq_n \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial q_1} \cdot dq_1 + \frac{\partial f_m}{\partial q_2} \cdot dq_2 + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial q_n} \cdot dq_n \end{bmatrix} \quad 2.2.8$$

Cette équation peut également être écrite sous la forme matricielle suivante:

$$dX = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial q_1} & \frac{\partial f_m}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial q_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ \vdots \\ dq_n \end{bmatrix} \quad 2.2.9$$

Ou aussi,

$$dX = J_A \cdot dq \quad 2.2.10$$

$J_A(q)$  est appelée **matrice Jacobienne analytique** du robot.

Cette matrice dépend de la position articulaire  $q$  du robot et du système de représentation choisi pour les orientations:

$$J_A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial q_1} & \frac{\partial f_m}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad 2.2.11$$

En divisant chaque membre de l'équation par  $dt$ , nous obtenons

$$\dot{X} = J_A \cdot \dot{q} \quad 2.2.12$$

**Exemple 2 :**

Soit l'exemple précédent d'un robot rotatif plan à 2 ddl,

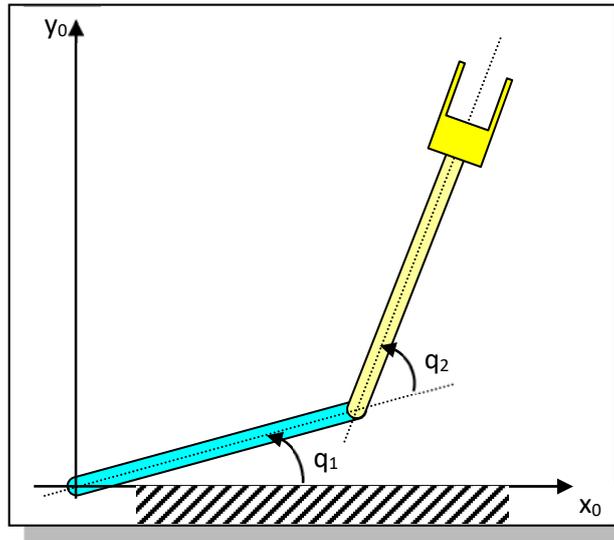


Figure 2.2.4, Robot plan à 2 ddl

La transformation de coordonnées directe (modèle géométrique) de ce manipulateur est donnée par:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(q_1, q_2) \\ f_2(q_1, q_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

En appliquant la loi des dérivées partielles:

$$J_A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(q_1) - l_2 \sin(q_1 + q_2) & -l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

Et

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(q_1) - l_2 \sin(q_1 + q_2) & -l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

**Remarques :**

- Le Jacobien analytique nécessite la disponibilité du modèle géométrique et le choix d'un mode de représentation de (ou des orientations) de l'organe terminal.
- Le Jacobien analytique n'est pas unique car dépend du choix des orientations.

### 2.2.4 Discussion

Il existe d'autres Jacobiens que ceux que nous avons présenté au cours de ce paragraphe (géométrique et analytique).

Mais, une question se pose :

***Avons-nous présenté des Jacobiens ou des méthodes de détermination du Jacobien ?***

- Si nous avons présenté des Jacobiens alors en quoi diffèrent ils ?
- Si nous avons présenté des méthodes de détermination, alors le Jacobien est-il unique et intrinsèque à chaque robot ?

La réponse correcte est que nous avons mis en œuvre les deux aspects. i.e. que nous avons discuté de deux types de Jacobien et que nous avons présenté deux méthodes de détermination du Jacobien.

- Le premier dit géométrique par l'essence même de sa construction vectorielle.
- Le second dit analytique car provient d'une pure dérivation analytique d'un modèle géométrique qui lui-même est analytique.

→ ***Mais quelle est la différence entre les deux ?***

- La première différence est méthodologique (du fait des deux méthodes différentes de détermination).
- La seconde est d'ordre représentative. En effet, le Jacobien analytique obtenu à partir de la dérivation du modèle géométrique nécessite le choix d'une représentation angulaire de la sortie qui provient de la nature même du robot et de ce qu'il fournit comme sorties angulaires. Alors que le Jacobien géométrique utilise directement les axes du repère de base et fait ainsi intervenir les trois composantes  $\{\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z\}$  (voir **Error! Reference source not found.**).

### 2.2.5 Singularités d'un robot

Le terme « singularité » fait penser à un comportement ou un état non souhaitable, peut être dangereux. Ce comportement singulier du robot est ainsi non généralisé sur le volume de travail du robot mais a lieu dans des situations bien terminées.

***Alors, qu'est ce bien cette singularité ?***

En mathématique nous parlons de matrice singulière quand le déterminant de cette dernière est nulle et qu'elle devient non inversible (Le système d'équations associé n'a ainsi pas de solutions).

Nous savons que :

$$\dot{X} = J \cdot \dot{q}$$

La cinématique inverse est ainsi donnée par,

$$\dot{q} = J^{-1} \cdot \dot{X}$$

L'existence de cette cinématique inverse, i.e l'existence de la combinaison des vitesses articulaires qui donne lieu à la vitesse opérationnelle donnée, dépend de la singularité de cette matrice Jacobienne. Lorsque  $\det(J) = 0$ , cette dernière n'est pas inversible et le robot est en singularité. La résolution de l'équation précédente selon la variable articulaire permet de maîtriser les situations singulières.

Savoir où se trouvent les singularités dans le volume de travail est important car:

- A la position singulière,
  - Si c'est un robot sériel, le robot perd un (ou plusieurs) degrés de liberté

- Si c'est un robot parallèle, le robot gagne un (ou plusieurs) degrés de liberté devenant non rigide.
- La transformation de coordonnées inverse possède parfois un nombre infini de solutions.
- A proximité d'une singularité, de petites vitesses dans l'espace cartésien peuvent conduire à de très grandes vitesses dans les articulations donc induit des difficultés à réaliser de tels mouvements.

On peut généralement classer les singularités en 2 groupes:

- les singularités de bord du volume de travail,
- les singularités internes: Elles arrivent généralement lorsque deux axes ou plus s'alignent. Ceci pose souvent un problème lors de la génération de trajectoire.

### Exemple

Nous reprenons l'exemple du robot planaire à deux degrés de liberté. L'inversion de la matrice Jacobienne de l'exemple du robot rotatif plan à 2ddl nous donne:

$$J^{-1} = \frac{1}{l_1 l_2 \sin q_2} \begin{bmatrix} l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ -l_1 \cos q_1 - l_2 \cos(q_1 + q_2) & -l_1 \sin q_1 - l_2 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

Cette matrice est singulière si son déterminant est nul, c'est-à-dire si

$$l_1 l_2 \sin(q_2) = 0,$$

ou pour:

$$q_2 = k \cdot \pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Ces singularités correspondent aux 2 cas représentés sur la figure ci dessous.

- Tous les points situés sur les cercles de rayon  $l_1 + l_2$  et  $|l_1 - l_2|$  sont des points singuliers de ce manipulateur.  
-> Elles se situent sur les bords du volume de travail du robot.  
-> Sur ces singularités, le robot perd un degré de liberté.

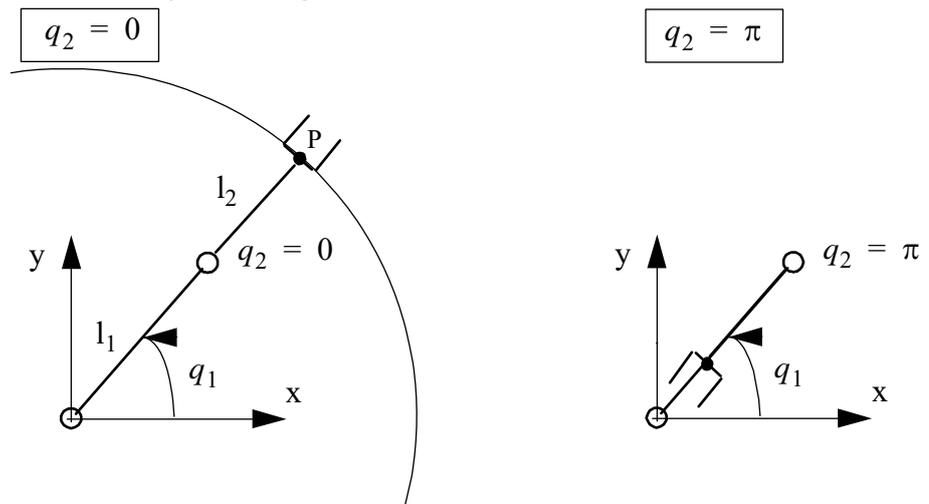


Figure 2.2.5, Singularités du robot planaire à deux degrés de liberté

Il y a perte d'un ddl car le préhenseur ne peut bouger que selon l'arc de cercle au lieu de pouvoir bouger librement selon les deux axes x et y.

### 2.2.6 Utilités du Jacobien

Le Jacobien possède diverses utilités. Nous savons néanmoins qu'il permet de relier les vitesses opérationnelles et articulaires et variations articulaires aux variations opérationnelles.

Soient,

$$\dot{X} = J_A \cdot \dot{q} \text{ et } dX = J_A \cdot dq$$

Nous pouvons ainsi résumer les utilités du Jacobien comme suit :

- Reliant les vitesses articulaires aux opérationnelle, il peut donner une information importante sur les vitesses nominales des moteurs à choisir.
- Il est aussi appelé matrice de sensibilité car permet de connaître la sensibilité au niveau de a sortie connaissant celle des articulations (moteurs+transmission locale),
- Permet de connaître et maîtriser ainsi les singularités du robot. Il est aussi appelé matrice de stabilité.
- Permet d'intégrer numériquement le modèle géométrique directe (ie. par l'utilisation de la méthode de Newton-Raphson) pour obtenir le modèle géométrique inverse (ou vice-versa) .
- Peut être utilisé en contrôle dans plusieurs schémas de commande.

### 2.2.7 Références

- [1] Siciliano, Bruno, and Oussama Khatib, eds. *Springer handbook of robotics*. Springer, 2016.
- [2] Sciavicco, Lorenzo, and Bruno Siciliano. *Modelling and control of robot manipulators*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [3] Craig, John J. *Introduction to robotics: mechanics and control*. Vol. 3. Upper Saddle River, NJ, USA:: Pearson/Prentice Hall, 2005.
- [4] Tsai, Lung-Wen. *Robot analysis: the mechanics of serial and parallel manipulators*. John Wiley & Sons, 1999.
- [5] Dombre E., Khalil W., *Modélisation et commande des robots*, Editions Hermès, 1988.

## 2.2.8 Annexe

### 2.2.8.1 Jacobien géométrique

Une méthode de déduire le Jacobien est de le construire d'une manière vectorielle. Ce Jacobien est ainsi appelé ***Jacobien géométrique*** ou parfois ***Jacobien de base***.

L'avantage de cette construction est que ce Jacobien **ne dépend pas du mode de représentation des orientations de l'organe terminal** et il est ainsi unique.

Le vecteur de vitesse de rotation  $\vec{\omega}$  considéré dans ce cas est exprimé dans le repère de base avec ces trois composantes vectorielles  $\{\omega_x \ \omega_y \ \omega_z\}$ .

- $\omega_x$ , est la composante du vecteur rotation selon l'axe x.
- $\omega_y$ , est la composante du vecteur rotation selon l'axe y.
- $\omega_z$ , est la composante du vecteur rotation selon l'axe z.

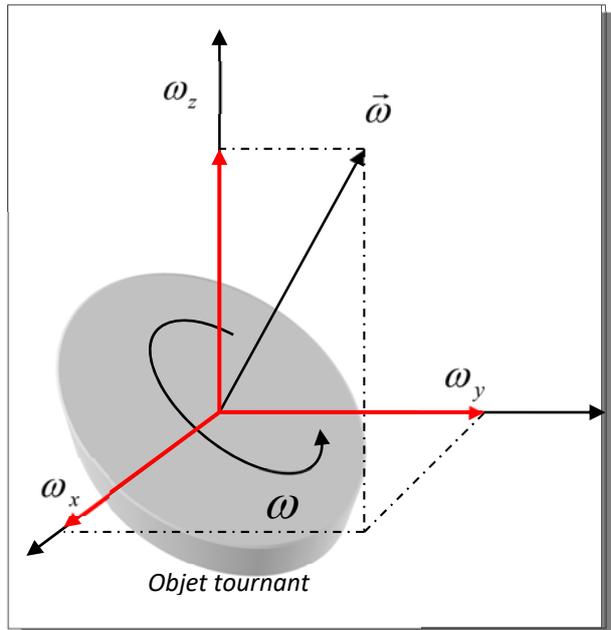


Figure 2.2.6, composantes vectorielles d'une rotation

#### ***Construction de la matrice Jacobienne géométrique***

La matrice Jacobienne géométrique est construite d'une manière vectorielle. Considérons une succession de liaisons d'un robot sériel donné comme à la figure ci-dessous. Cette chaîne cinématique est ouverte et met en liaison plusieurs actionneurs linéaires et rotatifs.

La vitesse du corps de liaison  $i$  par rapport au corps précédent  $i-1$  dépend du type d'articulation  $i$ . Si l'articulation est de type prismatique alors cette vitesse est linéaire et elle est décrite par un vecteur  $\vec{v}_i$ . Pour une articulation rotoïde, cette vitesse est décrite par un vecteur vitesse angulaire  $\vec{\omega}_i$ .

Les vecteurs vitesse linéaire et rotationnelle de l'outil sont ainsi exprimés en fonction des vitesses articulaires  $\dot{q}_i$  de la manière suivante :

$$\begin{cases} \vec{v}_i = \varepsilon_i \dot{q}_i \vec{z}_i \\ \vec{\omega}_i = (1 - \varepsilon_i) \dot{q}_i \vec{z}_i \end{cases}$$

Avec, 
$$\varepsilon_i = \begin{cases} 0 & \text{pour une articulation rotoïde} \\ 1 & \text{pour une articulation prismatique} \end{cases}$$

$\vec{z}_i$  donne la direction du mouvement selon l'articulation (serrage d'une vis si articulation rotoïde).

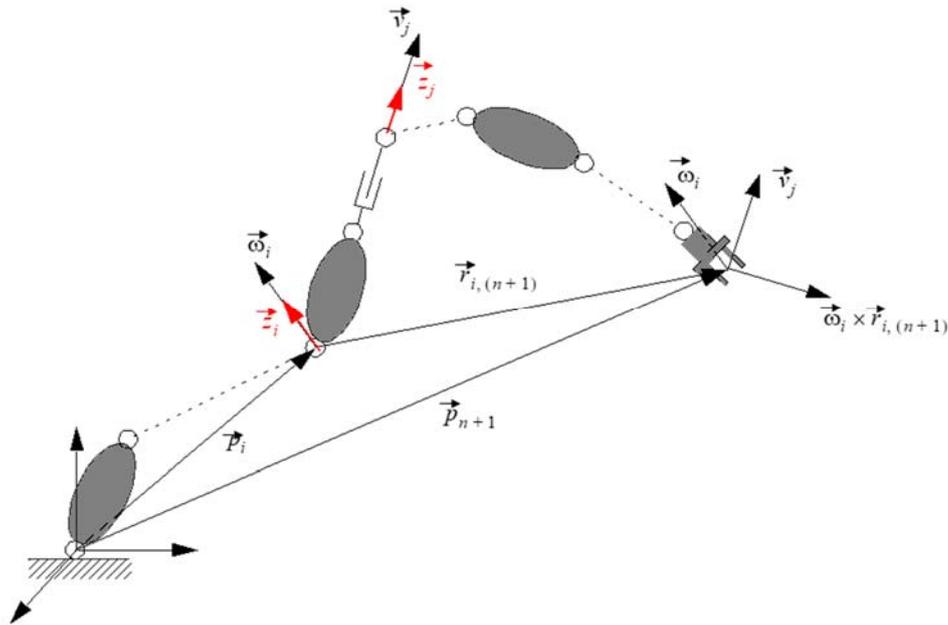


Figure 2.2.7, Chaîne cinématique ouverte et propagation de la vitesse

Le formalisme du Jacobien réponds à la question suivante :

**[Q] Quelle est la contribution du mouvement d'une ou plusieurs articulations sur l'organe terminal ?**

Dans le cas de construction géométrique, le principe est le suivant :

- Une articulation prismatique  $i$  contribue directement par une vitesse linéaire  $\vec{v}_i$ .
- Par contre, une articulation rotoïde  $i$  tournant avec une vitesse rotative  $\vec{\omega}_i$  donne lieu au niveau de l'organe terminal non seulement à une vitesse de rotation  $\vec{\omega}_i$  mais aussi à une vitesse translationnelle  $\vec{\omega}_i \wedge \vec{r}_{i,n+1}$ .  $\vec{r}_{i,n+1}$  est le vecteur liant l'origine du repère attaché à l'articulation  $i$  à l'origine du repère attaché à l'organe terminal.

Ainsi, la vitesse de l'organe terminal est obtenue en sommant toutes les contributions de chacune des articulations. Nous pouvons alors écrire :

$$\text{La vitesse linéaire résultante de l'outil, } \vec{v} = \sum_1^n (\varepsilon_i \vec{z}_i + (1 - \varepsilon_i) \vec{z}_i \wedge \vec{r}_{i,n+1}) \cdot \dot{q}_i \quad \text{2.2.13}$$

$$\text{La vitesse rotative résultante de l'outil, } \vec{\omega} = \sum_1^n (1 - \varepsilon_i) \vec{z}_i \dot{q}_i \quad \text{2.2.14}$$

La Jacobienne géométrique est alors immédiatement déduite.

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = J(q) \cdot \dot{q}$$

Compte tenu des équations précédentes, elle possède la forme générale suivante :

$$J/q = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \vec{z}_1 + (1 - \varepsilon_1) \vec{z}_1 \wedge \vec{r}_{1,n+1} & \cdots & \varepsilon_n \vec{z}_n + (1 - \varepsilon_n) \vec{z}_n \wedge \vec{r}_{n,n+1} \\ (1 - \varepsilon_1) \vec{z}_1 & \cdots & (1 - \varepsilon_n) \vec{z}_n \end{bmatrix} \quad \text{2.2.15}$$

En remplaçant  $\vec{r}_{i,n+1} = \vec{p}_{n+1} - \vec{p}_i$ , avec  $\vec{p}_i$  est le vecteur reliant le centre de repère de base au centre du repère lié à l'articulation  $i$ .

Nous obtenons :

$$J(q) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \vec{z}_1 + (1 - \varepsilon_1) \vec{z}_1 \wedge (\vec{p}_{n+1} - \vec{p}_1) & \cdots & \varepsilon_n \vec{z}_n + (1 - \varepsilon_n) \vec{z}_n \wedge (\vec{p}_{n+1} - \vec{p}_n) \\ (1 - \varepsilon_1) \vec{z}_1 & \cdots & (1 - \varepsilon_n) \vec{z}_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{2.2.16}$$

$$J(q) = \begin{bmatrix} R_1(\varepsilon_1 \vec{z}_0 + (1 - \varepsilon_1) \hat{z} \cdot \vec{r}_{1,n+1}) & \cdots & R_n(\varepsilon_n \vec{z}_0 + (1 - \varepsilon_n) \hat{z} \cdot \vec{r}_{n,n+1}) \\ (1 - \varepsilon_1) R_1 \vec{z}_0 & \cdots & (1 - \varepsilon_n) R_n \vec{z}_0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{2.2.17}$$

Avec  $z_0 = [0 \ 0 \ 1]^T$

Et  $\hat{z} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

L'introduction de la nouvelle variable  $\hat{z}$  permet de réécrire le produit vectoriel  $\vec{z}_0 \wedge \vec{r}_{i,n+1}$  en un produit matriciel  $\hat{z} \cdot \vec{r}_{i,n+1}$ .

Cette matrice Jacobienne peut également être décomposée en deux parties, la première mettant en évidence la translation  $J_p$ , l'autre  $J_o$  mettant en évidence la rotation de l'organe terminal. Chacune de ces composantes est de dimension  $3.n$ . La matrice Jacobienne est ainsi écrite sous la forme suivante.

$$J(q) = \begin{bmatrix} J_p(q) \\ J_o(q) \end{bmatrix}$$

Nous écrivons alors,

$$J(q) = \begin{bmatrix} J_{p1}(q) & \cdots & J_{pn}(q) \\ J_{o1}(q) & \cdots & J_{on}(q) \end{bmatrix}$$

Avec les colonnes de la matrices définies comme précédemment, ie.

$$\begin{bmatrix} J_{pi}(q) \\ J_{oi}(q) \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \vec{z}_i \\ 0 \end{bmatrix} & \text{pour une articulation prismatique} \\ \begin{bmatrix} \vec{z}_i \wedge (\vec{p}_{n+1} - \vec{p}_i) \\ \vec{z}_i \end{bmatrix} & \text{pour une articulation rotoïde} \end{cases} \quad \mathbf{2.2.18}$$

**Remarque :**

La méthode de construction de la Jacobienne géométrique traitée dans ce paragraphe n'est pas valable pour les robots parallèles. Effectivement, dans cette méthode vectorielle nous avons supposé que la chaîne cinématique était ouverte et qu'une pure translation au niveau d'une articulation prismatique induisait une pure translation au niveau de la sortie. Dans le cas d'un robot parallèle cette hypothèse n'est pas forcément valable en raison de la fermeture de la boucle cinématique. Ainsi, une translation induit facilement une rotation (Voir Error! Reference source not found.). Pour plus de détail voir sur la méthode vectorielle dédié aux robots parallèles voir [Craig, 89].

**Exemple**

Soit le robot plan rotatif à 2 ddl suivant :

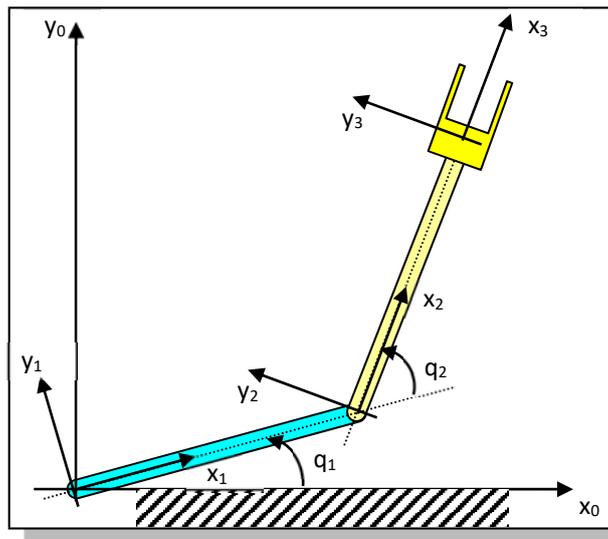


Figure 2.2.8, robot planaire à 2 ddl pour calcul de Jacobien géométrique

Nous considérerons que chaque lien  $i$  est de longueur  $l_i$ .

La matrice Jacobienne s'écrira :

$$J = \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \wedge (\bar{p}_3 - \bar{p}_1) & \bar{z}_2 \wedge (\bar{p}_3 - \bar{p}_2) \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{bmatrix}$$

Puisque,

$$\bar{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{p}_2 = \begin{pmatrix} l_1 \cos(q_1) \\ l_1 \sin(q_1) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{vecteurs de liaison depuis la base à la 1<sup>ère</sup> et la 2<sup>ème</sup> articulation.}$$

$$\bar{p}_3 = \begin{pmatrix} l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{vecteur de liaison depuis la base à l'organe terminal.}$$

$$\bar{z}_1 = \bar{z}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{car le robot est planaire}$$

Alors,

$$J = \begin{pmatrix} -l_1 \sin(q_1) - l_2 \sin(q_1 + q_2) & -l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il faut remarquer que dans ce cas le robot est de dimension 2 et que nous nous intéressons uniquement aux translations. La Jacobienne mettant en évidence uniquement les translations s'écrit:

$$J_p = \begin{pmatrix} -l_1 \sin(q_1) - l_2 \sin(q_1 + q_2) & -l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La seule rotation mise en évidence dans la définition du Jacobien (6X2) est celle de l'orientation du repère fixé à l'organe terminal par rapport au repère de base.

$\omega_z = \dot{q}_1 + \dot{q}_2$ , i.e. composition des deux rotations des deux articulations 1 et 2, décrit la vitesse de rotation de l'organe terminal autour de l'axe de base  $z_0$ .

### Exercice :

Trouver le Jacobien pour le robot2 plan (Figure 2.2.9). Considérez que chaque lien est de longueur  $l_i$ .

Supposer

- $l_1 = l_2 = 350$  mm,
- la résolution du capteur est de 0.005 degrés,
- la précision du réglage est de 0.02 degrés,

Quelles sont les vitesses maximales obtenues au niveau des moteurs ?

Quelles sont les précisions obtenues au niveau du préhenseur ?

Attention faire la distinction entre précision et résolution !!!

- Refaire les calculs pour  $l_1 = l_2 = 150$  mm,

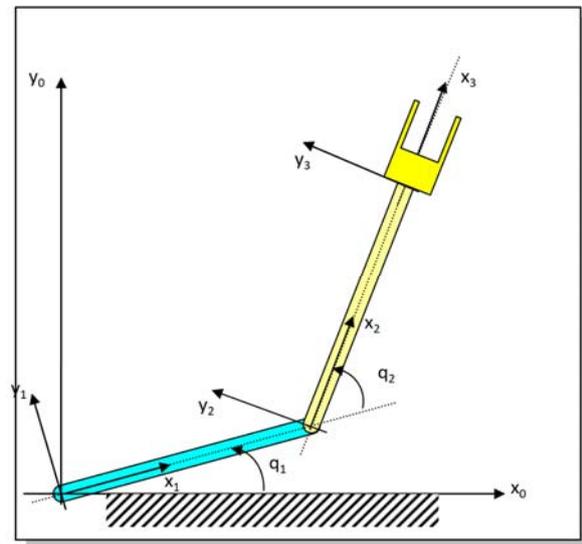


Figure 2.2.9, robot planaire 2ddl.

### 2.2.8.2 Passage entre les représentations analytique et géométrique

Supposons que nous avons à disposition les vitesses de rotation comme étant les dérivées successives des angles d'Euler :

$$\dot{\Theta}_{Z'Y'Z'} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}$$

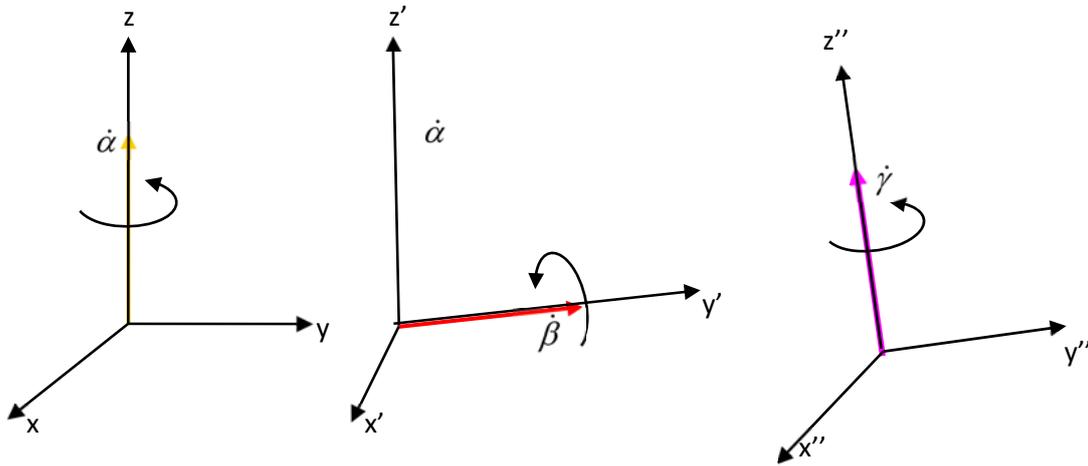


Figure 2.2.10, vitesses rotationnelles pour les angles d'Euler Z'Y'Z'

Nous pouvons alors exprimer chacune des vitesses dans le repère de base après trois orientations successives :

- Comme résultat de la rotation  $\dot{\alpha}$  :  $\begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}^T = \dot{\alpha} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$
- Comme résultat de la rotation  $\dot{\beta}$  :  $\begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}^T = \dot{\beta} \begin{bmatrix} -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 1 \end{bmatrix}^T$
- Et selon la rotation  $\dot{\gamma}$  :  $\begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}^T = \dot{\gamma} \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\sin(\beta) & \sin(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix}^T$

Ainsi nous pouvons écrire la relation entre le vecteur vitesse angulaire  $\omega$  et le vecteur vitesse angulaire  $\dot{\Theta}_{Z'Y'Z'}$  (tel que défini pour les angles d'Euler précédents) comme suit. :

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -s_\alpha & c_\alpha s_\beta \\ 0 & c_\alpha & s_\alpha s_\beta \\ 1 & 0 & c_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \mathcal{J}_r(\Theta) \cdot \dot{\Theta}_{Z'Y'Z'} \quad \text{2.2.19}$$

Et ainsi, il existe toujours une possibilité de passer de la Jacobienne analytique à la Jacobienne géométrique.

En considérant la translation et la rotation, nous écrivons,

$$J(q) = \mathcal{F}(q) \cdot J_a(q) = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_p(q) & 0 \\ 0 & \mathcal{J}_r(q) \end{bmatrix} \cdot J_a(q), \quad \text{2.2.20}$$

$\mathcal{F}(q)$  est la matrice de transformation entre les deux représentations.

$\mathcal{J}_p(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  est la matrice de transformation des translations qui vaut l'identité. Ceci vaut

uniquement dans le cas où les translations sont représentées dans le même référentiel.

→ **Que se passe-t-il dans le cas d'un changement de référentiel?**

De la même manière que nous pouvons passer d'une représentation de la position entre un référentiel et un autre, nous pouvons passer de la représentation du Jacobien entre un choix de coordonnées et un autre. Soit  $R^u$  la matrice de rotation entre les deux repères choisis, alors :

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_u \\ \vec{\omega}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^u & 0 \\ 0 & R^u \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \vec{\omega} \end{bmatrix}$$

Qui donnerait :

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_u \\ \vec{\omega}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^u & 0 \\ 0 & R^u \end{bmatrix} \cdot J \cdot \dot{q} = J^u \cdot \dot{q}$$

Avec :

$$J^u = \begin{bmatrix} R^u & 0 \\ 0 & R^u \end{bmatrix} \cdot J$$

$J^u$  représente le Jacobien dans le nouveau repère.

### 2.2.8.3 Vitesses d'un corps rigide

Il faut 6 paramètres pour connaître la position d'un corps rigide dans l'espace. Trois paramètres représentent les coordonnées translationnelles de son centre de gravité et trois paramètres représentent son orientation dans l'espace.

*Quelques exemples de mouvements de corps solides :*

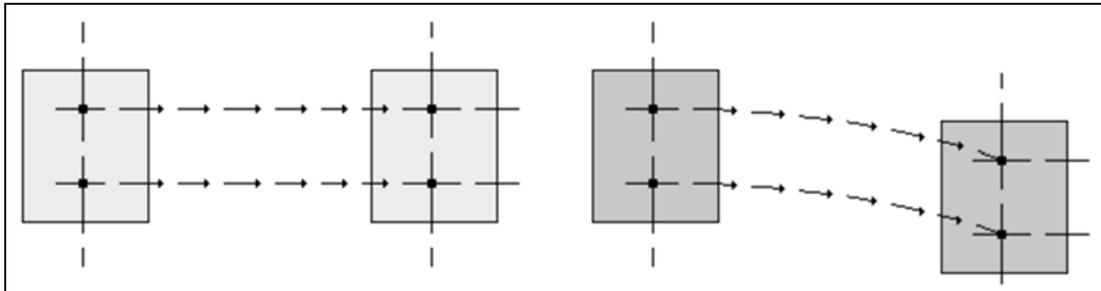


Figure 2.2.11, mouvements translationnels d'un corps rigide

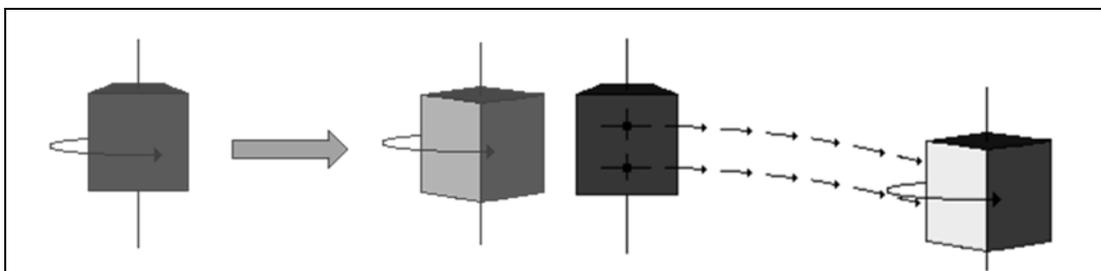


Figure 2.2.12, rotation autour d'un axe d'un corps rigide (à gauche), combinée à une translation (à droite)

Comme il a été introduit au paragraphe précédent, il y a différentes manières de représenter la rotation d'un corps rigide. A titre d'exemples, peuvent être utilisés les configurations des angles d'Euler, les angles RPW (**roll**, **pitch** et **yaw** ou en français **tangage**, **roulis** et **lacet**), les quaternions ou d'autres.

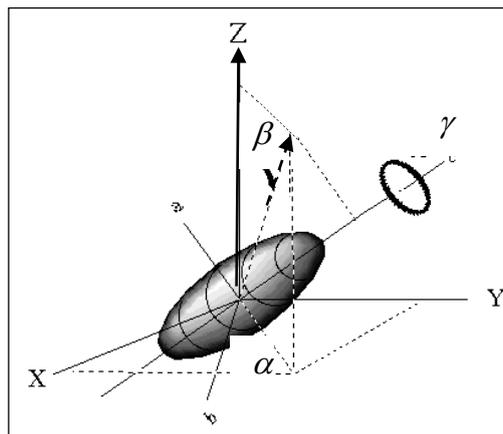


Figure 2.2.13, Exemple de représentations de trois orientations d'Euler

A chaque orientation instantanée est associée une vitesse instantanée correspondant à la variation dans le temps de cette orientation. Le vecteur vitesse instantané défini dans le repère  $\{X, Y, Z\}$  a la même direction que l'axe de rotation du corps rigide en mouvement. Le sens de ce vecteur vitesse correspond au sens de serrage d'une vis (voir Figure 2.2.14).

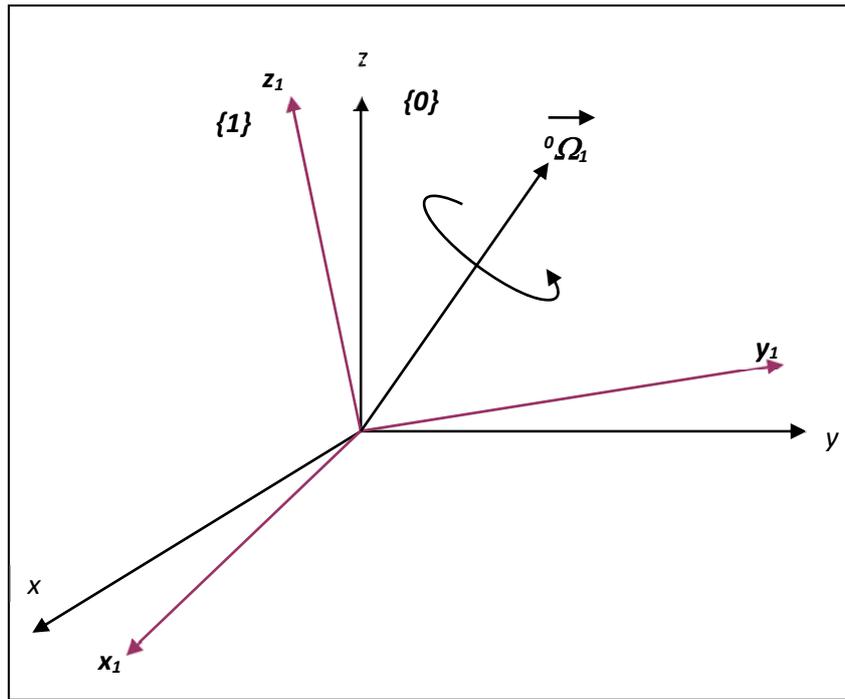


Figure 2.2.14, Rotation d'un corps rigide attaché au repère  $\{1\}$  par rapport à  $\{0\}$  avec la vitesse  ${}^0\vec{\Omega}_1$

Soient deux repères  $\{0\}$  et  $\{1\}$ .  $\{0\}$  désigne le repère fixé à la base et  $\{1\}$  désigne le repère fixé à un objet tournant autour de  $\{0\}$  avec une vitesse  ${}^0\vec{\Omega}_1$ .  ${}^0\vec{\Omega}_1$  correspond au vecteur vitesse de rotation instantané de  $\{1\}$  par rapport à  $\{0\}$ . Son sens et son module varient dans le temps. Ainsi, ses composantes cartésiennes dans le repère  $\{0\}$  varient aussi dans le temps. L'axe de rotation est instantané et, contrairement à la vitesse linéaire, ne peut pas être intégré pour retrouver l'orientation du corps à partir de la valeur initiale de l'orientation. Ceci est à l'origine d'une difficulté importante pour la description cinématique du corps solide.

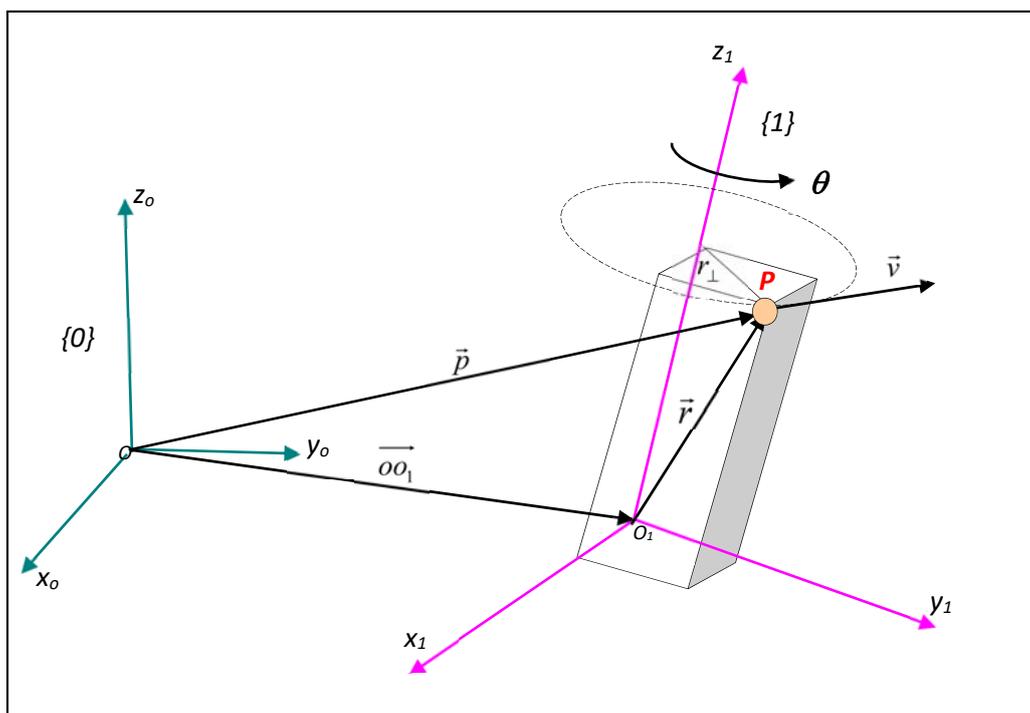


Figure 2.2.15, mouvement combiné d'un corps rigide  $\{1\}$  par rapport au repère de base  $\{0\}$

La figure ci-dessus représente le mouvement combiné de translation et de rotation d'un corps rigide (relié à son repère {1}) par rapport au repère de base {0}.

La question à laquelle nous allons répondre est :

→ Quel est le mouvement résultant de ce corps rigide exprimé dans le repère de base ?

Soient :

- $\{x_1, y_1, z_1\}$ , le repère mobile fixé au corps en mouvement,
- $\vec{p}$ , le vecteur reliant un point  $P$  du corps solide au centre du repère de base {0},
- $\overrightarrow{OO_1}$ , le vecteur translation du repère fixé au corps rigide {1} par rapport au repère de base {0},
- $\vec{r}$  vecteur position d'un point  $P$  du solide dans son repère {1},
- $r_{\perp}$  est la distance entre le point  $P$  et l'axe  $z_1$ ,

Le vecteur position  $\vec{r}$  du point  $P$  du corps rigide exprimé dans le repère {1} (Figure 2.2.15) peut être décrit dans le repère {0} par la relation suivante :

$$\overrightarrow{OP} = \vec{p} = \overrightarrow{OO_1} + R_1 \cdot \vec{r} \quad 2.2.21$$

$R_1$  est la matrice de rotation du repère {1} par rapport à {0}.

Ainsi, pour connaître la vitesse du point  $P$  dans le repère de base {0}, il suffirait de dériver l'équation (2.2.4) dans le temps. Ceci donnerait :

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = \frac{d}{dt} \overrightarrow{OO_1} + \frac{d}{dt} R_1 \cdot \vec{r} + R_1 \cdot \frac{d}{dt} \vec{r} \quad 2.2.22$$

La dérivée de la matrice de rotation peut être réécrite sous la forme suivante [Sciavicco 96]:

$$\frac{d}{dt} R_1 \cdot \vec{r} = \vec{\omega}_1 \wedge R_1 \cdot \vec{r} = \dot{\theta} \vec{z}_1 \wedge R_1 \cdot \vec{r} \quad 2.2.23$$

$\omega_1 = \dot{\theta} \vec{z}_1$  est le vecteur vitesse instantané de la rotation du repère {1} exprimé dans le repère {0}. Le vecteur vitesse résultant s'exprime finalement comme suit :

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = \frac{d}{dt} \overrightarrow{OO_1} + R_1 \cdot \frac{d}{dt} \vec{r} + \vec{\omega}_1 \wedge R_1 \cdot \vec{r} \quad 2.2.24$$

Ou encore si le point  $P$  est fixe dans son repère {1}, il obéit à la loi de mouvement suivante :

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = \frac{d}{dt} \overrightarrow{OO_1} + \vec{\omega}_1 \wedge R_1 \cdot \vec{r} \quad 2.2.25$$

**Parenthèse :**

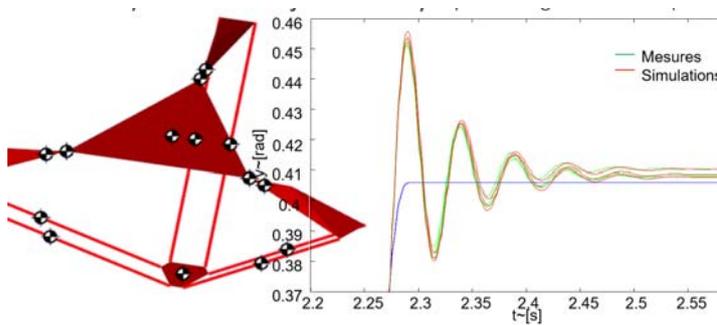
Cette relation peut être interprétée d'une manière intuitive. Un point quelconque  $P$  du corps rigide (voir mouvement combiné d'un corps rigide {1} par rapport au repère de base {0})(Figure 2.2.15) tournant avec une vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  décrit un cercle de rayon  $r_{\perp}$  autour de l'axe  $z_1$ . La vitesse linéaire qui en résulte est tangentielle et a pour module  $\|v\| = r_{\perp} \dot{\theta}$ . Ceci correspond au produit vectoriel de  $\dot{\theta} \vec{z}_1$  et de  $\vec{r}$ .

Soit, 
$$\vec{v} = \dot{\theta} (\vec{z}_1 \wedge \vec{r}_{\perp}) \quad 2.2.26$$

## PARTIE III

# Dynamique

Éléments de modélisation dynamique de robots



## RÉSUMÉ

Ce chapitre présente et développe les outils nécessaires pour la modélisation de la dynamique d'un robot. Le modèle dynamique est ainsi la base pour analyser le robot et pour générer son contrôleur.

M. Bouri

---



---

Sommaire:

3.1	Introduction.....	2
3.2	Définitions et rappels importants .....	3
3.2.1	Représentations dynamiques.....	3
3.2.2	Exemple de modèle dynamique d'un corps rigide .....	5
3.2.3	Modélisation dynamique directe et inverse .....	7
3.2.4	Généralisation des modèles MDI et MDD :.....	8
3.3	Modélisation dynamique d'un robot.....	9
3.3.1	Introduction.....	9
3.3.2	Implémentation de modèles dynamiques .....	21
3.3.3	Développement du modèle dynamique.....	10
3.4	Développement du modèle dynamique par l'approche de Lagrange.....	10
3.4.1	Elaboration du modèle dynamique.....	10
3.4.2	Interprétation des différents termes du modèle dynamique .....	13
3.4.3	Approche de Lagrange pour la modélisation dynamique de robots : Présentation de la méthode	15
3.4.4	Exercice, modélisation dynamique d'un robot cartésien à 2 axes par la méthode de Lagrange	15
3.5	Développement du modèle dynamique par l'approche de Newton-Euler.....	16
3.5.1	Approche de Lagrange pour la modélisation dynamique de robots : Présentation de la méthode	17
3.5.2	Exercice, modélisation dynamique d'un robot cartésien à 2 axes par la méthode de Newton-Euler.....	17
3.6	Discussion sur les deux approches .....	17
3.7	Autres aspects du modèle dynamique d'un robot.....	19
3.8	Discussion et conclusions : .....	20
3.9	Références.....	23

---



---

### 3.1 Introduction.

Ce chapitre présente et développe ce qui est nécessaire pour modéliser la dynamique d'un robot. Le modèle dynamique est ainsi la base pour analyser le robot et pour générer le contrôle du robot. A la fin de ce chapitre, les questions suivantes auront été traitées :

- Que constitue ou représente le modèle dynamique d'un robot ?
- Comment procéder pour établir de tels modèles pour une configuration de robot donné ?
- Quelles sont ses variantes et leurs applications respectives (modèles inverses et modèles simplifiés)?
- Quels sont les avantages et les inconvénients liés à la mise en œuvre d'un modèle dynamique ? Pourquoi et quand doit-il être utilisé ?

Ce chapitre abordera l'établissement du modèle dynamique de robots en utilisant deux méthodes systématiques, l'approche de Lagrange appliquée aux robots sériels et l'approche de Newton-Euler. Pour des raisons pédagogiques, ces méthodes seront appliquées à des systèmes simples.

---

Les questions suivantes seront traitées dans le chapitre du contrôle

- Quelle différence y a-t-il entre un contrôleur traditionnel et un contrôleur utilisant un modèle dynamique ?
  - Quelles sont les considérations nécessaires pour réussir efficacement leur implémentation dans les commandes de robots ?
-

### 3.2 Définitions et rappels importants

La **géométrie** s'occupe des positions (configurations du robot) et des relations qui relient les différents référentiels.

La **cinématique** concerne les vitesses et les accélérations des référentiels du robot ainsi que les transformations qui les lient entre elles.

La **dynamique** incorpore non seulement la cinématique mais aussi les masses et les inerties de la structure considérée ainsi que les forces appliquées (couples généralisés).

Les **coordonnées généralisées** sont des variables de déplacement des repères liés aux bras d'un robot (une position ou un angle). Ces variables sont représentées par  $q(t)$  et ses dérivées par rapport au temps, par  $\dot{q}(t)$  et  $\ddot{q}(t)$ .

Les **couples généralisés** sont les grandeurs générées par les actionneurs du robot afin que le préhenseur effectue le mouvement désiré. Ces variables peuvent être translationnelles (force) ou rotationnelles (couple). Elles sont dénotées par  $\Gamma(t)$ .

La **commande** des robots est définie comme étant la génération et/ou le maintien d'un signal correcteur de commande qui, combiné avec la consigne (c'est-à-dire l'opération désirée du robot), garantit ou assure que les actionneurs du robot sont forcés à accomplir une tâche donnée avec une certaine fidélité.

#### 3.2.1 Représentations dynamiques

La modélisation dynamique consiste en l'obtention des équations différentielles qui régissent l'évolution dans le temps d'une grandeur de sortie.



Pour rappel, en mécanique, l'obtention des lois de mouvements peut être réalisée grâce aux équations fondamentales de la dynamique. Celle pour la translation, qui pose le bilan des forces qui agissent sur le solide et celle pour la rotation qui pose le bilan des couples appliqués sur le solide pour la réalisation de la rotation. Soient :

<b>Pour la translation</b>	$\sum F = m \cdot a$	$m$ étant la masse en mouvement et accélérée avec l'accélération $a$	eq. 3. 1
<b>Pour la rotation</b>	$\sum \Gamma = J_R \cdot \gamma$	$J_R$ est l'inertie totale ramenée à l'axe de rotation accéléré avec l'accélération $\gamma$	eq. 3. 2

##### 3.2.1.1 Exemples à traiter pendant le cours

<i>Exemple 1 - Moteur DC + charge</i>	<i>Exemple 2 - Commande en vitesse</i>

**3.2.1.2 Systèmes dynamiques de base :**

Les comportements dynamiques de base sont probablement l'intégrateur et le dérivateur. En dynamique des robots nous retrouverons le plus souvent les comportements dynamiques suivants :

Simple intégrateur	
Double intégrateur	
Système de premier ordre	
Système de second ordre stable	

**Exercice**

Trouvez la fonction de transfert du système dynamique régi par l'équation différentielle suivante :

$$I \cdot \ddot{\theta} = \Gamma_{in} - m \cdot g \cdot l \cdot \sin(\theta) - b \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \text{sign}(\theta)$$

**3.2.1.3 Représentations dynamiques**

Les systèmes dynamiques sont décrits par des équations différentielles que nous pouvons mettre sous forme de fonctions de transferts si la dynamique est linéaire, ou des matrices de transfert dans le cas de systèmes à plusieurs entrées et plusieurs sorties. Dans tous les cas, la représentation en équation d'état est possible.

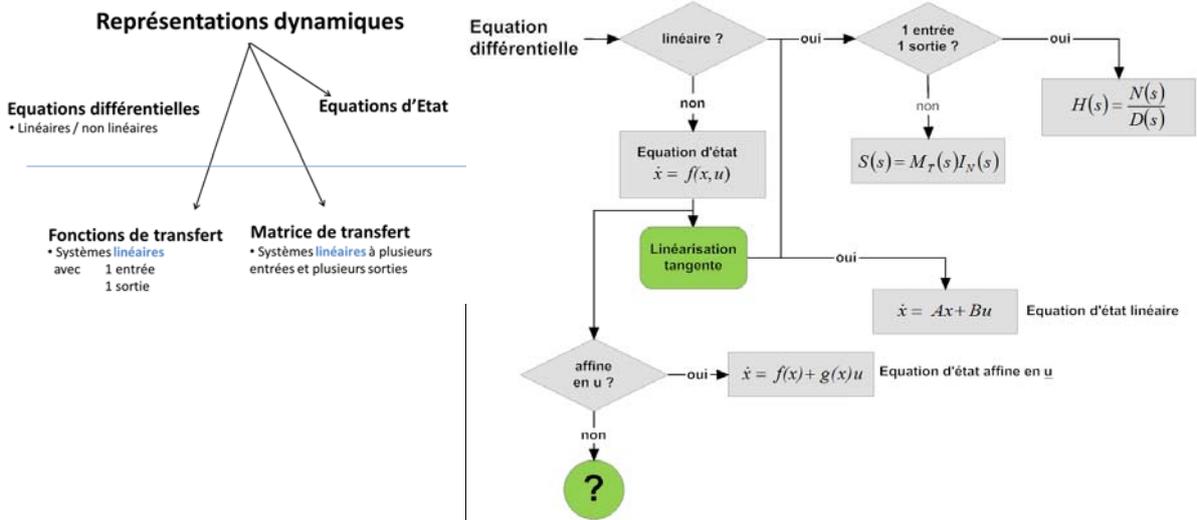


Figure 3- 1 Différentes formes de représentations de systèmes dynamiques

**Exemple**

équation différentielle :	$m\ddot{x} = F_m - b\dot{x} - F_0 - mgl \sin(\beta x)$
fonction de transfert :	$\frac{y}{u} = \frac{1}{1 + \tau s}$
équation d'état :	$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$
équation d'état non linéaire	$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 + \frac{x_2^2}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$

**3.2.2 Exemple de modèle dynamique d'un corps rigide**

Afin d'illustrer les problèmes posés pour établir un modèle dynamique pour un robot à corps multiples, nous allons traiter un exemple simple avec seulement un bras.

**3.2.2.1 Développement du modèle**

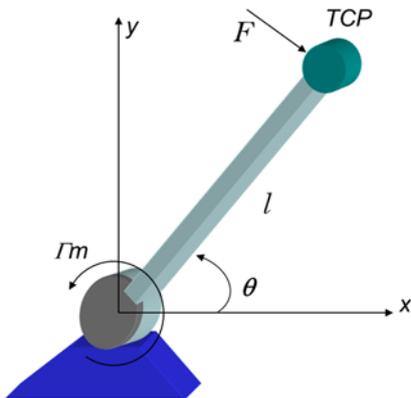


Figure 3- 2. Axe de robot rigide avec un bras de longueur  $l$  et de masse  $m$  concentrée au "tool center point" : un degré de liberté.

Pour une structure à corps rigide, les relations entre la position de l'organe terminal (Tool Center Point) dans l'espace articulaire  $(\theta, l)$  et celle dans l'espace opérationnel  $(x, y)$  au TCP sont données par :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \cos \theta \\ l \sin \theta \end{bmatrix} \quad \text{Et à l'inverse} \quad \begin{bmatrix} l \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{bmatrix}$$

Par dérivation, on déduit les relations entre les vitesses  $v$  et les composantes de l'accélération  $a$  selon les deux axes  $x$  et  $y$ . Ainsi, on obtient pour la vitesse du centre de masse au TCP :

$$v = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l \cdot \dot{\theta} \sin \theta \\ l \cdot \dot{\theta} \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l \sin \theta \\ l \cos \theta \end{bmatrix} \dot{\theta}$$

Et pour l'accélération

$$a = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l \cos \theta \\ -l \sin \theta \end{bmatrix} \dot{\theta}^2 + \begin{bmatrix} -l \sin \theta \\ l \cos \theta \end{bmatrix} \ddot{\theta}$$

Remarquez que la relation entre les vitesses est linéaire comme on l'avait déjà constaté dans le chapitre "cinématique". Il s'agit du Jacobien.

La relation dynamique idéalisée de cet axe de robot (sans frottements, rigide) peut être déduite en utilisant l'approche de Newton-Euler (cf. paragraphes ci dessous) ou de Lagrange. Elle est donnée comme suit :

$$\Gamma_m - l \cdot F = I\ddot{\theta} + mgl\cos\theta$$

Où :

- $\Gamma_m$  couple à la sortie du moteur
- $F$  force externe qui s'exerce sur le TCP (tool center point)
- $I = m \cdot l^2$  inertie du bras rapportée à l'axe du moteur
- $m, l, g$  la masse, la longueur et l'accélération due à la gravité
- $\theta$  Coordonnée généralisée / simple angle dans ce cas.

Cette équation différentielle modélise la dynamique de notre axe de robot et peut être utilisée pour analyser le système ainsi pour développer le contrôle.

### 3.2.2.2 Analyse du modèle dynamique en boucle fermée

On assume qu'il n'y a pas de forces externes ( $F = 0$ ). Ainsi et on reçoit

$$\Gamma_m = ml^2\ddot{\theta} + mgl\cos\theta$$

Pour contrôler le bras du robot en position, la solution la plus simple est un contrôleur PD dont l'expression pour la stabilisation autour de la position de consigne nulle est donnée comme suit :

$$\Gamma_m = -(p \cdot \theta + d \cdot \dot{\theta})$$

En introduisant le contrôleur dans l'équation (1.5), on obtient pour  $F=0$ :

$$I\ddot{\theta} + d \cdot \dot{\theta} + p \cdot \theta = -mgl\cos\theta$$

Pour ce système de robot contrôlé, on peut trouver les fréquences propres  $\omega$  en se basant sur l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 + \frac{d}{I}\lambda + \frac{p}{I} = 0$$

Les valeurs propres de cette équation caractéristique sont données comme suit :

$$\lambda_{1/2} = -\frac{d}{2I} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2I}\right)^2 - \left(\frac{p}{I}\right)^2}$$

Le système est stable si toutes les parties réelles de la fréquence propre sont négatives. C'est le cas pour tous les  $d > 0$  (en assumant  $p$  est positif). Si l'on introduit les vrais paramètres d'un système réel les fréquences propres peuvent être quantifiées et l'on peut ajuster les paramètres du contrôleur ( $p, d$ ) selon les besoins.

**Synthèse** L'exemple du robot avec un seul bras montre très simplement la modélisation dynamique et l'analyse correspondante. Dans cette partie du cours, un formalisme pour développer le modèle dynamique pour les robots à plusieurs degrés de liberté est établi. Le principe reste le même et la généralisation sera discutée.

### 3.2.3 Modélisation dynamique directe et inverse

#### 3.2.3.1 Modélisation dynamique directe

Question : Si nous appliquons le profil de couple décrit dans la Figure 3- 3 au moteur de l'exemple précédent, quelle serait la fonction temporelle décrivant l'évolution de la position du TCP ?

Cet exemple illustre, le problème posé par la modélisation de la dynamique directe. Il est évident que la position et sa variation sont fonction du couple :

$$\theta(t) = f_D(\Gamma_m)$$

Où la fonction fD est appelée "Modèle Dynamique Direct (M.D.D)". Il faut observer que la résolution de cette équation revient à intégrer l'équation différentielle du modèle dynamique.

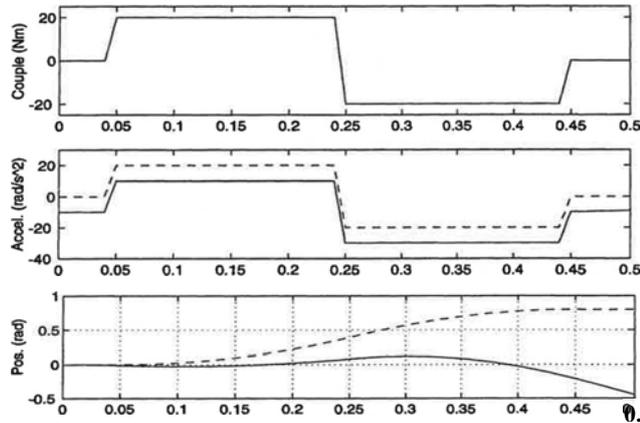


Figure 3- 3. Réaction du robot sur un couple prédéfini en fonction du temps (s)

**Modélisation de la dynamique directe :** La réaction à un couple prédéfini est une équation différentielle qui correspond à l'expression du modèle dynamique direct.

Cette expression peut se présenter sous la forme d'une équation d'état ou sous la forme d'une fonction de transfert, pour le cas particulier d'une représentation linéaire.

#### 3.2.3.2 Modélisation dynamique inverse

Question : Si nous désirons que la position de l'extrémité du robot se déplace en fonction du temps selon le graphe de la Figure 3- 4, quelle sera la fonction temporelle du couple à appliquer au moteur?

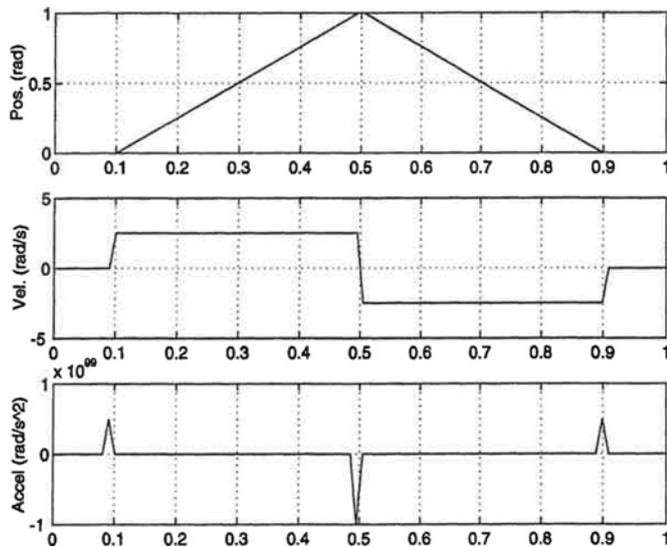


Figure 3- 4 Couple nécessaire pour réaliser un mouvement prédéfini en fonction du temps (s)

Cette question illustre le problème de **la modélisation de la dynamique inverse**. Cette fonction, ou relation inverse, lie l'évolution de la position, des vitesses et des accélérations souhaitées aux couples d'entrée nécessaires.

$$\Gamma_m(t) = f_I(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})$$

Où la fonction  $f_I$  est appelée le "Modèle Dynamique Inverse (M.D.I.)".

### **Modélisation de la dynamique inverse**

**L'expression algébrique du couple généralisé en fonction des valeurs des consignes de position généralisées, des vitesses généralisées et accélérations généralisées correspond au modèle dynamique inverse.**

### **3.2.4 Généralisation des modèles MDI et MDD :**

L'exemple précédent, en tant que tel, est trivial mais il montre bien les problèmes que nous cherchons à résoudre dans la modélisation de la dynamique. En général, ces deux fonctions (M.D.D. et M.D.I.) sont plus complexes que pour l'exemple. Elles dépendent non seulement de l'évolution de la position et des couples mais aussi de leurs dérivées temporelles.

Le lecteur attentif aura remarqué qu'une relation existe entre ces deux modèles.

En effet,  $M.D.I. = [M.D.D.]^{-1}$  ou  $f_D = f_I^{-1}$

On peut maintenant généraliser les définitions données pour les modèles dynamiques des robots. Les modèles dynamiques montrés dans la Figure 3- 5 représentent les transformations entre les vecteurs de couples généralisés et les déplacements généralisés. Chaque élément dans ces vecteurs correspond à un degré de liberté.

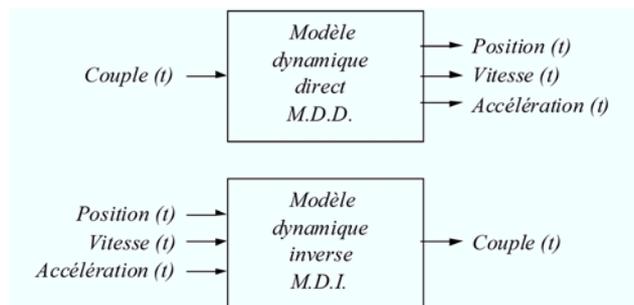


Figure 3- 5. Relations dynamiques directe et inverse d'un robot.

Dans la majorité des cas, le M.D.D. est utilisé dans la simulation (l'analyse) des robots tandis que le M.D.I. est plus utile pour le dimensionnement de l'actionnement (exemple Figure 3- 6) et la commande en position du robot.

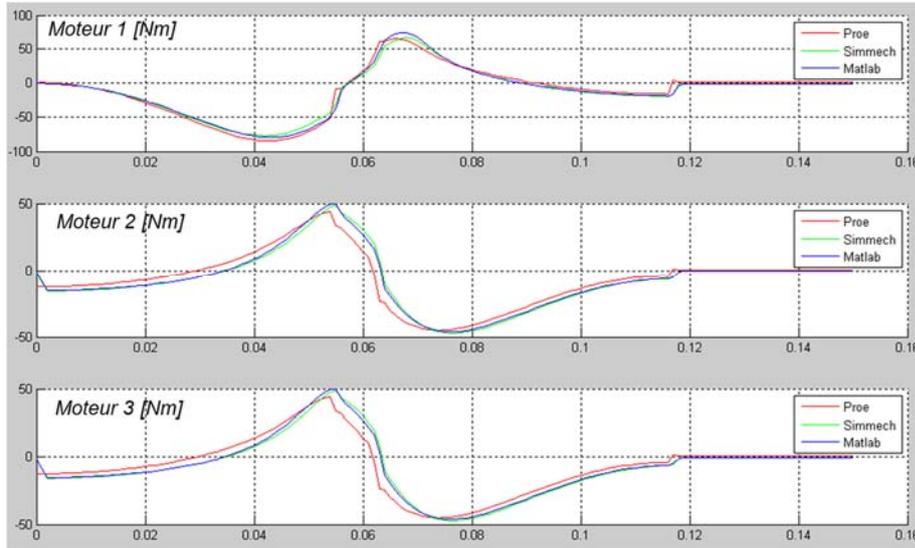


Figure 3- 6. Exemples de couples dynamiques d'un robot Delta suite à une trajectoire de prise dépose elliptique (accélération =15g et 1kg de charge)

### 3.3 Modélisation dynamique d'un robot

#### 3.3.1 Introduction

Pour une application donnée l'utilisateur (l'opérateur humain) peut décrire d'une façon explicite la tâche à effectuer. Ceci correspond à une trajectoire exprimée généralement par une fonction décrivant l'évolution dans le temps de la position suivie, du profil de vitesse ou du couple exercé par l'organe terminal du robot. On comprend donc que c'est le modèle dynamique inverse qui vient le premier à l'esprit quant à la commande en ligne. En utilisant le M.D.I., les couples a priori nécessaires pour commander chaque actionneur, en vue d'exécuter une tâche désirée de l'organe terminal peuvent être déterminés. Ces consignes ou plutôt l'évolution de ces consignes dans le temps peuvent être évaluées à l'avance. Le but de cette section est d'étudier la forme générale des équations dynamiques pour mettre en évidence les différents termes qui interviennent. On exposera leurs propriétés spécifiques. Ces termes, sous des formes différentes, se retrouvent dans tous les modèles dynamiques des robots. Exprimé dans la forme à espace d'état le modèle dynamique inverse de tout robot est donné par l'expression générale suivante

$$\Gamma = B(q) \cdot \ddot{q} + G(q) + C(q, \dot{q}) + F(q, \dot{q}) + K(q) \quad \text{eq. 3. 3}$$

$\Gamma$	le vecteur de couple généralisé
$q, \dot{q}, \ddot{q}$	le vecteur de déplacement généralisé et ses dérivées temporelles
$B(q)$	la matrice d' inertie du robot dépendant de sa position
$G(q)$	le vecteur contenant les termes dus à la gravité
$C(q, \dot{q})$	le vecteur avec les termes dus aux effets centrifuges et de Coriolis
$F(q, \dot{q})$	le vecteur contenant les termes dus à tous les effets de frottement
$K(q)$	le vecteur de rigidité du robot (dépendant de la position des bras du robot)

Cette équation générale s'applique à tous les robots quel que soit le type de structure. Les perturbations, par définition, sont inconnues a priori et donc ne peuvent pas être incluses dans cette forme d'équation d'état. Toutefois, dans les applications pratiques, si la perturbation peut être

mesurée avant d'agir sur le robot, alors leurs influences peuvent être minimisées voir éliminées par une compensation à priori. Certains types de perturbations peuvent être quantifiés statistiquement (distribution, variance, et par la suite peuvent donc être compensés de manière semi-déterministe. Ces perturbations se manifestent le plus souvent sous formes de couples perturbateurs aléatoires. Elles sont par conséquent efficacement corrigées à l'aide d'architectures de régulation en couples pour laquelle l'utilisation du modèle dynamique est particulièrement appropriée.

### 3.3.2 Développement du modèle dynamique

La suite de ce chapitre décrira le développement du modèle dynamique de robots grâce à deux méthodes différentes, l'approche de Lagrange et l'approche de Newton-Euler. Il est évident que **seulement les méthodes sont différentes, et pas le résultat final**. Les analyses vont être brèves et sommaires, plus de détails sont disponibles dans les références en fin de ce chapitre.

Le modèle dynamique peut être représenté dans différentes coordonnées selon les besoins. Dans les paragraphes de chapitre, on se focalisera sur la représentation en coordonnées généralisées, cela veut dire, les coordonnées définies par les articulations du robot. La représentation en coordonnées cartésiennes peut être déduites en utilisant le Jacobien.

Pour simplifier l'analyse, les hypothèses suivantes sont considérées :

- Les segments de la structure et les transmissions sont tous rigides
- Les masses et inerties de la structure sont constantes
- Les inerties des rotors des moteurs sont négligées

## 3.4 Développement du modèle dynamique par l'approche de Lagrange

### 3.4.1 Elaboration du modèle dynamique

Le formalisme de Lagrange, déjà connu de la mécanique ou physique, permet de décrire les équations du mouvement des mécanismes en termes de travail de l'énergie du système. L'équation de Lagrange :

$$\Gamma_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \quad \text{eq. 3. 4}$$

$$L = T - U \quad \text{eq. 3. 5}$$

Où

$q_i$	est la coordonnée généralisée correspondante à l'articulations d'indice $i$ (p. ex. angle d'une articulation de robot)
$\Gamma_i$	est le couple généralisé associé à l'articulation d'indice $i$ . Il correspond à la somme des forces externes (couples moteurs, force appliquée à l'organe terminal, ... ) et des forces dissipatives (frottements, amortissements internes, auxquelles le mécanisme est soumis à l'articulation d'indice $i$ ).
$T$	L'énergie cinétique totale du robot
$U$	L'énergie potentielle totale du robot

En utilisant l'équation de Lagrange, on peut dériver l'équation différentielle qui représente la dynamique d'un robot (eq. 3. 1). L'application de la méthode de Lagrange exige une détermination de l'énergie totale disponible dans le mécanisme et du travail externe fourni au système. Ceci nécessite :

1. La sélection de coordonnées généralisées appropriées
2. L'identification de couples généralisés
3. L'établissement de l'énergie cinétique et potentielle de tous les éléments (bras) du robot

L'établissement des équations de l'énergie (point 3) nécessite la détermination de toutes les positions et les vitesses des segments individuels du robot ainsi que de leurs masses et moments d'inertie. Trouver les positions et les vitesses revient à ce qui a été abordé aux chapitres précédents, c'est-à-dire la connaissance des matrices de transformation et le Jacobien.

Avant d'aborder les détails sur le développement des énergies, quelques préliminaires traitant des jacobiens sont rappelés. Différents types de matrices Jacobiennes existent. La plus importante est celle qui relie les vitesses  $\dot{q}_j$  des articulations au vecteur de vitesse de l'organe terminal (vecteur de vitesse translationnelle et rotationnelle). Pour développer l'énergie cinétique, nous avons également besoin de relier les vitesses des articulations  $\dot{q}_j$  aux vitesses du centre de masse des différents segments sériels du robot<sup>1</sup>. L'expression du Jacobien  $J^i$  de l'élément (segment)  $i$  du robot est obtenue d'une manière identique à celle de l'organe terminal (ref. Chapitre Jacobien).

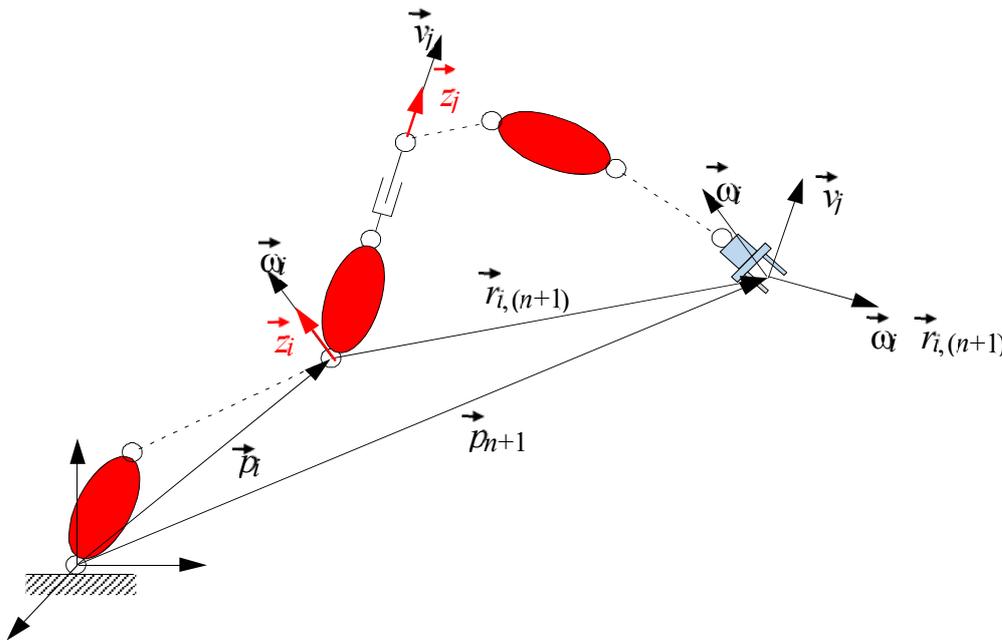


Figure 3- 7. Représentation cinématique d'un robot sériel

La décomposition du Jacobien pour les segments successifs du robot nous donne ce qui suit :

$$\begin{pmatrix} v_i \\ \omega_i \end{pmatrix} = J^i \dot{q} = \begin{pmatrix} J_p^i \\ J_o^i \end{pmatrix} \dot{q} \tag{eq. 3. 6}$$

<sup>1</sup> Un robot sériel est constitué de  $n$  segments articulés rigides, dits également éléments. Chaque segment rigide est mécaniquement lié à un segment en amont et un autre en aval, sauf pour les cas des premiers et derniers segments.

$$J^i = \begin{bmatrix} J_p^i \\ J_o^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{p,1}^i & J_{p,2}^i & \dots & J_{p,i}^i & 0 & \dots & 0 \\ J_{o,1}^i & J_{o,2}^i & \dots & J_{o,i}^i & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{eq. 3. 7}$$

Sachant que :

$$v_i = J_p^i \dot{q} \qquad \omega_i = J_o^i \dot{q}$$

L'énergie totale contenue dans le mécanisme, est donnée par la somme des contributions dues aux mouvements translationnels et rotationnels de tous les centres de gravité des différents corps qui composent le robot.

L'énergie cinétique transitionnelle totale  $T_T$  et L'énergie cinétique rotationnelle totale  $T_R$  sont exprimées comme suit :

$$T_T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^T v_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{q}^T J_p^{(i)T} J_p^{(i)} \dot{q} \quad \text{eq. 3. 8}$$

$$T_R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i^T (R_i I_i R_i^T) \omega_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \dot{q}^T J_o^{(i)T} (R_i I_i R_i^T) J_o^{(i)} \dot{q} \quad \text{eq. 3. 9}$$

Où

$I_i$	est le moment d'inertie du bras $i$
$R_i$	est la matrice de rotation entre le référentiel d'inertie (base du robot) et le référentiel du bras $i$

L'énergie cinétique totale est donnée comme suit :

$$T_T = T_T + T_R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( m_i \dot{q}^T J_p^{(i)T} J_p^{(i)} \dot{q} + \dot{q}^T J_o^{(i)T} R_i I_i R_i^T J_o^{(i)} \dot{q} \right) \quad \text{eq. 3. 10}$$

En supposant que les bras du robot sont parfaitement rigides, l'énergie potentielle provient de la seule contribution des forces de gravité.

$$U = - \sum_{i=1}^n m_i \cdot g \cdot p_i \quad \text{eq. 3. 11}$$

Où	<table border="0"> <tr> <td style="padding-right: 10px;"><math>m_i</math></td> <td>est la masse du bras <math>i</math></td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 10px;"><math>g</math></td> <td>est le vecteur de gravité représenté dans le référentiel d'inertie (base du robot)</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 10px;"><math>p_i</math></td> <td>est le vecteur de position du centre de masse du segment <math>i</math> par rapport au référentiel d'inertie</td> </tr> </table>	$m_i$	est la masse du bras $i$	$g$	est le vecteur de gravité représenté dans le référentiel d'inertie (base du robot)	$p_i$	est le vecteur de position du centre de masse du segment $i$ par rapport au référentiel d'inertie
$m_i$	est la masse du bras $i$						
$g$	est le vecteur de gravité représenté dans le référentiel d'inertie (base du robot)						
$p_i$	est le vecteur de position du centre de masse du segment $i$ par rapport au référentiel d'inertie						

La matrice d'inertie  $B(q)$  d'un robot, fonction de la posture du robot (position des articulations), est définie par l'expression suivante :

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T B(q) \dot{q} \quad \text{eq. 3. 12}$$

Que nous pouvons réécrire sous forme scalaire :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad \text{eq. 3. 13}$$

$b_{ij}$  sont les éléments de la matrice d'inertie  $B$  à la ligne  $i$  et la colonne  $j$ .

La mise en correspondance est équations (eq. 3. 10) et (eq. 3. 12) permet d'obtenir l'expression la matrice Jacobienne :

$$B(q) = \sum_{i=1}^n \left( m_i J_p^{(i)T} J_p^{(i)} + J_o^{(i)T} R_i I_i R_i^T J_o^{(i)} \right) \quad \text{eq. 3. 14}$$

L'équation (eq. 3. 13) permettra de déduire les composantes  $b_{ij}$  de la matrice d'inertie en fonction des variables de la cinématique (Jacobiennes et matrices de rotation) et des inerties de chaque segment du robot. Le couple généralisé  $\Gamma_i$ , donc le modèle dynamique inverse, est alors obtenu en développant équation (eq. 3. 4) grâce à la connaissance des composantes de la matrice d'inertie  $b_{ij}$ .

$$\Gamma = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

Nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (\text{L'énergie potentielle dépend uniquement de la position})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^n b_{ij} \dot{q}_j \right) = \sum_{j=1}^n b_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{d(b_{ij})}{dt} \dot{q}_j \\ &= \sum_{j=1}^n b_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial(b_{ij})}{\partial q_k} \dot{q}_k \dot{q}_j \end{aligned}$$

$$\Gamma = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ij} \dot{q}_k \dot{q}_j \right) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \dot{q}_k \dot{q}_j$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^n m_j \left( g \cdot \frac{\partial p_j}{\partial q_i} \right) = \sum_{j=1}^n m_j q J_{p,i}^j \quad (\text{par définition de } J_{p,i}^j)$$

Finalement, l'expression du modèle dynamique du robot de la Figure 3- 7 est donné par la relation ci-dessous.

$$\Gamma_i = \underbrace{\sum_{j=1}^n b_{ij} \ddot{q}_j}_a - \underbrace{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k \dot{q}_j}_b - \underbrace{\sum_{j=1}^n m_j g J_{p,i}^j}_c \quad \text{eq. 3. 15}$$

### 3.4.2 Interprétation des différents termes du modèle dynamique

Les termes (a), (b) et (c) de l'expression du modèle ci-dessus (eq. 3. 15) contribuent à la génération du couple dynamique au niveau de chaque articulation. Rappelons que  $\Gamma_i$ , représente le vecteur des forces généralisées et l'expression reste valable pour tout les robots. Cette équation peut aussi être représenté sous forme matricielle :

$$[\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n]^T = B(q) \cdot \ddot{q} + H(q, \dot{q}) \quad \text{eq. 3. 16}$$

L'appréciation de ces termes (a), (b) et (c) confirme que le modèle dynamique inverse dépend des positions, vitesses et accélérations généralisées de la manière suivante :

**(a) Des termes des accélérations.'**

- Les coefficients  $b_{ii}$  représentent les inerties de l'articulation  $i$  si toutes les autres articulations sont bloquées.  
Les autres coefficients ( $b_{ij}$ ) sont associés aux couplages inertiels entre les axes et expriment les effets de l'accélération d'une articulation à l'autre. Notons que les couplages entre les différentes articulations sont souvent réduits par le choix de la construction du robot.

**(b) Des termes quadratique des vitesses**

- Les termes  $\left( \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{jj}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_j^2$  expriment les forces centrifuges induites à l'articulation  $i$  par la vitesse de l'articulation  $j$   
Notons que  $\left( \frac{\partial b_{ii}}{\partial q_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{ii}}{\partial q_i} \right) = 0$  car  $\frac{\partial b_{ii}}{\partial q_i} = 0$
- Les autres termes ( $k \neq j$ ) représentent les effets Coriolis induits à l'articulation  $i$  par les vitesses des articulations  $j$  et  $k$ .

**c) Des termes dues à l'accélération (force) gravitationnelle**

En introduisant des forces non conservatives comme les frottements visqueux, frottement sec ou même une force appliquée  $h$  au niveau de l'outil, l'expression du couple généralisé se retrouve modifiée comme suit :

$$\tau - J^T(q) \cdot h = B(q)\ddot{q} + H(q, \dot{q}) \cdot \dot{q} + F_v \dot{q} + F_s \operatorname{sgn}(\dot{q}) \tag{eq. 3. 17}$$

$\tau$	Est le vecteur de couple de commande articulaire
$J^T(q) \cdot h$	Est la projection de la force appliquée au niveau de l'outil sur les articulation
$F_v \dot{q}$	Est le vecteur de force de frottement visqueux
$F_s \operatorname{sgn}(\dot{q})$	Est le vecteur de force de frottement sec

La relation (eq. 3. 17) peut également être détaillée comme ci-dessous :

$$\tau - J^T(q) \cdot h = B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) \cdot \dot{q} + F_v \dot{q} + F_s \operatorname{sgn}(\dot{q}) - G(q) \tag{eq. 3. 18}$$

Où les éléments  $c_{ij}$  de la matrice C et le vecteur de gravité sont définis par :

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k \dot{q}_j$$

eq. 3. 19

$$g_i(q) = \sum_{j=1}^n m_j q J_{p,i}^j$$

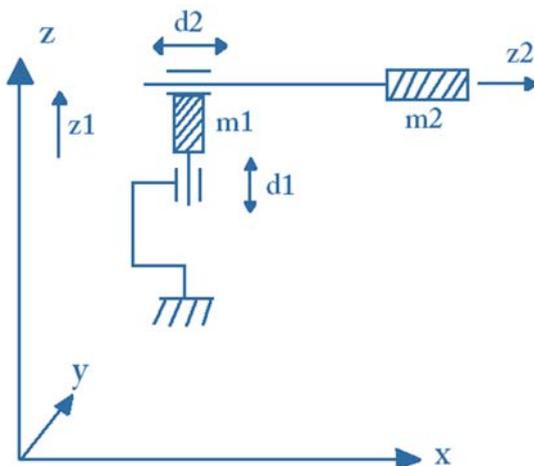
eq. 3. 20

### 3.4.3 Approche de Lagrange pour la modélisation dynamique de robots : Présentation de la méthode

L'approche de modélisation dynamique de robots par la méthode de Lagrange est basée sur le calcul des énergies cinétiques et potentiels et sur la dissipation de ces différentes énergies pour la réalisation du mouvement. Cependant, en observant en détail le résultat des relations (eq. 3. 17) à (eq. 3. 20), il en ressort **qu'il n'y a pas besoin de faire le calcul de ces énergies pour déduire l'expression du couple dynamique**. La méthode de Lagrange pour l'obtention du modèle dynamique de robots sériels est une **méthode systématique** qu'il faut mettre en œuvre selon les étapes suivantes :

1. Décrire le robot
  - a. Identifier l'outil et les articulations diverses.
  - b. Identifier les segments du robot.
2. Définir le référentiel de base du robot.
3. Définir les sens positif et négatif de chaque articulation.
4. Ecrire les Jacobiens locaux ramenés à chaque segment.
5. Déduire la matrice d'inertie
  - a. Grâce aux éléments inertiels de chaque segment (masse et tenseur d'inertie)
  - b. Grâce aux Jacobiens ramenés aux segments (pnt 4).
6. Déduire les différentes composantes de l'équation dynamique (Coriolis, Centrifuge et Gravité).

### 3.4.4 Exercice, modélisation dynamique d'un robot cartésien à 2 axes par la méthode de Lagrange



**Solution**, voir série exercices

- Déduire le modèle dynamique du robot cartésien 2 axes de la figure ci-contre. **m1** et **m2** sont les masses en mouvement des deux axes horizontal **x** et vertical **z**.
- Déduire la représentation en schéma bloc de la dynamique de ce robot.
- Ecrire l'équations d'état du robot.

### 3.5 Développement du modèle dynamique par l'approche de Newton-Euler

Le formalisme de Newton-Euler est basé sur le théorème général de la mécanique qui applique le bilan d'efforts ou inventaire des forces agissant au centre de masse de chaque corps dont le manipulateur est constitué.

#### L'équation de Newton

$$f = m\dot{v}_c \tag{eq. 3. 21}$$

#### L'équation d'Euler

$$\mu = I_c\dot{\omega} + \omega \times I_c\omega \tag{eq. 3. 22}$$

Où :

$\mu, f$	sont les vecteurs des forces (ou couples) agissant sur les centre de gravité
$I_c$	est le moment d'inertie d'un corps
$-c$	est l' indice indiquant une grandeur mesurée relative à un référentiel placé au centre de gravité d'un corps choisi (segment du robot)
$\times$	représente l'opération d'un produit vectoriel

La puissance analytique de cette méthode se cache dans l'élaboration de ces deux équations. Le développement de ces deux équations conduit aux deux identités itératives suivante:

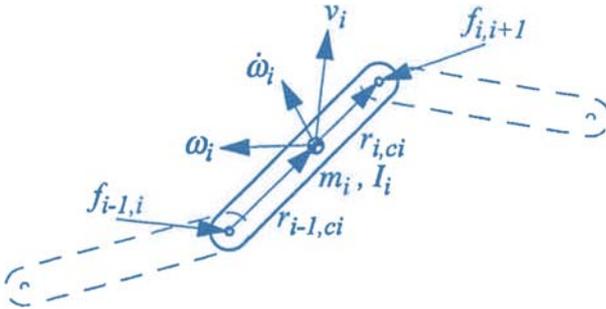


Figure 3- 8, Les forces agissant au centre de masse d'un corps i du robot

L'équation de Newton appliquée au segment  $i$ , pour son déplacement en translation, est la suivante :

$$f_{i-1,i} - f_{i,i+1} + m_i g - m_i \dot{v}_{ci} = 0 \quad i \in [0, n] \tag{eq. 3. 23}$$

Où :

$I$	est l'indice du corps étudié (segment)
$f_{j,k}$	est la force d'interaction entre deux corps d'indices respectifs $j$ et $k$ . interaction avec les corps amont et aval
$m_i$	représente la masse du segment considéré du robot
$G$	est le vecteur d' accélération gravitationnelle
$V$	est le vecteur de vitesse linéaire du centre de gravité $i$

L'équation d'Euler appliquée au segment  $i$ , pour son déplacement en rotation, est la suivante :

$$\mu_{i-1,i} - \mu_{i,i+1} + (r_{i,ci} \times f_{i,i+1}) - (r_{i-1,ci} \times f_{i-1,i}) - I_{ci}\dot{\omega}_i - (\omega_i \times I_{ci}\omega_i) = 0 \quad i \in [0, n] \tag{eq. 3. 24}$$

Où :

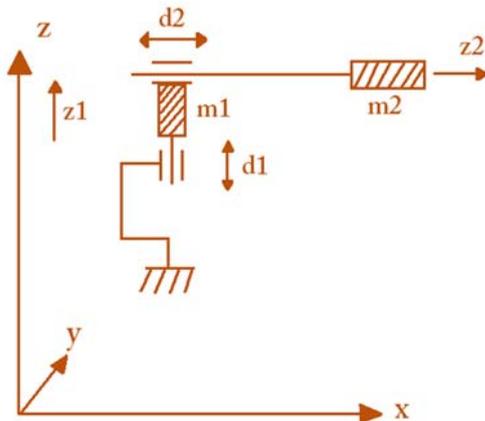
$\mu_i$	est le couple d'interaction entre deux corps amonts et aval ( $i, i+1$ ) ( $i-1, i$ )
$r_{j,ck}$	est le vecteur de position permettant de localiser le centre de gravité du $k^{eme}$
$I_i$	corps par rapport à l'origine du $j^{eme}$ repère
$\omega_i$	est la matrice d'inertie par rapport au centre de gravité

### 3.5.1 Approche de Lagrange pour la modélisation dynamique de robots : Présentation de la méthode

L'approche de modélisation par la méthode de Newton Euler nécessite d'éclater le robot en segments articulés distincts. L'équation de Newton (eq. 3. 21) et celle d'Euler (eq. 3. 22) sont appliquées à chaque corps. Il est évident que l'équation d'Euler ne s'applique pas aux corps en pure translation et que l'équation de Newton ne s'applique pas aux corps en pure rotation autour d'un pivot fixe. L'application de cette approche peut ainsi être résumée par la procédure suivante :

1. Décrire le robot-
  - a. Identifier le point outil (TCP) et les articulations diverses.
  - b. Identifier les segments du robot.
2. Définir le référentiel de base du robot.
3. Définir les sens positif et négatif de chaque articulation.
4. Ecrire les équations de Newton et d'Euler pour chaque segment.
5. Résoudre le système d'équations formé et déduire le modèle dynamique formé par l'expression des couples articulaires pour chaque segment.

### 3.5.2 Exercice, modélisation dynamique d'un robot cartésien à 2 axes par la méthode de Newton-Euler



- Déduire le modèle dynamique du robot cartésien 2 axes de la figure ci-contre. **m1** et **m2** sont les masses en mouvement des deux axes horizontal **x** et vertical **z**.

**Solution**, voir série exercices

### 3.6 Discussion sur les deux approches

Ces deux approches ont montré la puissance analytique et l'équivalence de ces deux techniques. On peut conclure que les techniques de Lagrange et de Newton-Euler résultent de la considération de corps ponctuels. La méthode de Newton-Euler prend en compte les efforts de réactions entre corps voisins qui est utile en certains cas; la méthode de Lagrange ne tient pas compte de ces forces de

manière directe dans ses calculs mais considère uniquement les travail d'entrée, l'énergie stockée et des coordonnées généralisées judicieusement choisies. Le choix de l'une ou de l'autre de ces deux méthodes dépend des facteurs qui vont au-delà de la portée de ce texte.

On peut encore trouver de nombreuses autres méthodes dans des livres de robot. Toutes ces techniques conduisent à des formulations qui varient dans leurs formes mais pas dans leurs contenus, ceci bien sûr si des hypothèses de départ identiques sont utilisées.

Ces modèles mathématiques, dont les complexités sont fonction du nombre de degrés de liberté totale du système, sont directement implantables dans les calculatrices (ordinateurs, microprocesseurs, microcontrôleurs ...) se trouvant au cœur d'une commande moderne.

### 3.7 Autres aspects du modèle dynamique d'un robot

Jusqu'à un certain point, cette approche quasi-linéarisée de l'asservissement d'un robot est justifiée mais ses limites d'application doivent être bien évaluées et comprises. Pour effectuer un mouvement de l'organe terminal, il est nécessaire que le moteur fournisse une consigne bien déterminée. La structure mécanique est aussi soumise aux couples parasites. Ce modèle incluent le couplage des inerties, l'effet de la gravité (poids des moteurs, bras et articulations), les effets de Coriolis et centrifuges, les différents types de frottements (dans les moteurs et dans les articulations), l'élasticité de la structure, etc. Toutes ces influences dont la liste présentée est loin d'être complète, sont néfastes dans la majorité des situations mais très difficile à éliminer totalement. Elles sont toutes négligées dans le modèle simplifié présenté auparavant. L'explication est à rechercher d'une part dans la complexité d'implémentation de ce modèle considérant le matériel utilisé dans une commande traditionnelle et d'autre part dans le fait que certaines hypothèses simplificatrices sont aisément justifiables. Par exemple les effets des forces centrifuges et Coriolis sont souvent tellement faibles aux vitesses d'opération qu'elles influencent peu  $\Gamma$ . Un modèle vraiment complet et détaillé, devrait prendre en compte non seulement les effets susmentionnés mais aussi ceux dus aux propriétés intrinsèques des moteurs telles que les frottements, les limites dans les caractéristiques, les variations cycliques de couple ou de vitesse de sortie dus à des erreurs ou à des limites de fabrication. Une liste relativement complète est donnée dans la table 3.1.

Il va sans dire qu'un modèle de robot absolument complet, destiné à une utilisation soit en simulation soit pour être incorporé dans un contrôleur, devrait prendre en compte tous ces effets. La décision d'inclure ou pas un élément dépend de la capacité du concepteur de commande à évaluer d'une façon précise les grandeurs absolues et relatives de ces contributions (composantes parasites et composante utile). La détermination de l'importance respective de ces contributions doit être effectuée dans toute la phase de travail du robot, autrement dit il s'agit d'évaluer ces contributions pour toutes les combinaisons de vitesses, accélérations et renversements de marche dans toute la région qui compose le volume de travail du robot. Revenons encore une fois au modèle dynamique linéarisé dont l'équation classique a été montrée auparavant. La motivation principale pour considérer seulement les effets inertiels et/ou leurs taux de variation, est que dans la majorité des cas le couple correspondant (couple utile) est celui qui prédomine. Un tel modèle peut être considéré comme un modèle dynamique partiellement complet. Selon les critères de l'application considérée et le robot utilisé (sa conception mécanique) cette méthode peut être suffisante. Une règle générale est que pour quantifier la qualité d'une modélisation on doit pouvoir attribuer soit à l'aide de la théorie, soit de préférence par des essais pratiques des ordres de grandeurs à chacun des effets dynamiques. L'amplitude de ces grandeurs, ainsi que leurs taux de variation permettront de déterminer où l'effort de modélisation doit se concentrer.

Il va de soit que pour pallier aux déviations de performance, dûes à un modèle incomplet, pendant l'opération en-ligne on aura besoin d'inclure un régulateur accompagnateur pour faire les corrections. Le chapitre Commande des Robots reviendra sur ce sujet. Il est très important de retenir qu'un régulateur est aveugle car il n'a aucune notion de la dynamique du système. Par conséquent il impose toujours des limitations aux performances possibles avec le robot.

Plus il y a d'informations sur la dynamique incorporées dans la commande, mieux réagira le robot.

### 3.8 Discussion et conclusions :

Une phase très importante dans la conception et le développement d'une commande de robot est l'analyse, effectuée de préférence par simulation. Celle-ci est implantée numériquement la plus facilement à l'aide d'un ordinateur d'une puissance de calcul adéquate.

Il faut rappeler que le modèle dynamique direct est sensé être une bijection entre une représentation numérique et les divers phénomènes physiques qui se déroulent dans la structure mobile du robot. La flexibilité de cette représentation numérique est telle qu'elle permet à l'ingénieur à l'aide des simulations d'avoir une feeling (idée) très réaliste du comportement du robot. Ce comportement peut être étudié pour toute la gamme des consignes de vitesse ou couple que l'on souhaite.

L'objectif de la commande dynamique est d'imposer au robot un fonctionnement prévu. Le choix de l'algorithme dynamique approprié pour le robot varie de cas en cas, car les facteurs à considérer, que l'on a évoqués dans ce bref texte varient de robot en robot même pour deux robots du même modèle. La prédominance d'un des effets dynamiques, par exemple inertiel, de frottement, gravitationnel ou autre indique immédiatement l'endroit où l'accent doit être porté lors de la conception de la commande.

La grande diffusion et les faibles coûts des microprocesseurs, ont favorisé leur introduction dans le matériel utilisé par les techniques de l'automatique, ce qui a permis une sophistication presque illimitée des commandes des robots.

Fondamentalement les régulateurs réagissent seulement et uniquement à l'état de l'écart entre la consigne et la tâche à effectuer. Ces régulateurs dont les théories sous-jacentes sont bien développées sont vus dans les cours d'automatique. De nombreux travaux ont permis de garantir leurs performances par l'existence des larges marges de stabilité lors de leur application dans les commandes des robots. Une distinction principale entre les approches traditionnelles et celles incorporant des aspects dynamiques se situe au niveau de la génération et l'utilisation d'information à l'intérieur du contrôleur. Avec les commandes dynamiques l'information est générée à priori pour être utilisée pour corriger les erreurs prévues avant qu'elles surviennent. Les régulateurs au sens pur corrigent les erreurs après qu'elles sont survenues. Cela signifie que dans les robots hautement dynamiques (les couples des moteurs qu'on souhaite atteindre ainsi que leurs variations sont très importants), les commandes dynamiques seront toujours potentiellement plus rapides comparées aux régulateurs classiques. Un tel exemple est illustré par le robot DELTA à entraînement direct. A chaque instant d'échantillonnage un régulateur peut seulement voir tandis qu'une commande dynamique peut prévoir. L'utilisation des modèles dynamiques inverses n'exclut pas leurs associations avec des régulateurs classiques (par exemple PID), afin de tirer le meilleur parti de ces deux domaines, tel utilisés actuellement dans la commande du robot DELTA (voir [1][2][3]).

La recherche d'une commande adéquate pour une application donnée requiert beaucoup de bon sens et une connaissance suffisante des ordres de grandeur non seulement physiques, mais aussi de construction mécanique, et bien sûr économiques. Toutes les sources d'information sont utiles; des facteurs aussi divers que les rapports d'inertie, le choix des matériaux, la phase souhaitée de l'application (limites de vitesses, régions plus critiques aux tâches désirées,...), ou tout autre contrainte, sont utiles pour les décisions à prendre. Toutes celles-ci ainsi que avec les hypothèses simplificatrices constituent des aspects d'importance considérable dans la conception de commande de robot performant !

### 3.9 Annexe 1- Implémentation de modèles dynamiques

Un point important à évoquer concerne la technologie de mise en œuvre et les considérations nécessaires à l'implémentation des modèles dynamiques pour des objectifs de contrôle. De nombreuses méthodes sont exposées dans la littérature au sujet de l'implémentation numérique des contrôleurs. Naturellement une solution universelle n'existe pas. On présentera ici quelques exemples typiques des points de départ à considérer. La solution finale dépend des choix opérés. Ils varient avec chaque situation à traiter.

#### Le but visé dans une implémentation est le suivant:

Minimiser la puissance nécessaire pour le calcul d'un modèle dynamique en gardant le nombre d'opérations requises minimale, tout en restant le plus fidèle possible au modèle original. Pour être optimale il faut tenir compte du matériel à disposition (mips, Mflops). De cette manière il est possible de calculer la dynamique en temps réel avec de faibles périodes d'échantillonnage. On notera que l'optimisation des calculs est particulièrement importante si le robot contient un grand nombre de degrés de liberté (>3: modèle complexe), et si on a une grande précision et/ou de hautes cadences de travail sont requises. Pour atteindre cet objectif plusieurs aspects doivent être considérés :

*i)* On a en général tendance à développer des équations sous forme explicite. Ceci est très utile pour simuler et dimensionner le robot. Dans le cas d'une implémentation numérique pour laquelle la puissance de calcul est limitée, il sera utile de formuler les équations dynamiques sous des formes récursives ou itératives (formes implicites). En effet ces formulations profitent des caractéristiques intrinsèquement itératives ou récursives des manipulateurs telles que celles imposées par les contraintes cinématiques aux articulations (robots partiellement ou entièrement sériels). Le gain en temps de calcul peut être très important. Les résultats d'une étude présentée en [3] indique que d'une manière générale les formes explicites, en fonction du nombre de degrés de liberté (n), conduisent à des solutions avec un nombre total de calculs proportionnel à  $(n + n^2 + n^3 + n^4 + \dots)$ , les formes implicites efficacement écrites restent proportionnelle à (n). Les deux formes sont strictement équivalentes mais une est mieux adaptée à l'analyse tandis que l'autre à l'évaluation numérique.

*ii)* Une formulation pouvant être exécutée de manière efficace par plusieurs processeurs (parallélisme) peut augmenter de manière significative la vitesse d'exécution des algorithmes. Ceci peut être très intéressant dans le cas d'une implémentation centralisée du contrôle de plusieurs robots, par exemple dans le cas de déploiement pour tâches distribuées ou collaboratives entre plusieurs robots.

*iii)* L'utilisation des tableaux d'indexés associés à des algorithmes d'interpolation dans lesquels sont stockées des informations dynamiques évaluées hors-ligne. A la base de ces applications, on retrouve une forme modifiée de l'équation à l'espace d'état. Elle est connue dans la littérature sous le nom de la forme d'espace de configuration ("Configuration Space form"). Elle est donnée par :

$$\Gamma = B(q) \cdot \ddot{q} + G(q) + C'(q)2[\dot{q}_i \dot{q}_j] + C''(q)\dot{q}_i^2 + F(q) \cdot F''(\dot{q}) \quad \text{eq. 3. 25}$$

$C', C'', F'$ et $F''$	sont les fonctions découplées de l'équation de l'espace d'états original
$2[\dot{q}_i \dot{q}_j]$	est un vecteur dont les composantes représentent l'ensemble des produits des vitesses des axes du robot (liés aux effets Coriolis),
$\dot{q}_i^2$	est un vecteur dont les composantes représentent l'ensemble des termes où la vitesse apparaît au carrés (effets centrifuges)

Tous les autres symboles représentent les mêmes grandeurs que dans l'équation originale de l'espace d'état (eq. 3. 1).

L'avantage principal de cette formulation est que toutes les matrices sont des fonctions d'une variable indépendante : la position du robot. Cette propriété permet de calculer à l'avance ces matrices, de les stocker en mémoire sous forme de tableaux d'indexés, puis de s'en servir lors de l'opération en temps réel. Les vecteurs de vitesse et d'accélération sont évalués en temps réel directement à partir des informations provenant des capteurs. La rapidité d'accès requise est proportionnelle à la célérité avec laquelle le robot change de configuration. Le nombre de calculs (d'interpolations et accès mémoires) à réaliser est aussi proportionnel aux vitesses de déplacement du robot. La taille des tableaux d'indexés, qui dépend du nombre de positions discrétisées et la complexité des algorithmes d'interpolation, utilisés pour quantifier les espaces "entre-points" fait l'objet d'un compromis destiné à bien équilibrer la taille mémoire par rapport au nombre de calculs requis.

Si ces techniques n'offrent pas de solution ou ne sont pas applicables, alors on peut utiliser comme alternatives des modèles dynamiques délibérément simplifiés. Ces derniers sont développés par élimination des termes demandant une trop grande puissance de calcul par rapport à la contribution qu'elles amènent au résultat global. De telles simplifications sont fréquentes et se retrouvent très souvent dans les problèmes d'analyse tels que  $\sin\theta \approx \theta$  et  $\cos\theta \approx 1$ , pour  $\theta$  petit. En pratique, pour les robots, ces simplifications se traduisent par l'omission de petites masses ou inerties, des effets de frottement ou des effets dus au manque de rigidité, etc. Toutefois, elles introduisent des erreurs de modélisation dans la commande du robot, qui doivent être corrigées par un contrôleur de position boucle fermée. Il va sans dire que les simplifications varient de cas en cas.

Les différents aspects de la solution finale dépendent aussi et surtout du bon sens de l'ingénieur. Le choix d'un bon compromis peut apporter des gains immenses et rendre les algorithmes de réglage d'autant plus adaptés à l'amélioration des performances boucle fermée de la commande en position.

En conclusion, la première phase du développement d'une commande de robot devrait consister à amener des essais avec des régulateurs classiques et simples (PD, PID). Les performances optimales du robot doivent être déterminées en tenant compte de la stabilité, la robustesse, les précisions statique et dynamique, et le rejet des perturbations pour l'espace de l'application dans toute son intégralité. Dans les cas où les performances de la commande se heurtent à des limitations trop importantes, une commande dynamique (incorporant modèle dynamique) peut offrir une bonne solution. Notons que le facteur temps nécessaire pour le développement du modèle dynamique, est déterminant. En plus la commande dynamique n'a pas besoin d'être complète : une première implémentation pourrait contenir seulement une compensation des effets inertiels. Ce contrôleur serait ensuite continuellement et progressivement amélioré afin de satisfaire de nouvelles exigences (évolution du cahier des charges).

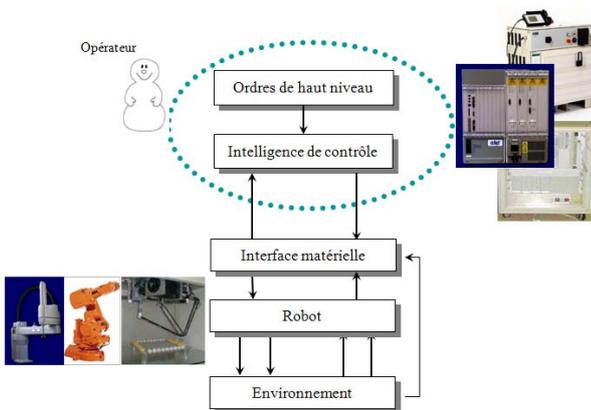
### 3.10 Références

- [1] Sciavicco, Lorenzo, and Bruno Siciliano. *Modelling and control of robot manipulators*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [2] Craig, John J. *Introduction to robotics: mechanics and control*. Vol. 3. Upper Saddle River, NJ, USA:: Pearson/Prentice Hall, 2005.
- [3] Codourey A, Contribution à la commande des robots rapides et précis, (Application au robot DELTA), these No. 922, 1991 (EPFL)
- [4] Dombre E., Khalil W., Modélisation et commande des robots, Editions Hermès, 1988.
- [5] Clavel, R., Conception d'un robot parallèle rapide à 4 degrés de liberté, thèse No. 925, 1 991 (EPFL)
- [6] Siciliano, Bruno, and Oussama Khatib, eds. *Springer handbook of robotics*. Springer, 2016.

## PARTIE IV

# Commande de robots

Lois de commande, génération de trajectoire  
et matériel



## RÉSUMÉ

Ce chapitre introduit les outils nécessaires à la compréhension, l'analyse et l'implémentation d'une commande numérique de robots industriels. Les lois de commande de la famille PID ainsi les lois non-linéaires basées sur les modèles dynamiques sont présentées. La génération de trajectoire et l'interpolation sont également abordés.

M. Bouri

## Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction .....</b>	<b>4</b>
<b>4.2</b>	<b>Structure générale du robot et de sa commande .....</b>	<b>5</b>
4.2.1	Définitions .....	5
<b>4.3</b>	<b>Composantes d'un robot .....</b>	<b>6</b>
4.3.1	L'axe .....	6
4.3.2	Le robot .....	7
<b>4.4</b>	<b>La partie algorithmique .....</b>	<b>8</b>
4.4.1	Aspects réglage et asservissement.....	9
4.4.2	Contrôleurs classiques P, PD, PID.....	9
4.4.3	Contrôleur PID cascadié .....	14
4.4.4	Réglage, mesure et quantification .....	15
4.4.5	Commandes de robots à base de modèle couplés .....	18
4.4.6	Conditions pour que les couplages soient considérés comme des perturbations.....	24
4.4.7	Le Becarful du réglage.....	25
<b>4.5</b>	<b>Génération des trajectoires du robot.....</b>	<b>26</b>
4.5.1	Rappel sur la transformation de coordonnées.....	26
4.5.2	Notion de trajectoires admissibles.....	27
4.5.3	Aspects géométriques des trajectoires de robots.....	28
4.5.4	Aspects temporel des trajectoires de robots .....	28
4.5.5	Génération de profils continus.....	30
4.5.6	Synchronisation des axes .....	32
<b>4.6</b>	<b>La partie matérielle d'une commande de robot.....</b>	<b>33</b>
4.6.1	Éléments d'une armoire de commande.....	33
4.6.2	Drives de moteurs et Bus de terrain .....	35
4.6.3	Le CANOpen (1Mbit/s) .....	36
4.6.4	Le PROFIBUS (9.6 kbit/s to 12 Mbit/s) .....	36
4.6.5	L'Ethercat .....	37
4.6.6	Commande cascadiée par bus de terrain.....	37
4.6.7	Avantages des bus de terrain.....	38
<b>4.7</b>	<b>Partie logicielle de la commande d'un robot.....</b>	<b>39</b>
4.7.1	Le système d'exploitation temps réel .....	39
4.7.2	Outils de développement d'applications temps réels embarquées.....	41
4.7.3	Mécanismes de communication temps réel .....	41
4.7.4	Liste de systèmes d'exploitation temps réel.....	42
4.7.5	L'application de commande du robot .....	43
4.7.6	La commande minimale : .....	44

<b>4.8</b>	<b>Annexe 1 : Calcul de profils de trajectoires .....</b>	<b>46</b>
4.8.1	Position du problème.....	46
4.8.2	Profil de position de type échelon .....	46
4.8.3	Profil de position de type Rampe (Ramp) .....	47
4.8.4	Profil triangulaire en vitesse .....	48
4.8.5	Profil de vitesse trapézoïdale .....	49
<b>4.9</b>	<b>Annexe 2 : Interpolation de trajectoires .....</b>	<b>51</b>
4.9.1	Interpolation linéaire de trajet.....	51
4.9.2	Interpolation circulaire.....	52
<b>4.10</b>	<b>Annexe 3- Quelques éléments de matériel .....</b>	<b>53</b>
4.10.1	Le bus à cartes .....	53
4.10.2	Les alimentations : .....	54

---

---

## 4.1 Introduction

La commande de robots est une science qui fait son chemin depuis l'existence de la notion même du robot. Cette science a permis d'appivoiser les robots et de les piloter afin que nous puissions les utiliser pour des tâches aussi bien diverses que complexes.

Le terme « **Commande de robots** » est très générique car il sous-entend tout ce qui touche au pilotage du robot. Ce terme peut tout aussi bien vouloir dire l'armoire de commande du robot, l'algorithme utilisé pour l'asservissement des axes du robot, le logiciel de la commande de robots ou les trois ensembles.

La commande de robots concerne les parties algorithmiques, logicielles et matérielles impliquées pour mener à bien les tâches que le robot doit réaliser.

## 4.2 Structure générale du robot et de sa commande

### 4.2.1 Définitions

La figure ci-dessous montre l'exemple d'un robot et de son armoire de commande liés par une connectique.

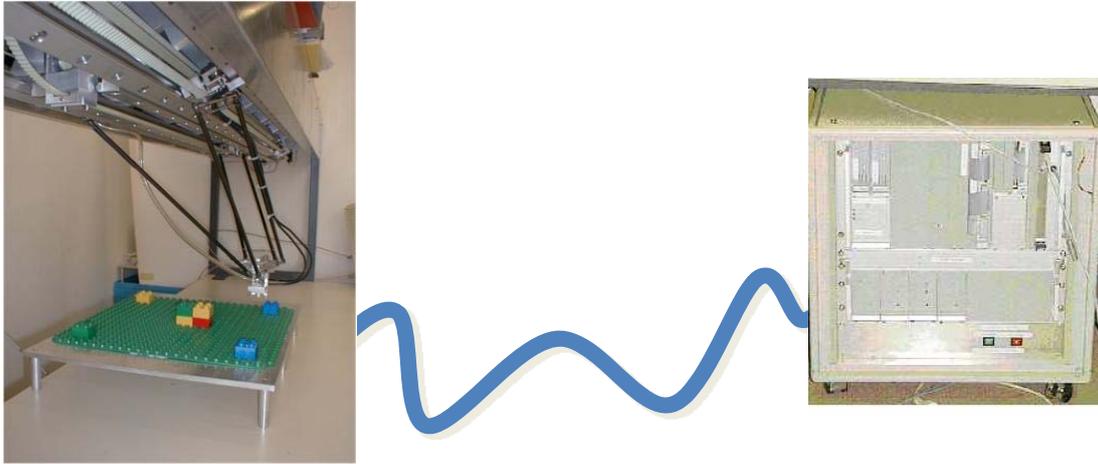


Figure 1- Robot Delta linéaire et son armoire de commande

Le robot est défini comme étant la structure mécanique poly-articulée en y associant la motorisation et l'instrumentation. L'armoire de la commande comporte toutes les cartes nécessaires à piloter le robot (cartes processeurs, cartes d'entrées-sorties analogiques et numériques, cartes de sécurité, ...), amplificateurs, alimentations, ventilateurs, ... Pour relier le robot à son armoire de commande, on distingue deux types de connectiques : la connectique de la puissance et la connectique de signaux (principalement liés aux capteurs).

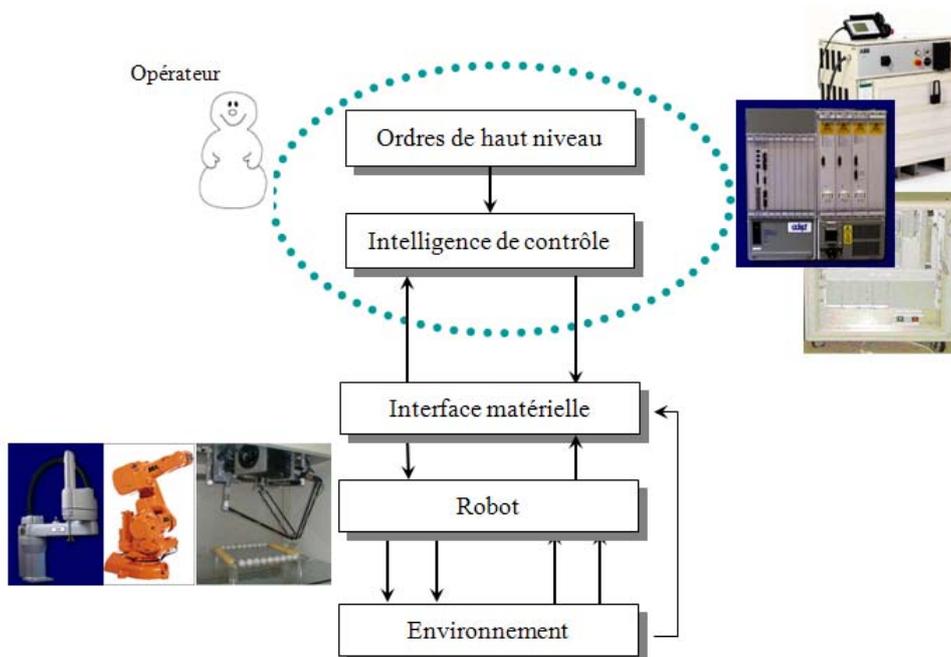


Figure 2- Structure générale d'un robot associé à sa commande numérique

Comme montré sur la figure 2, le robot est au centre du système (Robot, commande, environnement et l'opérateur). L'opérateur indique ses requêtes en termes de trajets à générer, de sorties à piloter ou de tests à effectuer. Ces ordres sont traités d'une manière logicielle. L'interface matérielle, comme le nom l'indique, constitue l'élément intermédiaire entre cette partie logicielle et tous les composants matériels reliés au robot (principalement les capteurs et les amplificateurs). Finalement le robot interagit avec l'environnement à travers des actions (préhenseur, actionneur de déplacement pneumatique tout ou rien,...) et des capteurs (présence/absence d'une pièce, fermeture ouverture d'une porte, capteur de force, détecteur d'extrémité...). L'environnement est très lié à l'application dont le robot doit faire partie; cela peut être un simple positionnement d'objets, un travail de collaboration autour d'une pièce, une soudure, un polissage, un ébavurage, ou même un usinage de pièces.

Notre chapitre sera ainsi divisé en trois sous-chapitres qui vont introduire et détailler les trois parties importantes d'une commande de robots, à savoir :

- La partie algorithmique.
- La partie matérielle.
- La partie logicielle.

Nous parlerons également de composantes algorithmique, matérielle et logicielle.

### 4.3 Composantes d'un robot

#### 4.3.1 L'axe

L'élément de base d'un robot est l'axe. Un axe est un élément mécanique motorisé suivi d'une transmission. S'il n'y a pas de transmission nous parlerons d'un actionnement direct (Direct drive en anglais).

Il y a deux types d'axes :

- Un axe linéaire.
- Un axe rotatif.

L'axe linéaire est soit un simple moteur linéaire de type direct drive ou un axe obtenu avec un moteur rotatif et une transmissions rotatif-linéaire<sup>1</sup>.

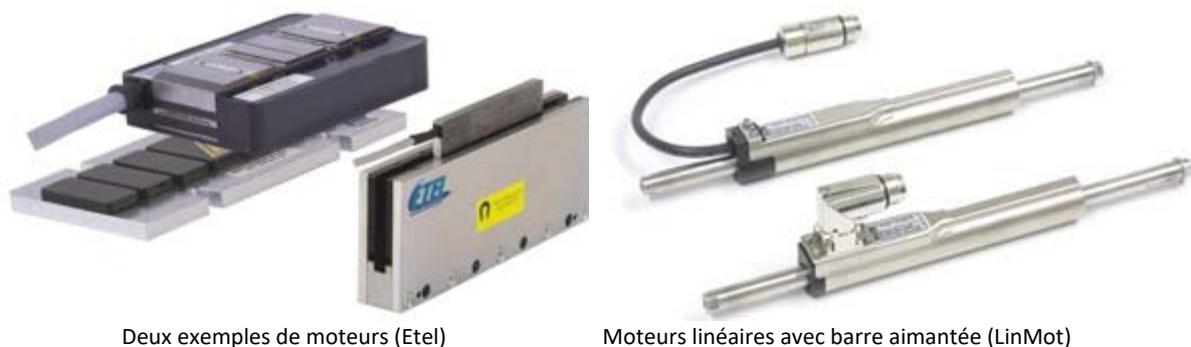


Figure 3, Exemples de moteurs linéaires

<sup>1</sup> Pour plus de détails voir le chapitre actionneurs

Concernant les transmissions, nous distinguons principalement les types suivants :

- Vis-écrou,
- Crémaillère,
- Courroie
- Chaines très peu utilisées car non synchrones (effet polygonale).



Axe linéaire à vis-écrou



Axe linéaire à crémaillère

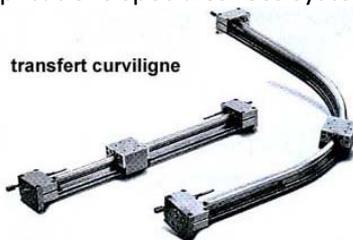


Axe linéaire à courroie

Figure 4, Exemples de transmissions rotation-linéaire

### **And what else !**

Voici l'exemple de quelques systèmes translationnels un peu exotiques et dédiés à des applications spéciales. Ces systèmes ne sont pas linéaires mais courbes :



Transfert curviligne pneumatique (ref. SMC)



Guidage curviligne (ref. THK)



Exemple de robot parallèle avec guidage curviligne (ref. Eclipse)

Figure 5, Exemples de translations curvilignes

### **L'axe rotatif**

L'axe rotatif est souvent composé d'un moteur et d'une transmission. Cette transmission comprend principalement des éléments tels qu'un réducteur à courroie ou à engrenages; parfois un renvoi d'angle.

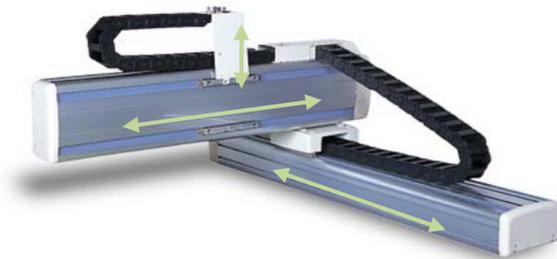
Que ce soit pour les transmissions linéaires ou rotationnelles, le rattrapage de jeux est une opération toujours présente. Elle implique souvent une précontrainte supplémentaire dont l'effet sur la précision de positionnement sera discuté plus loin dans ce chapitre de cours.

### **4.3.2 Le robot**

Nous avons défini le robot comme une structure mécanique poly-articulée, motorisée et instrumentée dont l'axe est la composante de base. La combinaison des mouvements des axes en respectant une cinématique donnée donne naissance au robot.

En prenant par exemple trois axes linéaires séparés, nous pouvons obtenir les différentes structures suivantes :

- un robot à trois axes **cartésien**,
- un robot parallèle comme le **Delta linéaire** ou l'**Orion**,
- toute **autre combinaison** cinématique
- ou même **trois axes totalement indépendants**.



Machine cartésienne 3 axes X Y Z



Robot Delta Linéaire

Figure 6, Exemples de robots

La construction de la machine, donc de la cinématique, définit le type de commande nécessaire. Nous parlons d'une **commande d'axes**, d'une **commande multiaxes**, de **commande numérique** ou même d'une **commande de robots**. Tous ces termes sont utilisés; parfois on s'y perd mais ce qu'il faut retenir est qu'ils sont tous valables.

#### Alors Robot ou pas Robot.

Il se trouve que toute machine impliquant des opérations motorisées et automatisée soit appelée robot. Ce sont souvent **des robots de métiers** tels que des robots de tissage, de coupe, de pliage, etc. Ces robots sont aussi bien pilotés avec des commandes d'axes pour asservir les moteurs en position ou en vitesse selon les opérations métier requises.



Robot de tissage



Robot de tissage



Robot avec presse plieuse

Figure 7, Exemples de robots métiers

#### 4.4 La partie algorithmique

La partie algorithmique de la commande de robot concerne les outils mathématiques nécessaires à la formalisation des comportements du robot avec sa commande. Cette formalisation est liée aux deux aspects suivants :

- Les algorithmes de réglage,
- La génération des trajectoires du robot, i.e., la géométrie des trajectoires générées et la génération des profils temporels associées.

#### 4.4.1 Aspects réglage et asservissement

L'objectif d'une commande boucle fermée d'un système physique est d'atteindre une consigne désirée et de rester le plus proche possible de cette dernière. Le schéma classique d'une telle commande boucle fermée est le suivant<sup>2</sup>:

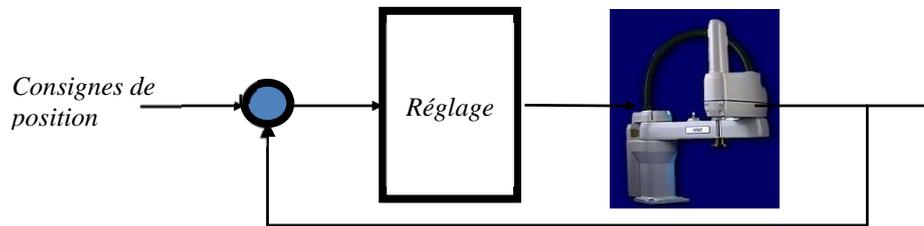


Figure 8, Schéma de principe de la commande boucle fermée d'un robot

Le réglage des moteurs est l'algorithme qui utilise les informations de mesure et de consigne afin de ***garantir à la position de suivre la consigne désirée (respectivement de la vitesse)***

##### Autres termes pour algorithme de réglage:

- contrôle, commande, asservissement, régulation,...
- contrôleur, organe de commande, asservissement, régulateur,...

##### Pour contrôler quoi?

- la position d'un axe,
- la vitesse d'un axe,
- la force (articulaire ou en sortie outil).

##### Parenthèse

Les moteurs des robots sont souvent des moteurs à courant continu (**DC**, Direct current) à balais (brushed) ou sans balais (brushless). Les moteurs DC se pilotent en tension ou en courant et nous parlerons de **pilotage en vitesse** ou **en couple** car la vitesse est proportionnelle à la tension d'entrée du moteur ; respectivement le couple est proportionnel au courant d'entrée du moteur (via la constante de vitesse, respectivement via la constante de couple).

#### 4.4.2 Contrôleurs classiques P, PD, PID

Les contrôleurs **P**, **PD**, **PI** et **PID** sont les contrôleurs les plus classiques utilisés pour la commande d'un robot. Ces contrôleurs sont composés des contributions proportionnelle, dérivative et intégrale de l'erreur sur la position<sup>3</sup>.

Voici les expressions des différentes contributions :

Contribution proportionnelle :  $u_p = K_p \cdot e$

Contribution dérivative :  $u_d = K_d \cdot \frac{de}{dt}$

Contribution intégrale :  $u_i = K_i \cdot \int e(\tau) d\tau$

<sup>2</sup> Attention, ce schéma n'inclût pas la puissance des moteurs du robot

<sup>3</sup> Dans ce qui suit nous nous intéresserons exclusivement aux variables généralisées de position. Le raisonnement par rapport aux vitesses reste le même.

**Le contrôleur P** inclut uniquement une contribution proportionnelle,

**Le contrôleur PD** inclut les contributions proportionnelle et dérivative et s'écrit comme suit :

$$u_{PD} = u_p + u_d = K_p \cdot e + K_d \cdot \frac{de}{dt}$$

Autre écriture 
$$u_{PD} = K_p \cdot \left( e + T_d \cdot \frac{de}{dt} \right)$$

**Le contrôleur PI** inclut les contributions proportionnelle et intégrale et s'écrit comme suit :

$$u_{PI} = u_p + u_i = K_p \cdot e + K_i \cdot \int e(\tau) d\tau$$

Autre écriture 
$$u_{PI} = K_p \cdot \left( e + \frac{1}{T_i} \cdot \int e(\tau) d\tau \right)$$

Dans ce cas on parle de constante de temps d'intégration. Il faudra faire attention que l'effet intégrateur est d'autant plus important que la constante de temps  $T_i$  est faible.

**Le contrôleur PID** inclut toutes les contributions proportionnelle, dérivative et intégrale et s'écrit comme suit :

$$u_{PID} = u_p + u_d + u_i = K_p \cdot e + K_d \cdot \frac{de}{dt} + K_i \cdot \int e(\tau) d\tau$$

Autre écriture 
$$u_{PID} = K_p \cdot \left( e + T_d \cdot \frac{de}{dt} + \frac{1}{T_i} \cdot \int e(\tau) d\tau \right)$$

Pour comprendre les contributions des termes proportionnel, dérivatif et intégrale, envisageons le pilotage en couple d'un moteur DC. Dans ce cas, la commande calculée est un couple (ou une force pour un système translationnel). Voici les questions qui permettront de nous éclairer :

**Question : A quel élément mécanique correspond l'action proportionnelle ?**

**Réponse :** C'est un élément dont la force appliquée est proportionnelle à l'élongation autour d'une position d'équilibre. C'est donc un ressort. Ceci pour dire que **l'action proportionnelle produit le même comportement qu'un ressort de raideur  $K_p$ .**

La fréquence propre du système boucle fermée est aussi directement liée à cet action proportionnelle.

**Remarques:**

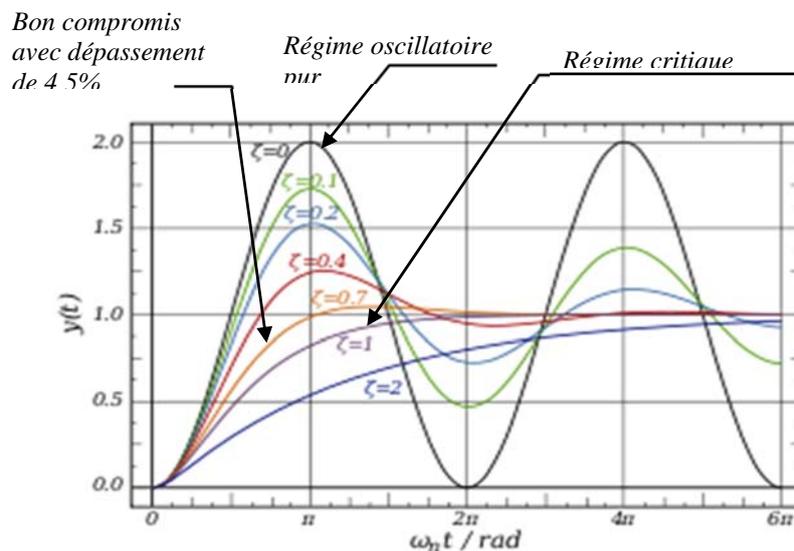
- Plus le gain  $K_p$  est élevé, plus le système est rigide (Inversement, plus  $K_p$  est faible, plus le système est mou)
- Plus le gain  $K_p$  est élevé, plus la fréquence propre du système est élevée et le système répond vite (la constante de temps du système est faible).
- Plus le gain  $K_p$  est élevé plus la période d'échantillonnage du contrôle doit être faible (à cause de la faible constante de temps).
- Plus le gain  $K_p$  est élevé, plus le système boucle fermée risque d'osciller à cause de la saturation de la grandeur de commande qui implique que le système fonctionne en boucle ouverte durant la saturation.

**Question : A quel élément mécanique correspond l'action dérivative ?**

**Réponse :** C'est un élément dont la force appliquée est proportionnelle à la dérivée de l'élongation autour d'une position d'équilibre. C'est donc une viscosité ou un frottement visqueux. Ceci pour dire que **l'action dérivative produit le même comportement qu'un amortisseur de constante Kd.**

**Remarques :**

- Plus le gain Kd est élevé, plus le système est freiné et amorti.
- Plus le gain Kd est élevé, plus le système devient lent.
- Un compromis doit être trouvé afin d'assurer le meilleur comportement dynamique possible (un coefficient d'amortissement égal à 1 correspond au régime critique : voir figure).
- L'opération de dérivation amplifie le bruit. Une attention particulière doit être donnée au comportement statique lorsque la consigne est constante et la quantification de la vitesse devient prépondérante (voir paragraphe 3.1.4).
- Un gain Kd élevé risque de provoquer un broutement du comportement à cause de la quantification de la vitesse.
- L'action dérivative est une anticipation sur le comportement dynamique (à cause de l'information de croissance et de décroissance de l'erreur). Cette information est supplémentaire à la simple information de l'erreur et permet ainsi de moduler la valeur de la commande pour améliorer le comportement dynamique.

**Question : A quel élément correspond l'action intégrale ?**

**Réponse :** L'opération d'intégration est une opération de cumul, i.e. analogue à celle d'un condensateur qui se charge lorsqu'il est mis sous tension continue. L'action intégrale revient donc à cumuler la grandeur de commande tant que l'erreur ne s'annule pas. **Lorsqu'il y'a un écart statique**, l'action proportionnelle est sans effet (car l'écart est statique et la contribution proportionnelle reste donc constante). L'action dérivée est nulle (à une erreur de quantification près). Il n'y a que l'action intégrale qui puisse avoir effet pour annuler cet écart statique.

**Remarques :**

- Plus le gain  $K_i$  est élevé, plus l'écart statique est rapidement réduit.
- Plus le gain  $K_i$  est élevé, plus l'action intégrale est importante et plus rapidement l'intégrateur est chargé.
- Si l'intégrateur se charge vite, il faudra faire attention aux changements de direction qui nécessitent le déchargement de l'intégrateur. Une limitation de la charge maximale de l'intégrateur est nécessaire : opération « Anti-Reset Windup » (ARW).

**Exercice 4.1. Commande en courant d'un moteur à courant continu (DC, Direct Current)**

Soit un moteur DC de constante de couple  $k_c$  et d'inertie  $J_m$ . Ce moteur est commandé en courant pour faire tourner une charge inertielle  $J_c$  à travers un réducteur de rapport  $n$ .

- Etablir le modèle dynamique du moteur avec et sans frottement visqueux de coefficient  $f_v$  (relation courant-position)
- Montrez qu'en absence du frottement visqueux, qu'il est impossible d'asservir la position du moteur avec un simple retour proportionnel ?
- Bouclez le moteur avec un **PID** et déterminez la fonction de transfert boucle fermée

### Exercice 4.2. Effet du Frottement sec

Soit un moteur DC de constante de couple  $k_c$  et d'inertie  $J_m$ . Ce moteur est commandé en courant pour faire tourner une charge inertielle  $J_c$ . Ce système présente un frottement sec de couple  $C_{sec}$ . La figure ci-dessous montre comment agit le frottement sec ( $\omega$  est la vitesse du moteur)

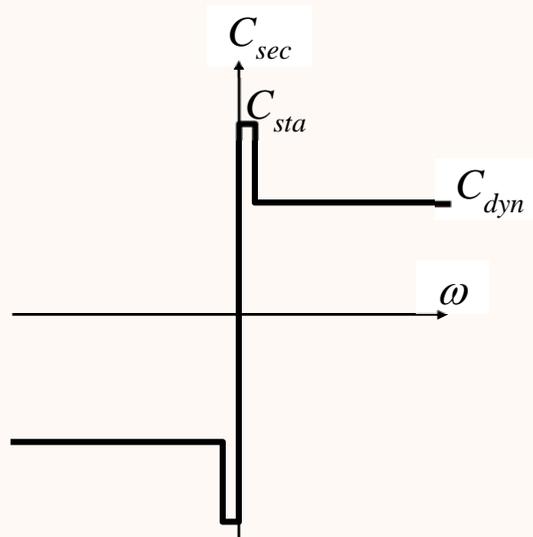


Figure 10, Modèle du frottement sec

- Montrez qu'en présence du frottement sec, la commande en position de type **PD** induit automatiquement un écart statique sur la position.
- Quelle solution proposez-vous ? Montrez l'efficacité de la solution proposée.
- En est-il de même dans le cas d'un couple perturbateur quelconque ?

#### 4.4.3 Contrôleur PID cascadié

Une technique qui est également très utilisée est la technique de commande de position cascadiée avec une commande en vitesse.

Le schéma suivant représente une boucle de vitesse PI d'un moteur ;

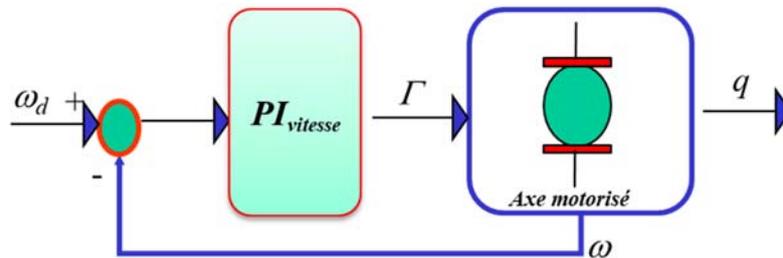


Figure 11, Boucle en vitesse PI d'un moteur DC

Cette technique est assez utilisée à cause de la disponibilité des boucles de vitesse sur tous les variateurs de moteurs disponible actuellement sur le marché. Il suffit alors uniquement d'implémenter la boucle de position sur la commande. La boucle de vitesse rapide étant sur le variateur et la boucle de position sur la commande numérique.

Pour mettre en place la commande en position à ce système, il suffit de mettre en cascade une boucle de position.

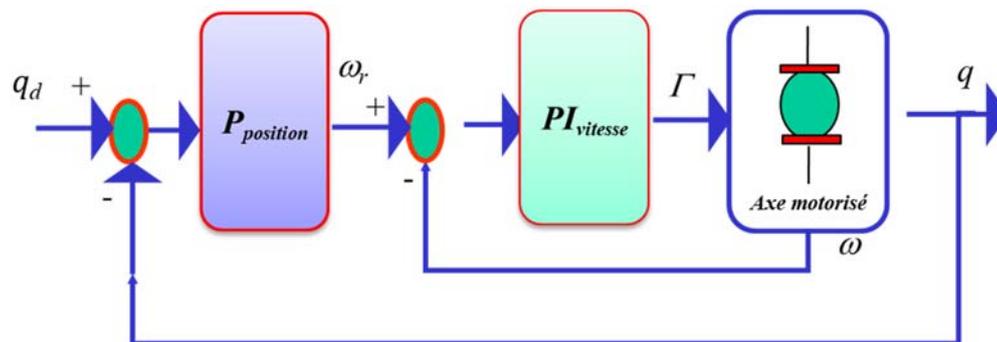


Figure 12, Boucle en vitesse PI cascadiée avec une boucle P en position d'un moteur DC

Pour améliorer cette boucle deux a priori peuvent être adjoint : l'a priori de vitesse et l'a priori du couple. Ceci donne le schéma de commande suivant :

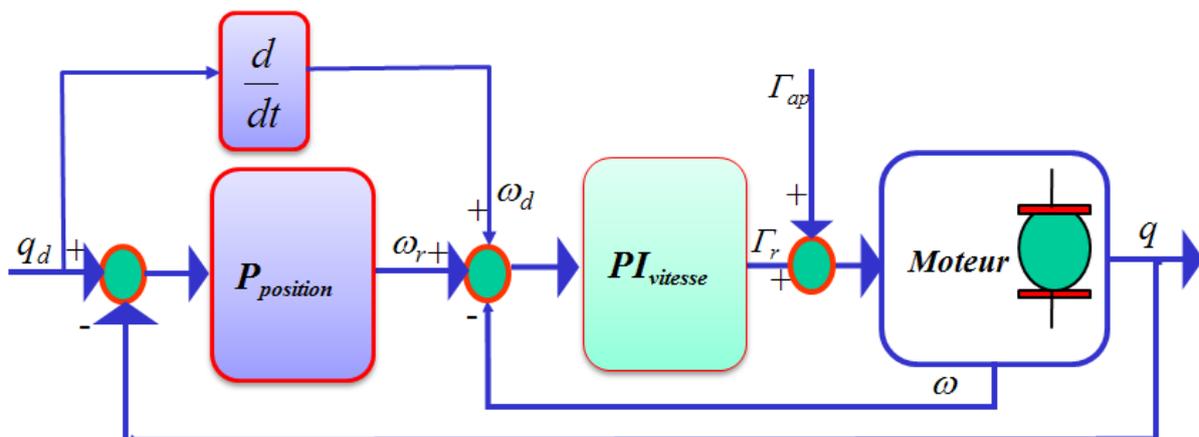


Figure 13, Boucle cascadiée position-vitesse avec un a priori de vitesse et un a priori de position

L'expression de la loi de commande PID cascadée avec un a priori de vitesse et de couple est donnée comme suit :

$$\Gamma = \Gamma_r + \Gamma_{ap} = K_{pv} \cdot e_\omega + K_i \cdot \int e_\omega(\tau) d\tau + \Gamma_{ap}$$

Où :  $e_\omega = \omega_r + \omega_d - \omega$

$\omega_r$  est la contribution du régulateur P de position,  $\omega_r = K_{pp}(q_d - q)$

$\omega_d$  est la vitesse consigne des trajectoires du robot.

$\omega$  est la vitesse articulaire mesurée.

#### Remarque:

Selon le type de système (motorisation, transmission, charge et perturbation). On peut imaginer que les deux boucles de position et de vitesse soient des PID. Il faudra cependant faire très attention aux erreurs de quantification de la vitesse (paragraphe ci-dessous).

#### 4.4.4 Réglage, mesure et quantification

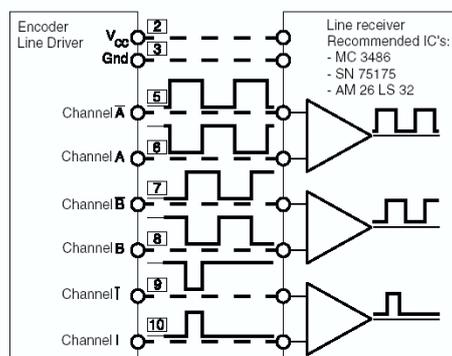
Les capteurs utilisés pour la mesure, leurs résolutions ainsi que leurs technologies sont des éléments importants pour la précision de positionnement.

#### Parenthèse

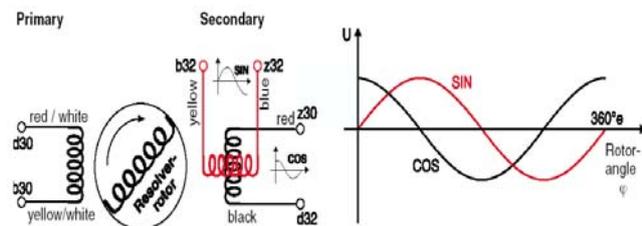
La résolution **est liée au capteur de mesure** et c'est la plus petite valeur qu'on puisse mesurer. La précision **est liée au système entier**, i.e. la mécanique, l'électronique, les capteurs et les algorithmes de commande utilisés. La précision est au mieux égale au double de la résolution des capteurs.

#### Quelques rappels sur les capteurs de position

Pour la mesure de la position des robots, on utilise le plus souvent des codeurs incrémentaux ou des résolveurs. Dans la plupart des cas, les signaux sont transmis depuis les capteurs à la commande numérique d'une manière différentielle pour réduire les bruits. De plus, les encodeurs incrémentaux sont transmis par pulses logiques ce qui les rends assez robustes aux bruits analogiques classiques.



Signaux d'un capteur incrémental



Capteur SIN/COS

Figure 14, Capteurs de position

Les capteurs analogiques de type potentiométriques sont peu recommandés pour les opérations d'asservissement car ils sont très sensibles au bruit et leur résolution est limitée.

### **Exercice 4.3**

Soit un potentiomètre multi-tours à 10 tours alimenté entre +/- 10 volts. L'acquisition est réalisée grâce à un convertisseur analogique numérique de 12 bits,

- Quelle est la résolution en position de ce capteur ?
- Y a-t-il une possibilité d'améliorer cette résolution ? Discutez votre proposition.

### **Quelques rappels sur les capteurs de vitesse**

La vitesse utilisée pour les asservissements en robotique est le plus souvent obtenue par dérivation numérique de la position (le signal tachymétrique analogique étant trop bruité).

Soient,

- $T_e$  : la période d'échantillonnage du contrôle.
- $R(\theta)$ : la résolution de la position.
- $R(\omega)$  : la résolution de la vitesse.

**L'obtention de la vitesse par dérivation numérique de la position au temps  $(k.T_e)$  est comme suit :**

$$\omega(kT_e) = \frac{\theta(kT_e) - \theta((k-1)T_e)}{T_e}$$

Ce qui donne la résolution de la vitesse suivante : 
$$R(\omega) = \frac{R(\theta)}{T_e}$$

En régime statique, la valeur de la commande devrait être constante. Ceci n'est pas le cas car elle va fluctuer en fonction des erreurs de quantification de la position et de la vitesse (ces valeurs de quantification correspondent aux résolutions des mesures de la position et de la vitesse). L'effet d'amplification de la dérivation numérique (à cause de la division par  $T_e$ ) multiplié par l'action dérivée augmente le bruit sur la contribution de l'action dérivée.

Soit  $u_{dq}$ , la valeur de la commande calculée en rapportant le bruit de quantification de la dérivation sur la grandeur de commande  $u$ .  $u_{dq}$  est exprimée comme suit :

$$u_{dq} = K_p \cdot T_d \cdot R(\omega) = K_p \cdot T_d \cdot \frac{R(\theta)}{T_e}$$

Donc,

- Plus on veut amortir notre système (Td élevé), plus ce bruit de quantification augmente.
- Plus on veut que le système soit dynamique ou rigide (Kp élevé), plus ce bruit augmente.

Ce bruit est néfaste car il risque d'exciter les fréquences propres de notre mécanique, provoquer des cycles limites ou même nuire à nos composants mécaniques.

Pour réduire ce bruit, les solutions sont comme suit :

- Réduire la résolution du capteur ; ce qui a une incidence directe sur le système complet et sur son coût.
- Réduire la dynamique ou l'amortissement ; ce qui a une incidence directe sur les performances.
- Augmenter la période d'échantillonnage ce qui implique également la réduction de la dynamique. Une solution possible serait de fonctionner avec deux périodes d'échantillonnage : cette opération s'appelle un suréchantillonnage. L'une servira à calculer l'action proportionnelle et intégrale et la seconde plus élevée pour calculer l'action dérivée.
- Utiliser des filtres de dérivation différents du filtre d'Euler. Un bon compromis serait de réaliser une dérivée sur 2 périodes d'échantillonnage comme suit :

$$\omega(kT_e) = \frac{\theta(kT_e) - \theta((k-2)T_e)}{2 \cdot T_e}$$

Ce qui donne la résolution de la vitesse suivante : 
$$R(\omega) = \frac{R(\theta)}{2 \cdot T_e}$$

#### **Exercice 4.4. Bruit de quantification**

Soit un moteur avec un réducteur de rapport 32 et un codeur incrémental à 500 traits. Ce moteur est réglé avec un contrôleur PD à une fréquence d'échantillonnage de 1 kHz.

- Quelle est la résolution en position de cet axe?  
La vitesse est obtenue par dérivation numérique.
- Quelle sont les résolutions de la vitesse si on dérive sur 1 ou 2 périodes d'échantillonnage?
- Le jeu du réducteur est d'environ 0.5 degré. Que pensez-vous?
- Quel est le bruit de quantification rapporté sur le courant?

#### 4.4.5 Commandes de robots à base de modèle couplés

##### 4.4.5.1 Système MIMO

Dans ce paragraphe nous prenons en compte les commandes de robots basées sur les modèles dynamiques couplés. Ces modèles sont des modèles multi-entrées et multi-sorties (MIMO, Multi Inputs Multi Outputs).

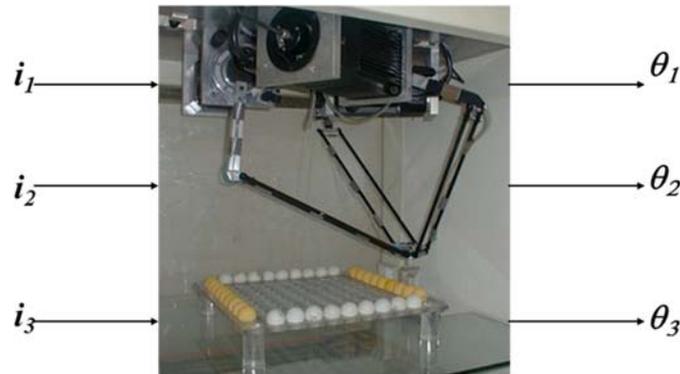


Figure 15, Robot Delta MIMO à trois entrées et trois sorties ( $i_1$ ,  $i_2$  et  $i_3$  sont les courants moteurs et  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  et  $\theta_3$  sont les positions moteurs)

##### 4.4.5.2 Notion de couplage :

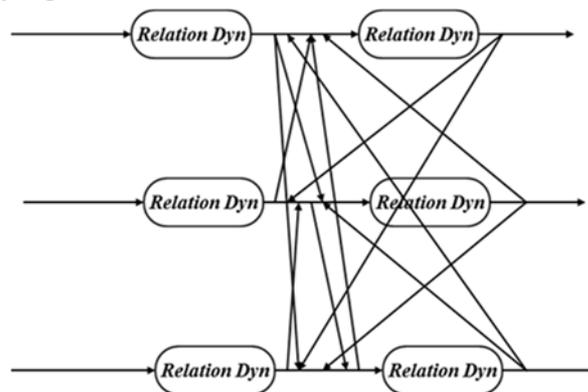


Figure 16, Représentation des couplages dynamiques

Les couplages dynamiques concernent l'influence du mouvement d'un axe sur un autre. Ces couplages sont liés à la position et à la vitesse.

Le modèle dynamique d'un robot peut être représenté comme suit :

$$\Gamma = B(q) \cdot \ddot{q} + G(q) + C(q, \dot{q}) + F(q, \dot{q}) + K(q)$$

Vecteur de couple généralisé  $\rightarrow$   $\Gamma$   
 Matrice d'inertie  $\rightarrow$   $B(q)$   
 Vecteur gravité  $\rightarrow$   $G(q)$   
 Termes centrifuge et Coriolis  $\rightarrow$   $C(q, \dot{q})$   
 Termes de frottements  $\rightarrow$   $F(q, \dot{q})$   
 Termes de rigidité  $\rightarrow$   $K(q)$

### 4.4.5.3 Modèles de robots et modèle de commande

Nous mettons le modèle ci-dessus sous la forme suivante :

$$\Gamma = B(q) \cdot \ddot{q} + H(q, \dot{q})$$

Cette écriture donne lieu à différentes autres écritures de modèles selon les connaissances des paramètres du système et selon les besoins.

$$\ddot{q} = (B(q))^{-1} (\Gamma - H(q, \dot{q})) \quad \text{Est le modèle dynamique différentiel de second ordre du robot}$$

$$\Rightarrow \dot{x} = f(x) + g(x) \cdot u \quad \text{Est le modèle dynamique d'état du robot}$$

$$\ddot{q} = (B^{\text{mod}}(q))^{-1} (\Gamma - H^{\text{mod}}(q, \dot{q})) \quad \text{Modèle dynamique du robot obtenu lors de la première modélisation}$$

$$\ddot{q} = (B^*(q))^{-1} (\Gamma - H^*(q, \dot{q})) \quad \text{Modèle dynamique simplifié}$$

$$\dot{x} = f^*(x) + g^*(x) \cdot u \quad \text{Modèle d'état pour la simulation}$$

$$\dot{x} = f(x) + g(x) \cdot u \quad \text{Modèle d'état simplifié pour la commande}$$

$$\ddot{q} = (B(q))^{-1} (\Gamma - H(q, \dot{q})) \quad \text{Modèle de robot du second ordre pour la commande}$$

#### Exemple

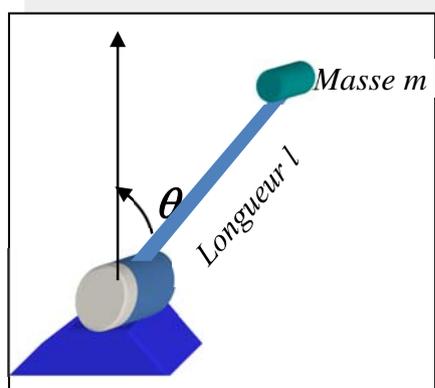


Figure 17, pendule inversé

#### Modèle de représentation :

$$\ddot{\theta} = \frac{k_c}{J} i - \frac{mgl}{J} \sin(\theta) - \frac{\alpha_{vis}(\omega, \theta)}{J} \omega - \frac{C_{sec}}{J} - \frac{C_{pert}(jeu, Temp, usure, \dots)}{J}$$

#### Modèle simplifié

$$\ddot{\theta} = \frac{k_c}{J} i - \frac{mgl}{J} \sin(\theta) - \frac{\alpha_{vis}^*}{J} \omega - \frac{C_{sec}}{J}$$

**Modèle d'état pour la simulation**

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{mgl}{J} \sin(x_1) - \frac{\alpha_{vis}^*}{J} x_2 - \frac{C_{sec}}{J} + \frac{k_c}{J} u \end{aligned} \quad \text{t.q. } (x_1, x_2) = (\theta, \omega) \text{ et } u = i$$

**Modèle d'état pour la commande**

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{mgl}{J} \sin(x_1) - \frac{\alpha_{vis}^*}{J} x_2 + \frac{k_c}{J} u \end{aligned}$$

**4.4.5.4 Méthodes de synthèses de lois de commandes pour robots**

Plusieurs techniques de commande existent pour piloter les robots. Nous avons cité aux paragraphes précédents les techniques classiques qui ne prennent pas en compte les couplages entre les axes du robot (PD, PI, PID et boucles PID cascadiées).

D'autres techniques sont basées sur les modèles couplés des robots et diffèrent parfois selon le modèle de représentation choisi. Trois types de représentations dynamiques existent :

- Modèle de robot de second ordre
- Modèle d'état non linéaire (de premier ordre)
- Modèle d'état linéaire qui nécessite bien sûr une linéarisation tangente. Dans ce cas, toutes les techniques de commandes de systèmes linéaires sont applicables (Retour d'état stabilisant, commandes découplantes linéaires, RST, commandes adaptatives,...).

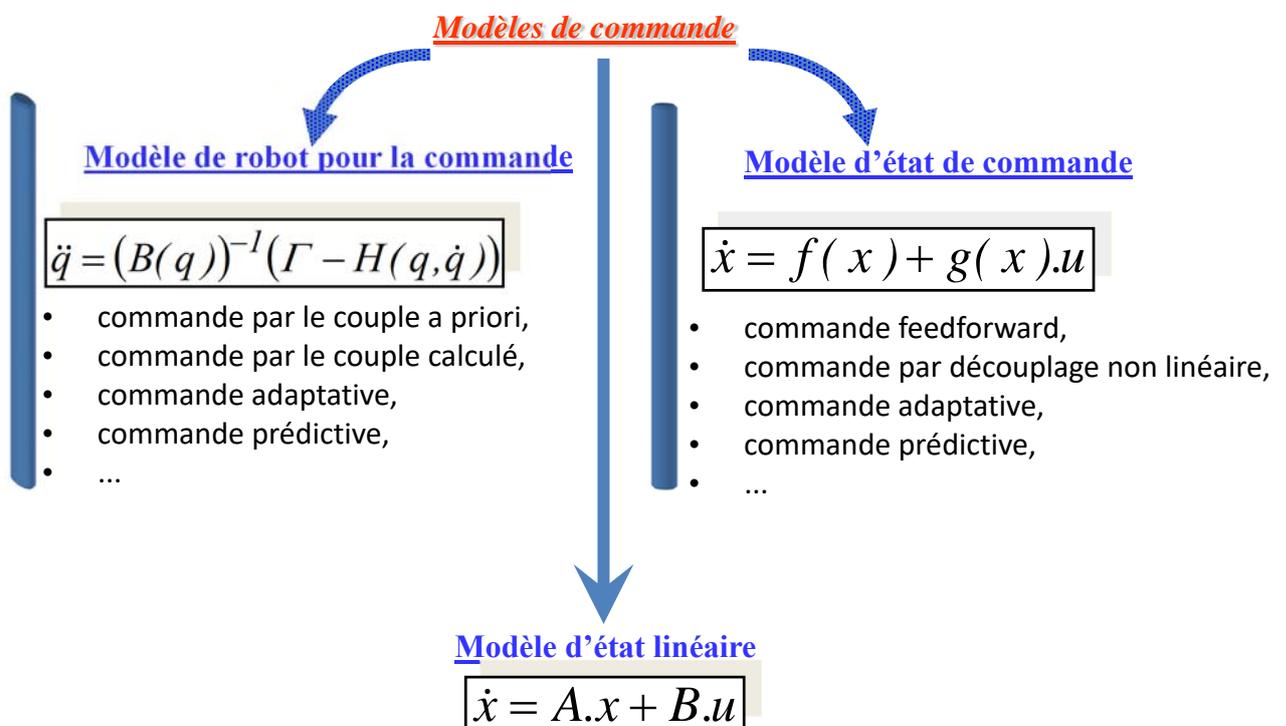


Figure 18, Récapitulatif de quelques techniques de commande de robot

#### 4.4.5.5 Méthode de commande par la compensation du couple a priori

##### Principe,

Le couple a priori est le couple calculé grâce au modèle du couple dynamique inverse en fonction des trajectoires désirées (positions, vitesses et accélérations). Si le modèle est parfait (i.e. il n'y a aucune erreur de modélisation), le pilotage du robot avec cet a priori impliquera de retrouver exactement les trajectoires désirées (i.e.  $q = q_d$ ).

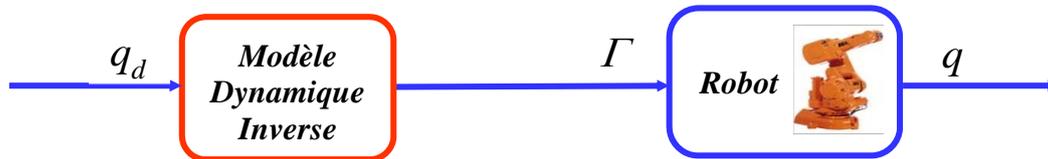


Figure 19, robot piloté avec son modèle dynamique inverse

Il n'est malheureusement pas possible de piloter le robot en boucle ouverte de cette manière car les modèles ne sont jamais parfaits et que la moindre perturbation externe nous met dans des situations inconnues et indésirables (à cause de l'absence de capteurs). L'a priori est nécessaire mais pas suffisant. L'a priori est un outil qui sert à améliorer les performances dynamiques de positionnement car il prend en compte les couplages en fonction des positions, vitesses et accélérations désirées.

##### Le modèle du robot ne correspond pas à la réalité!

Le schéma de commande suivant montre l'utilisation du modèle dynamique inverse comme a priori pour compenser (en a priori) les non linéarités et couplages connus. Le reste des imperfections est compensé par le régulateur linéaire adjoint à cet a priori.

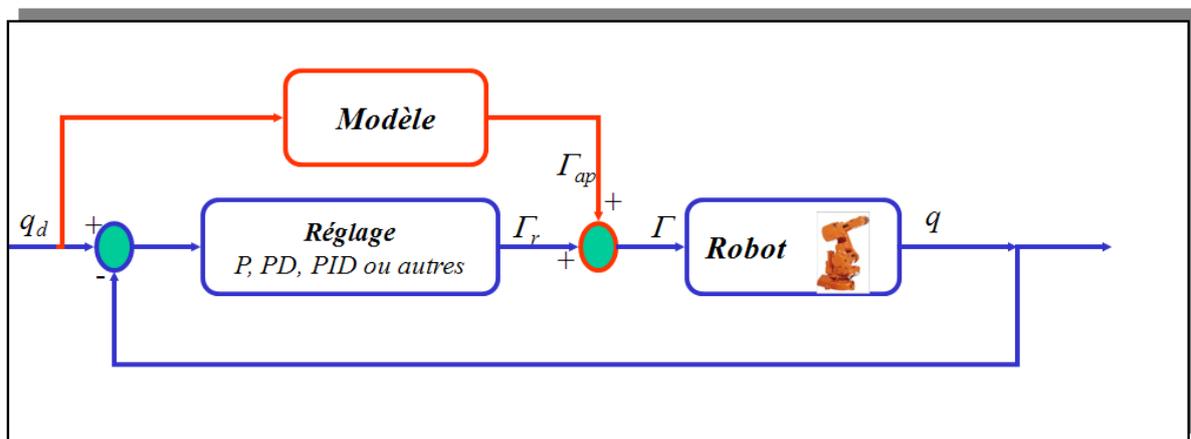


Figure 20, Schéma de commande par le couple a priori.

#### 4.4.5.6 Commande par le couple calculé:(computed torque control)

Cette technique de commande est aussi appelée la technique de commande linéarisante entrée-sortie.

Le robot est un système physique possédant une dynamique entrée sortie non linéaire avec comme vecteur Entrée les couples moteurs et comme vecteur Sortie les positions moteurs (Le seul cas particulier est celui des robots cartésiens qui sont des systèmes linéaires découplés). La technique de commande par linéarisation entrées sortie revient à compenser les non-linéarités par bouclage et

rendre le comportement linéaire par rapport à une nouvelle entrée. Plus précisément la dynamique par rapport à cette nouvelle entrée équivaut à un double intégrateur pour chaque articulation.

A partir du modèle non linéaire suivant :

$$\ddot{q} = (B(q))^{-1}(\Gamma - H(q, \dot{q}))$$

Posons que le double intégrateur de la variable de position s'écrit comme suit:

$$\ddot{q} = v$$

$v$  est une nouvelle entrée et le système (input-output) qui est  $(v, q)$  est un système linéaire avec un double intégrateur.

**Comment arriver à faire cette linéarisation?**

**Par le bouclage suivant :**  $\Gamma = B(q).v + H(q, \dot{q})$

Soit :  $\ddot{q} = (B(q))^{-1}(B(q).v + H(q, \dot{q}) - H(q, \dot{q})) = v$

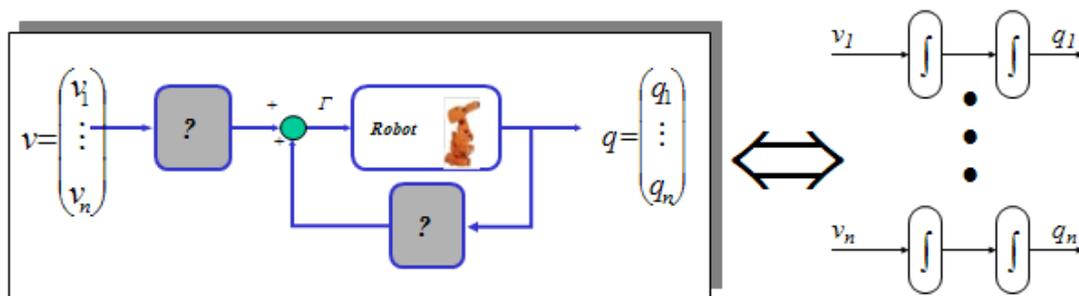


Figure 21, Bouclage linéarisant pour transformer le système en une cascade de doubles intégrateurs

Equivalence cascade de doubles intégrateurs (n est le nombre d'articulations)

**Il faut maintenant stabiliser les doubles intégrateurs par un bouclage linéaire de type :**

- PD,
- PID
- ou n'importe quel autre bouclage avancé (adaptatif, mode glissant, ...)

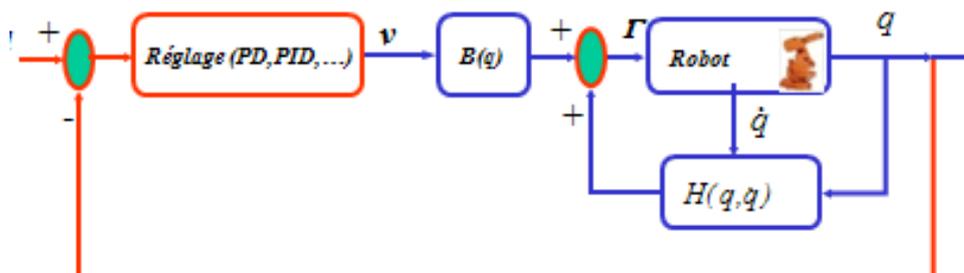


Figure 22, Bouclage linéarisant et réglage stabilisant

#### 4.4.5.7 Exercice 4, Commande d'un axe de robot par a priori et par la commande linéarisante

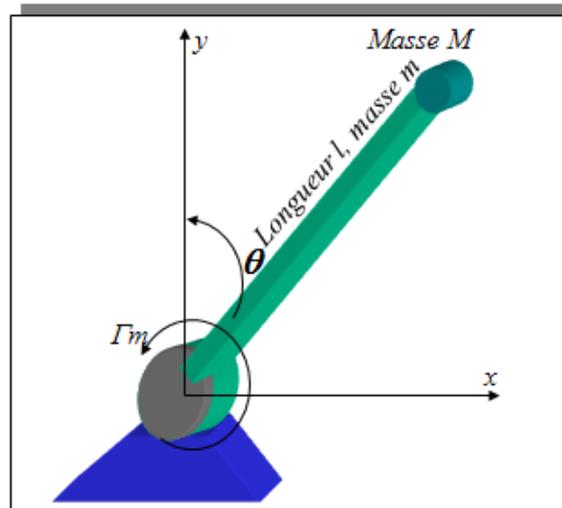


Figure 23, pendule inversé

Soit un axe de robot motorisé avec un moteur DC de constante de couple  $k_c$  et de d'inertie  $J_m$ . Ce moteur est commandé en courant pour faire tourner une charge inertielle  $J_c$ .

- Etablir le modèle dynamique du moteur avec et sans frottement visqueux (relation courant-position). Quelle est la fonction de transfert?
- Bouclez le moteur avec un PD et une commande avec couple a priori.
- Bouclez le moteur avec un PD et une commande avec la commande linéarisante.

#### 4.4.5.8 Principe d'une commande adaptative avec linéarisation entrée-sortie :

Le bouclage linéarisant étudié précédemment s'exprime comme suit :

$$\Gamma = B(q).v + H(q, \dot{q})$$

Les techniques de commande adaptatives s'intéressent aux termes inconnus du modèle et reviennent à utiliser des estimateurs qui identifient ces mal-connaissances par des algorithmes itératifs. Pour les modèles de robots, une des techniques s'intéresse à l'identification des termes de la matrice inertielle  $B(q)$  et le terme  $H(q, \dot{q})$ .

Soient  $\tilde{B}(q)$  et  $\tilde{H}(q, \dot{q})$  ces termes à identifier. Le modèle à estimer est alors :

$$\Gamma = \tilde{B}(q).v + \tilde{H}(q, \dot{q})$$

Le schéma de principe de cette technique de commande est donné par la figure suivante :

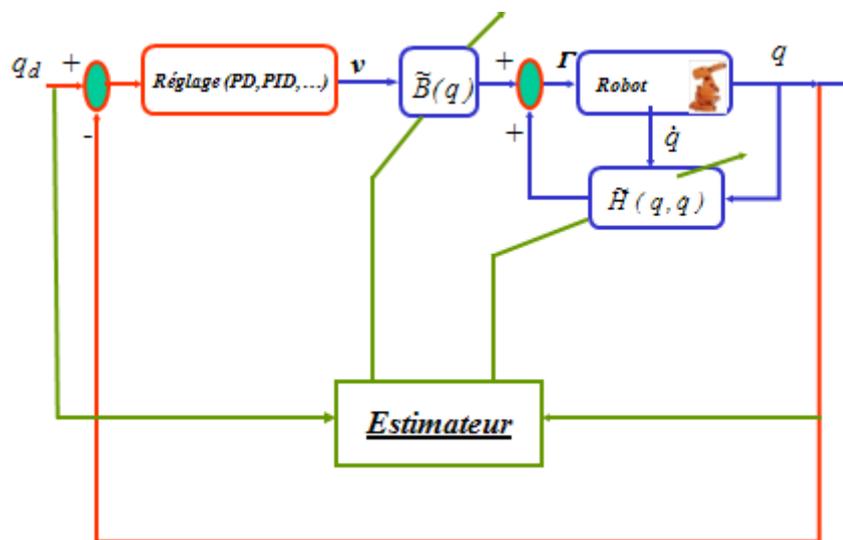


Figure 24, Bouclage linéarisant auto-adaptatif et réglage stabilisant

#### 4.4.6 Conditions pour que les couplages soient considérés comme des perturbations

Quelque soit le robot considéré, l'équation dynamique pour chaque articulation  $i$  peut s'écrire de la manière suivante :

$$\ddot{q}_i = k_{ci} \cdot i_i - f_{vi} \cdot \dot{q}_i - C_{couplages}(q_i, q_j, \dot{q}_i, \dot{q}_j)$$

- $k_{ci}$  est la constante de couple de chaque articulation  $i$ ,
- $f_{vi}$  est le coefficient de viscosité de chaque articulation  $i$ ,
- $i_i$  est le courant moteur à l'articulation  $i$ ,
- $C_{couplages}(q_i, q_j, \dot{q}_i, \dot{q}_j)$  est l'effet des autres articulations sur l'articulation considérée  $i$ .

Dans certains cas, les couplages  $C_{\text{couplages}}(q_i, q_j, \dot{q}_i, \dot{q}_j)$  peuvent être considérés comme des perturbations de type constants et ainsi être compensés soit par une action intégrale (terme I du PID) ou un estimateur de perturbation implémenté grâce à un observateur ou une identification paramétrique. Ceci est possible si les conditions suivantes sont vérifiées:

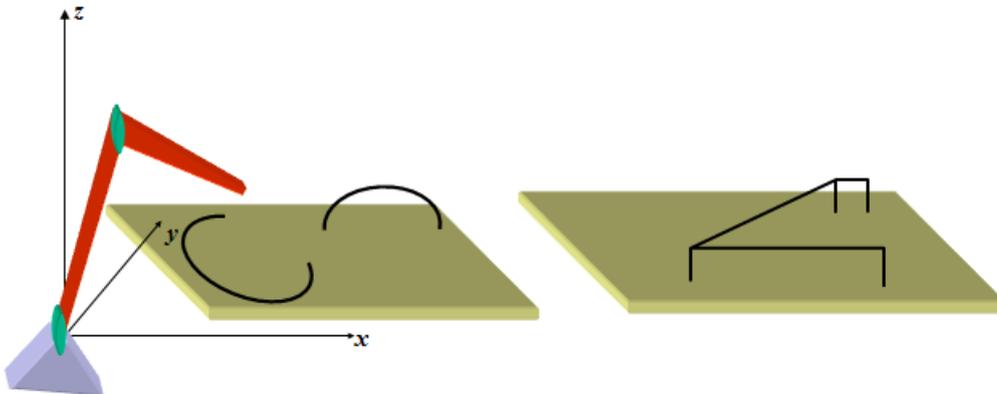
- les couplages dynamiques sont très faibles. Ceci peut avoir lieu par exemple si les rapports de réduction des moteurs sont tellement élevés que les inerties ramenées aux actionneurs sont très faibles (donc les couples inertiels),
- Les couplages sont très faiblement variables (grâce à une dynamique faible) de sorte à ce que leurs effets puissent être éliminés par une action intégrale

#### 4.4.7 Le Becarful du réglage

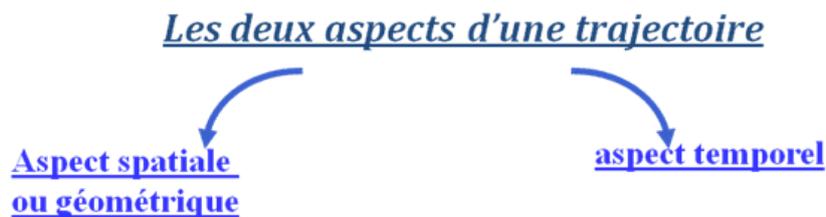
- Toujours spécifier le type de réglage et les conditions d'implémentation :
  - PI, PID, linéaire ou non, avec modèle dynamique ou non,
  - Usages de certains artefacts comme dead zone, filtrage,
- Toujours spécifier la période d'échantillonnage utilisée (Parfois plusieurs périodes d'échantillonnage sont utilisées comme dans le cas d'une double boucle vitesse-position)
- Lorsque vous faites des comparaisons, toujours comparer le comparable en spécifiant
  - les échelles,
  - les zones de travail,
  - les valeurs des amplitudes,
  - les constantes de temps désirées.
- Spécifier la difficulté du choix des paramètres du réglage et la manière avec laquelle ils ont été dimensionnés.

## 4.5 Génération des trajectoires du robot

La génération des trajectoires d'un robot s'intéresse aux formes des trajectoires qui relient deux points de l'espace ainsi qu'à la manière dont évolue la vitesse durant le trajet de l'outil.



La génération trajectoire possède deux aspects :



L'aspect géométrique concerne les formes du trajet (géométrie de la trajectoire) alors que l'aspect temporel concerne l'évolution de l'accélération, de la vitesse et de la position dans le temps. Ces évolutions en fonction du temps seront respectivement appelés plus tard des profils d'accélération, de vitesse et de position.

*Ces deux aspects sont ils indépendants?* **Non!**

Les deux aspects géométriques et temporels ne sont pas indépendants (et nous allons le voir plus précisément dans la suite de ce paragraphe) car toute erreur spatiale (géométrique) induit une erreur temporelle et vice-versa. Les formes des trajets sont très importantes et les profils temporels doivent ainsi être bien choisis afin de ne pas accélérer ni décélérer à n'importe où sur ces trajets.

### 4.5.1 Rappel sur la transformation de coordonnées

Une notion très importante dans la génération des trajectoires des robots qu'il faut rappeler est celle de la transformation de coordonnées du robot (appelée également modèle géométrique). La transformation des coordonnées du robot est la relation qui lie les deux espaces articulaire et de l'outil du robot. Le trajet du robot est toujours défini dans son espace outil (espace **tâche** ou espace **opérationnel**) et le réglage des moteurs est toujours effectué dans son espace **articulaire**.

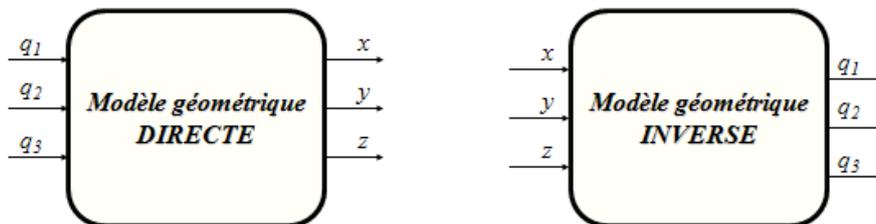
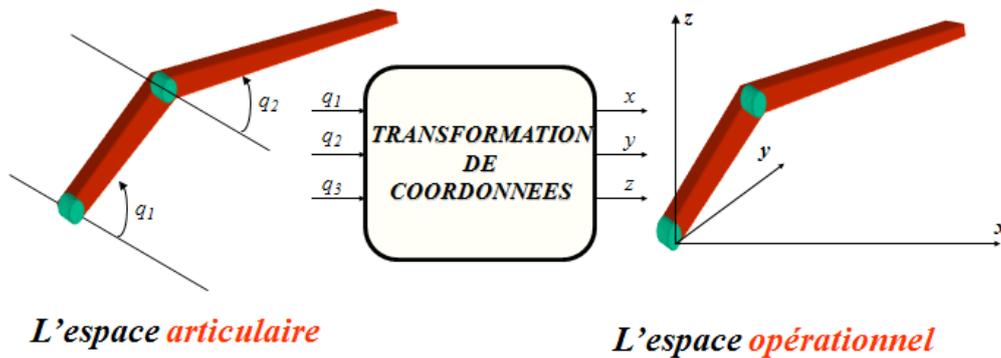


Figure 25, transformations de coordonnées directe et inverse d'un robot

**Résumé des utilités de chacun des modèles :**

	Modèle Géométrique Inverse	Modèle Géométrique Direct
Utilité	Commande d'un robot par le calcul des coordonnées articulaire.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Initialisation du robot par la déduction du point opérationnel de départ.</li> <li>• Apprentissage des points par la mesure des coordonnées opérationnels.</li> <li>• Commande dans l'espace opérationnel par la mesure de coordonnées opérationnelles.</li> </ul>

**4.5.2 Notion de trajectoires admissibles****Une trajectoire est admissible si:**

- elle est réalisable sur le plan géométrique (en aucun cas elle ne sort de l'espace de travail),
- elle est réalisable sur le plan temporel (les vitesses et accélérations sont réalisables par les moteurs)

**Pour cela il faut que:**

- l'électronique de puissance suive.
- les performances du contrôleur suivent (puissance de calcul et rapidité d'acquisition).
- L'algorithme de réglage soit bien choisi et ses paramètres bien ajustés.
- la motorisation soit bien sûre adéquate.

### 4.5.3 Aspects géométriques des trajectoires de robots

Les formes de bases utilisées pour la définition d'un trajet de robot sont la ligne droite et l'arc de cercle. Le terme **interpolation** spatiale est un terme très fréquent pour la description d'un trajet de robot ou de machine à outil.

#### Qu'est-ce que l'interpolation de trajectoire dans le monde de la CN (Commande Numérique d'axes)?

Dans le cas de la génération de trajectoire, nous parlons d'axes interpolés quand les mouvements de ces axes sont **géométriquement dépendants**.

Les interpolations de base connues dans le monde de la commande des machines et de robots sont:

- ✓ l'interpolation **linéaire**,
- ✓ l'interpolation **circulaire** (sens horaire et sens antihoraire).

D'autres interpolations existent:

- ✓ l'interpolation **spirale**,
- ✓ l'interpolation **hélicoïdale**,

#### Voici quelques trajectoires types de prise et dépose d'objets (*pick and place*) :



Figure 26, Trajectoires types de prise-dépose d'objets

### 4.5.4 Aspects temporel des trajectoires de robots

Pour caractériser la trajectoire du robot dans son espace-temps, on parle de **profil**.

#### Qu'est-ce qu'un profil?

Le profil définit la courbe en fonction du temps de la position, vitesse ou accélération.

On parle souvent de **profil de vitesse** et de **profil d'accélération** car le profil de position se déduit automatiquement de celui de la vitesse par intégration.

Le profil le plus simple est **le profil d'ordre 0**. C'est un profil discontinu en position de type échelon où nous demandons au robot d'aller d'un point à un autre point en un temps nul,

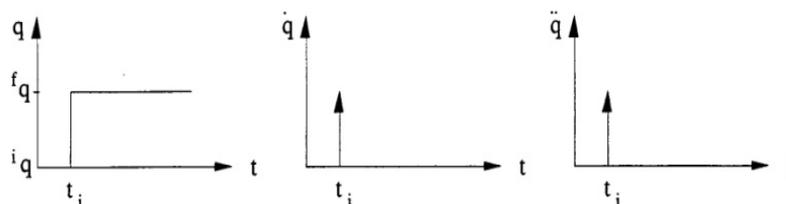


Figure 27, Interpolation d'ordre 0 (point à point de type échelon)

Le profil échelon en position est trop agressif et engendre beaucoup d'oscillations. Il n'est pas adapté pour faire du suivi de trajectoires.

Le profil le plus connu et le plus utilisé est le **profil trapézoïdal en vitesse** (appelé aussi Bang-Bang en accélération et parabolique en position).

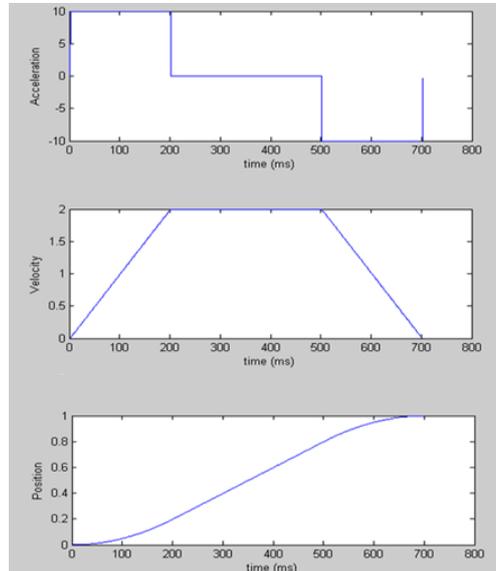


Figure 28, Profil trapézoïdal en vitesse (Bang Bang en accélération)

Malheureusement, ce profil implique aussi une sollicitation trop brutale de la mécanique à cause des sauts d'accélération (donc du couple moteur). Pour éviter cela, il suffit de lisser la montée en accélération en rajoutant une phase de jerk (Le jerk est la dérivée de l'accélération). Ce nouveau profil est régi par une **loi à accélération trapézoïdale**, donc plus lisse pour la mécanique (appelé également parabolique en vitesse):

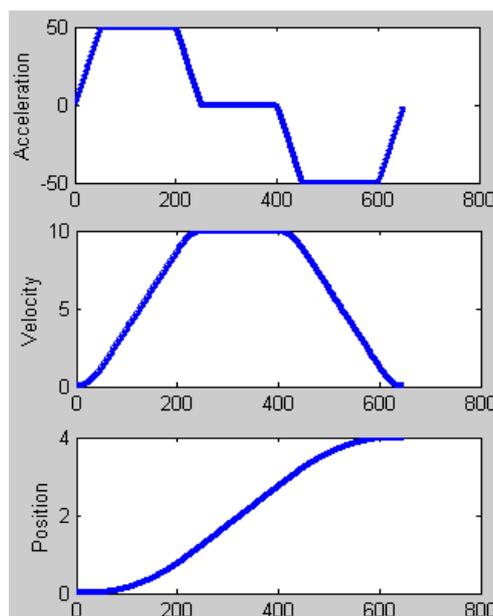


Figure 29, Profil trapézoïdal en accélération (parabolique en vitesse)

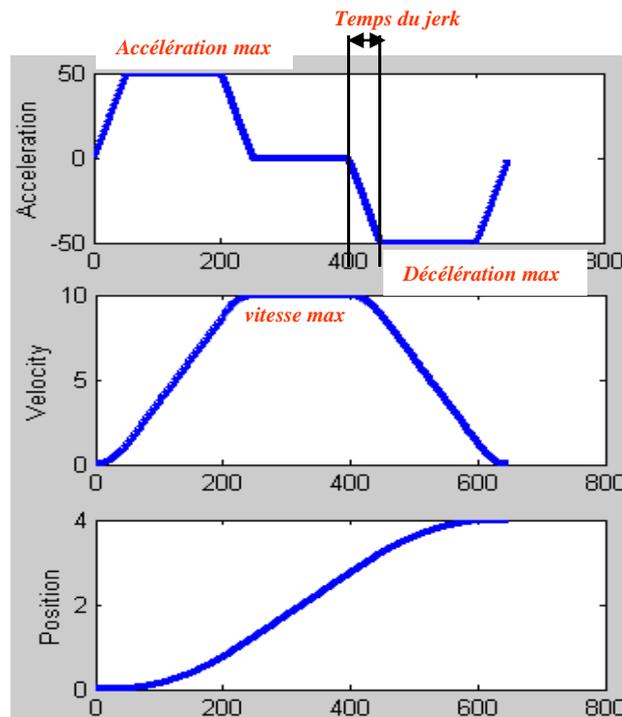


Figure 30, Paramètres du profil trapézoïdal en accélération

#### 4.5.5 Génération de profils continus

Soient les points A, B, C, D, E et F définissant un trajet du point A au point D. Le trajet classique d'un robot depuis le point A vers le point F revient à parcourir les positions intermédiaires avec un arrêt à chaque point (Figure 31).

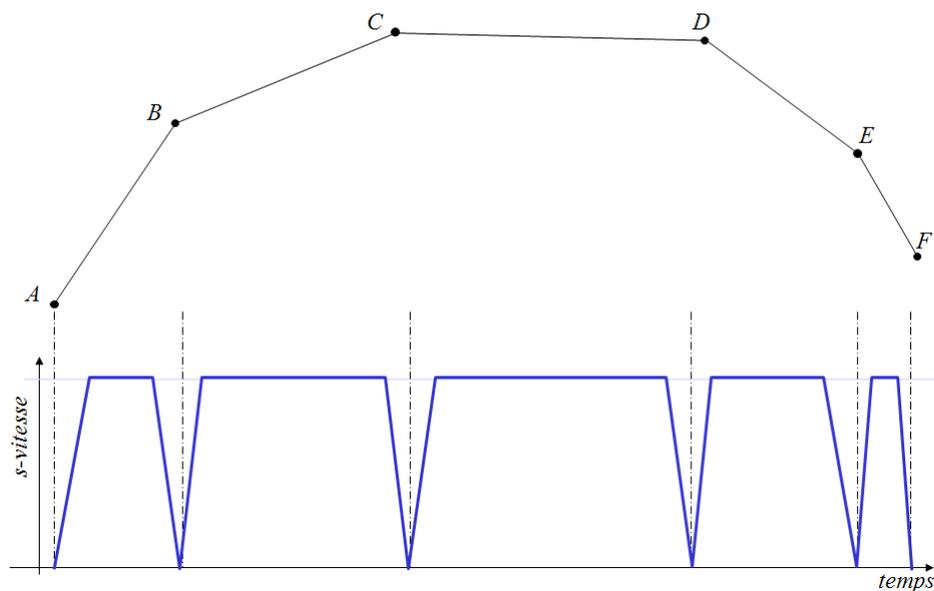


Figure 31, raccords avec arrêt à chaque position intermédiaire

En machine-outil et dans certaines applications de robotique (comme la soudure ou la peinture), il n'est pas nécessaire de s'arrêter aux positions intermédiaires. On utilise ainsi des profils continus avec une phase de démarrage, des phases à vitesse constante et une phase de freinage (figure 32).

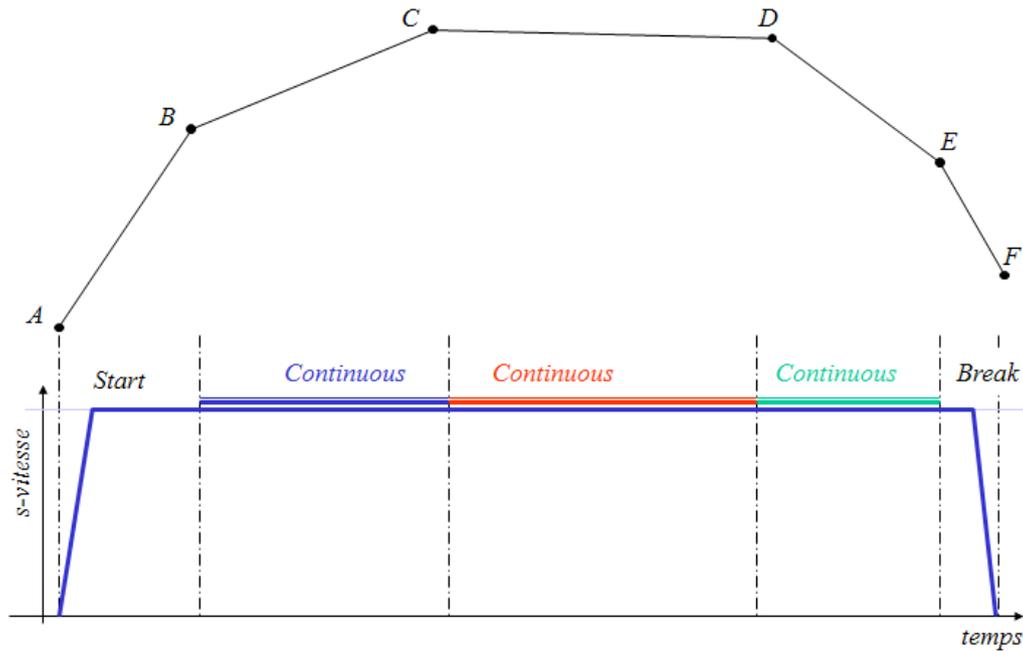


Figure 32, Raccords continus sans arrêts aux positions intermédiaires

**Profils continus (suite) : gestion des raccords :**

Pour améliorer la gestion des raccords et réduire les effets des accélérations aux positions intermédiaires, on décélère puis on accélère. Ceci adoucit le comportement et peut être effectué par exemple en modulant l'accélération et la décélération en fonction de l'angle au raccord.

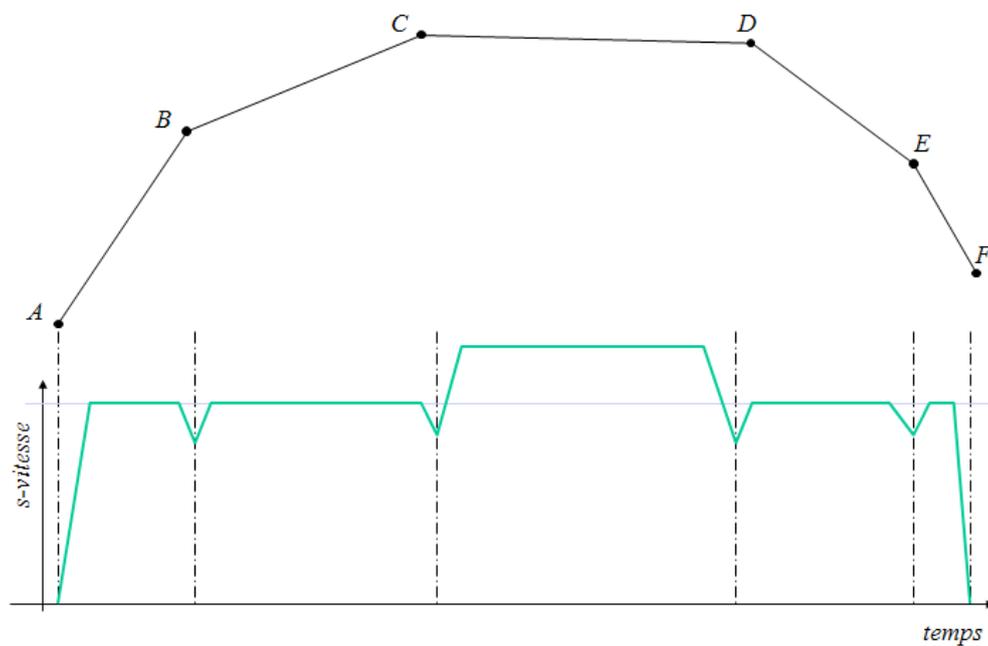


Figure 33, Raccords continus avec gestion des accélérations et décélérations aux positions intermédiaires

#### 4.5.6 Synchronisation des axes

Pour certains axes, la dépendance géométrique n'existe pas.

##### Exemples,

- deux axes rotatifs d'un changeur d'outil,
- deux axes linéaires parallèles,
- voir plusieurs axes d'une machine.

Dans le cas d'une machine à deux axes  $x_1$  et  $x_2$ , le mouvement d'une position 1 défini par les coordonnées  $(p1\_x1, p1\_x2)$  vers une position 2  $(p2\_x1, p2\_x2)$ , peut s'effectuer soit :

- En mode simultané axe par axe,
- En mode indépendant, i.e. chaque axe selon sa dynamique propre (définie par l'opérateur)
- En mode synchronisé,

La figure suivante illustre les trois modes opératoires de génération de trajectoire :

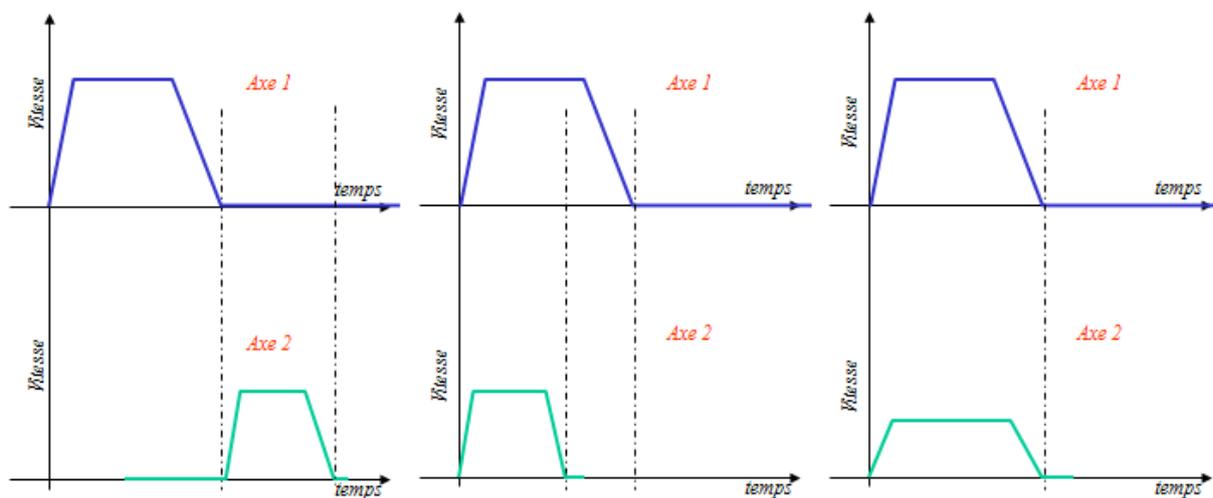


Figure 34, Types de synchronisation d'axes (de gauche à droite, simultanés, indépendants, synchronisés)

##### **Remarques:**

- L'interpolation des axes est liée à la géométrie des trajets.
- La synchronisation des axes ne définit aucune géométrie du trajet et elle est uniquement liée à la gestion des profils temporels.

## 4.6 La partie matérielle d'une commande de robot

### 4.6.1 Éléments d'une armoire de commande

L'armoire de la commande est composée des éléments suivants :

- Carte processeur qui embarque toute la partie logicielle de la commande.
- Cartes d'acquisition des signaux de capteurs :
  - Acquisition de signaux numériques pour les capteurs tout ou rien,
  - Acquisition de signaux analogiques (par exemple pour mesurer la force, la température,...etc.)
  - Acquisition de signaux spécifiques tels que les compteurs quadrature pour encodeurs incrémentaux.
  - ...
- Cartes de sorties de signaux :
  - Analogiques pour le pilotage des variateurs de moteurs,
  - Numériques pour le pilotage de relais, de préhenseurs,
  - Divers tels que la génération de pulses, de PWM, de sinus,...
- Bus à cartes.
- Alimentation du bus à cartes (à travers lequel les cartes électroniques sont alimentées).
- Puissance des moteurs.
- Alimentation de la puissance.
- Ventilateurs.
- Connectique, borniers électriques et câbles.

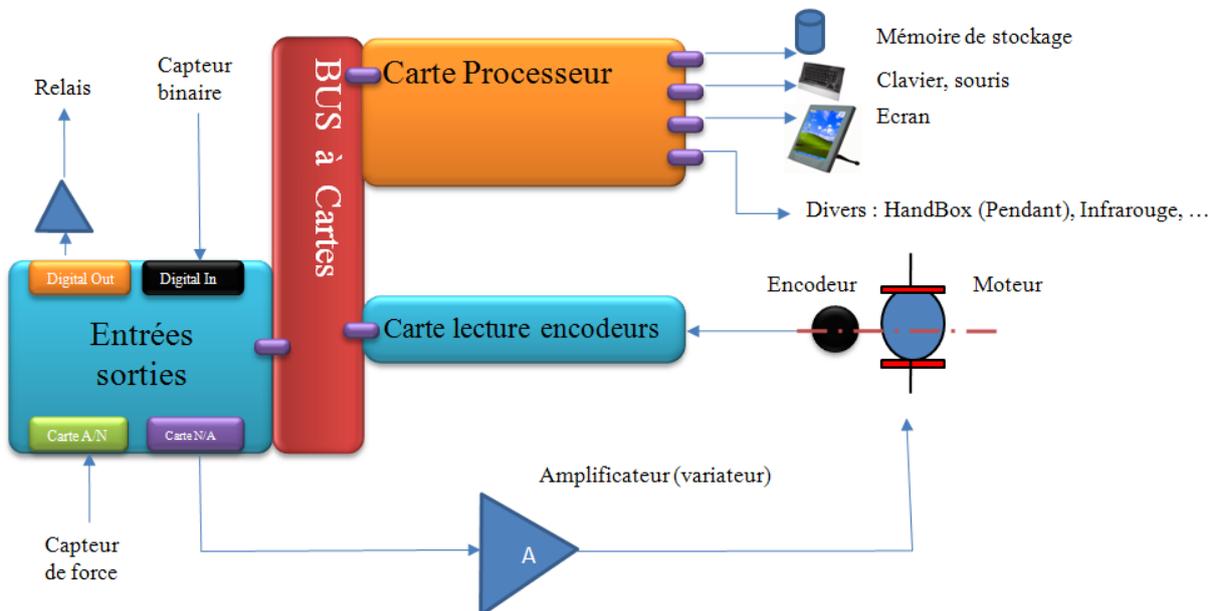


Figure 35, Schéma résumé des différentes composantes d'une armoire de commande



Figure 36, Exemples de commandes numériques industrielles

#### 4.6.1.1 L'armoire

L'armoire est le premier composant de la commande numérique. C'est le caisson dans lequel se fixent tous les autres composants de la commande.



Figure 37, Exemples d'armoires de commande

#### 4.6.1.2 Les cartes d'acquisition

Les cartes d'acquisition que nous nommons également cartes d'entrées-sorties (Acquisition boards, Input-Output (IO) boards) sont l'interface matérielle entre le robot et la carte processeur.

Tous les types d'interfaces peuvent être nécessaires (analogique, digitales ou autre). La structure minimale nécessaire pour la commande d'un robot nécessite les composants suivants :

1. Des sorties analogiques pour le pilotage des moteurs via leurs variateurs analogiques (pour la commande en couple ou pour la commande en vitesse).
2. Des entrées codeurs qui consistent en des compteurs quadrature.
3. Des entrées – sorties digitales pour le pilotage de relais et la lecture de capteurs digitaux (présence/ absence de pièce, fermeture de porte, extrémité,...etc)

Des cartes d'acquisition pour la commande de robots (désignées souvent par **des cartes d'axes**) existent sous tous les formats de bus : PCI, Compact PCI et VME.

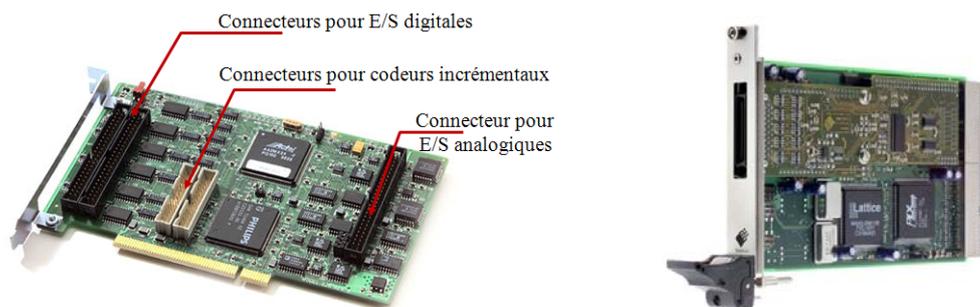


Figure 38, Exemples de cartes d'axes PCI et CPCI

4.6.2 Drives de moteurs et Bus de terrain

Dans le cas de commande analogique, les drives des moteurs sont pilotés par une consigne analogique qui impose la valeur de la tension ou du courant pour respectivement fixer la vitesse ou le couple de sortie du moteur (Figure 39).

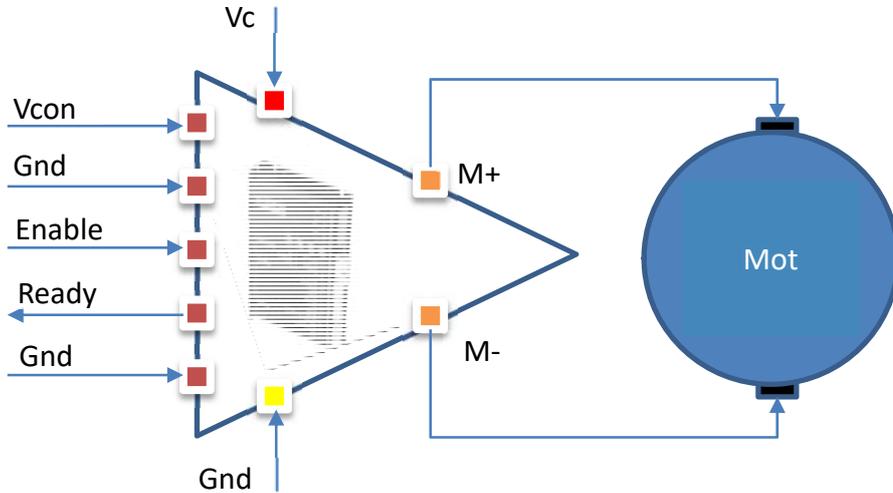


Figure 39, Exemple de câblage d'un servo-amplificateur Maxon (description dans tableau ci-dessous)

Signal	Type	Valeur	Description
Vcons	Analogique	-10V à 10V	Consigne de couple ou de vitesse selon configuration du drive
Gnd	Analogique	0V	Masse
Enable	Tout ou Rien	5V	Activation de l'ampli (Enable)
Ready	Tout ou Rien	5V	Etat de l'ampli (Ok ou non)
M+, M-	Analogique	--	Bornes d'un moteur à balais
Vcc	Analogique	50V/5A	Alimentation à ccourant continu du drive

Tableau : Signification des connexions de la figure précédente

Les bus de terrain sont de plus en plus utilisés. Ils sont une excellente alternative à la technologie analogique et utilisent uniquement une communication numérique.

Les bus de terrain (fieldbusses) sont utilisés dans le domaine de l'automatisation industrielle principalement pour améliorer l'interconnexion des composants. Ils sont tous construits autour d'une communication numérique sérielle des données entre un organe centrale et les composants d'entrées sortie. La configuration de connexion entre les composants est appelée topologie du bus. La topologie la plus fréquente est celle en Daisy-Chain avec un maitre et les modules esclaves qui s'interconnectent en chaine l'un après l'autre.

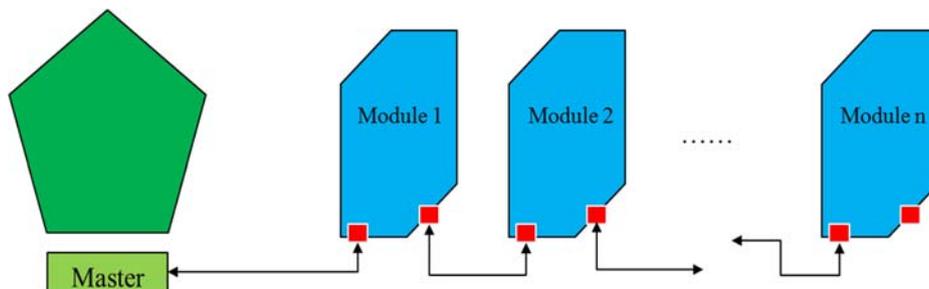


Figure 40, Principe de topologie Daisy chain

Les composants d'entrées-sorties touchent toutes les fonctions d'automatisation (lecture analogique, lecture d'entrées digitales, relais, commande de moteur pas à pas, drive moteur,...) et permettent non

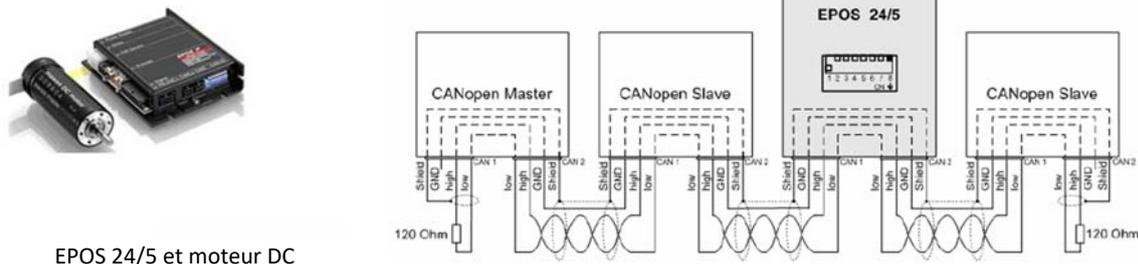
seulement déporter la fonction d'entrée-sortie depuis le composant maître mais également de distribuer les fonctions selon les besoins de l'automatisation du robot et ses composants.

Les paragraphes qui suivent donnent un bref aperçu des principaux bus de terrain utilisés pour la commande d'axes. Ces bus de terrains disposent tous d'un protocole dédié à la commande de moteurs électrique qui permet de piloter la position des axes soit en mode point, soit en en mode génération de profil. Dans tous les cas la boucle d'asservissement de position se trouve au niveau du drive.

- **Mode génération de profil** : Ce mode rend le module d'axe totalement autonome dans sa génération de profil. La trajectoire de positionnement entre la position d'origine et la position cible est générée dans le drive. C'est un mode simple et idéal lorsque les axes sont indépendants ou lorsqu'il n'y a besoin ni d'interpolation ni de synchronisation.
- **Mode point** : Dans ce mode les points du trajet sont mis à jour depuis le maître à chaque période d'échantillonnage. Cette période varie souvent entre 250us et 2ms selon le type de bus et la nature de l'application. La synchronisation et l'interpolation des axes est assuré par le logiciel de commande utilisé au niveau du maître.

#### 4.6.3 Le CANOpen (1Mbit/s)

Le bus CAN open est un bus série qui atteint un taux de transfert de 1Mbit /sec. C'est une extension du bus CAN. Son implémentation sur un PC maître requiert l'utilisation d'une carte maître CANOpen. C'est un bus très lent et n'est pas très adapté aux modes de fonctionnement nécessitant une interpolation ou synchronisation d'axes.



EPOS 24/5 et moteur DC

Figure 41, Utilisation du bus CAN Open – Exemple du module CAN Open de Maxon (ref Maxon-série EPOS)

#### 4.6.4 Le PROFIBUS (9.6 kbit/s to 12 Mbit/s)

Ce bus série permet des taux de transfert de données plus rapide (jusqu'à 12 Mbit/sec). Il a été initié par Siemens et il est toujours promu par elle. Il reste cependant ouvert afin de pouvoir interconnecter des composants provenant de fournisseurs divers. Sa topologie est le Daisy chain. L'exemple ci-dessous montre une implémentation avec un robot parallèle à 5 axes. La boucle de position se trouve au niveau du PC et son implémentation requiert également l'utilisation d'une carte maître Profibus.

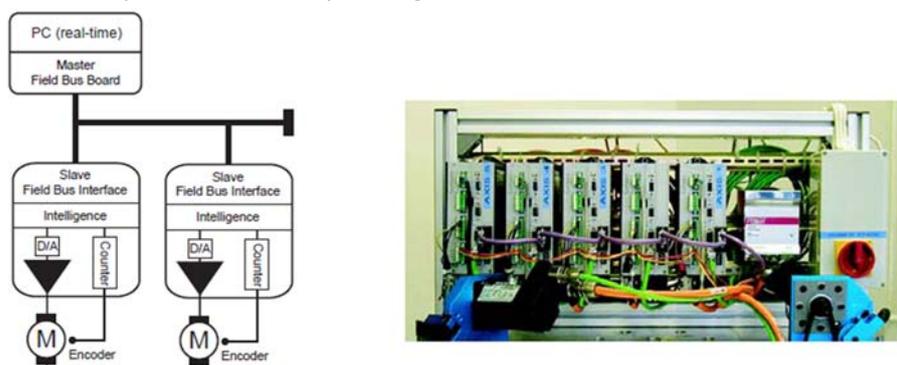


Figure 42, Utilisation du bus Profibus – Exemple d'une implémentation avec un robot parallèle 5 axes

#### 4.6.5 L'Ethercat

L'Ethercat est actuellement le bus le plus utilisé aussi bien pour l'automatisation que pour la commande des axes. Il a été développé par l'entreprise Beckhoff et permet des taux de transmission atteignant 100 Mbits/sec. Son attractivité est liée à deux éléments importants :

- L'Ethercat utilise le composant Ethernet d'un PC et il n'a ainsi pas besoin de carte maître supplémentaire. Il suffit de changer le pilote du composant Ethernet natif du PC avec un pilote Ethercat et ça fonctionne.
- Le taux de transmission élevé du bus qui permet d'avoir des cadences de rafraîchissement de consigne atteignant 250µs.

Quelques chiffres ;

- 256 digital I/O in 11 µs
- 200 analog I/O (16 bit) in 50 µs, 20 kHz Sampling Rate
- **100 Servo-Axis (each 8 Byte IN+OUT) in 100 µs = 0.1 ms**



Figure 43, Utilisation du bus Ethercat – Exemple d'une implémentation avec un robot Delta

#### 4.6.6 Commande cascadée par bus de terrain

Les boucles de réglage de la position et de la vitesse peuvent être placées soit sur l'ordinateur ou sur le drive. Cependant, avec les capacités en nette amélioration des drives, la configuration la plus intéressante est la suivante:

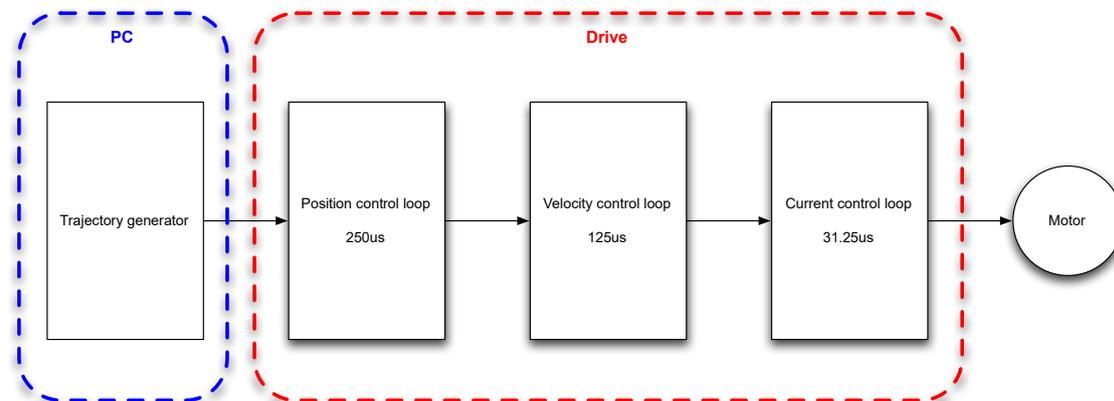


Figure 44, Exemple de distribution des boucles d'asservissement entre le drive et le PC central

De plus, si la période de rafraîchissement des consignes de position n'est pas suffisante, beaucoup de drives sont capables d'interpoler les positions de consigne entre deux temps de rafraîchissement consécutifs. Ceci permet de réduire les discontinuités de la consigne de position ; e.g. en remplaçant les steps de consignes en rampes.

#### 4.6.7 Avantages des bus de terrain

- Réduction du câblage.
- Distribuer les fonctions d'entrées-sorties en fonction des besoins d'automatisation.
- Dissocier la partie commande de la partie génération de consignes et ainsi dissocier les métiers et les fournisseurs de solutions.
- Augmenter le nombre d'informations à envoyer aux drives. Il est ainsi possible d'ajuster les paramètres des boucles de réglage à chaque période de rafraîchissement de la consigne ou même de calculer le modèle dynamique inverse sur le PC et d'utiliser la technique de commande a priori (voir les schémas de commande ci-dessous)

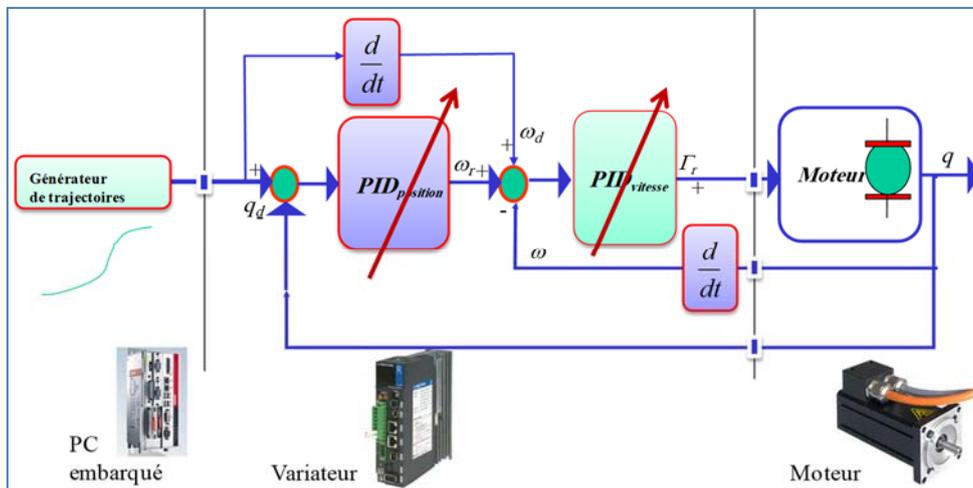


Figure 45, Bus de terrain – Boucles de contrôle avec paramètres variables en fonction de la position du robot

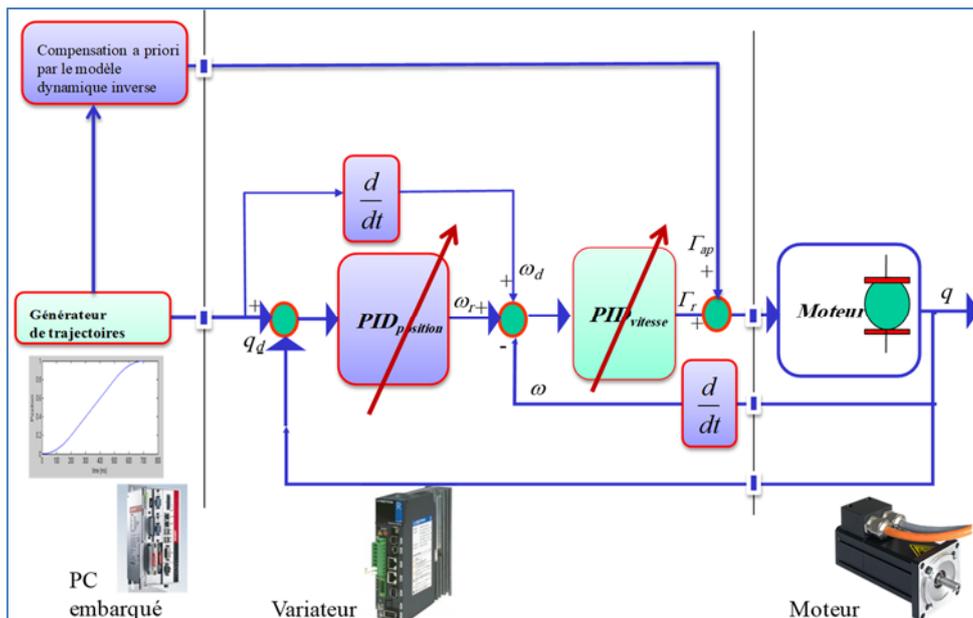


Figure 46, Bus de terrain – Boucles de contrôle avec implémentation d'un a priori de couple

## 4.7 Partie logicielle de la commande d'un robot

Dans cette partie du cours, il s'agira d'aborder toutes les composantes logicielles nécessaires à construire (développer) une commande de robot.



### 4.7.1 Le système d'exploitation temps réel

#### 4.7.1.1 Système d'exploitation

Un système d'exploitation est :

- **Une application logicielle** fonctionnant sous une famille de matériel donné (processeurs).
- **Un chef d'orchestre** qui gère toutes les ressources matérielles et logicielles du système en question (carte processeur et cartes associées).



**Les ressources à gérer sont:**

- L'allocation **mémoire** physique.
- L'allocation de la disponibilité du processeur.
- La gestion des interruptions et le démarrage des routines associées.
- La gestion des priorités d'exécution des tâches
- la gestion des événements de communication entre les tâches

L'application de la commande va ainsi fonctionner grâce à ce chef d'orchestre qui va gérer toutes les tâches qui composent notre logiciel de commande numérique.

#### 4.7.1.2 Le temps réel : Was Ist Das ?

A première vue, pour commander un robot nous devons **maitriser le temps**. Pour formaliser cette maîtrise du temps, on dit que le système d'exploitation doit être temps réel (ou avoir la caractéristique de temps réel). Cette maîtrise du temps est également nommée **déterminisme**.

#### Spécificités temps réel

En résumé, voici les spécificités d'un système d'exploitation temps réel

1. multitâches supporté,
2. évènements de synchronisation supportés,
3. **déterminisme** temporel dans l'exécution des tâches,
4. **déterminisme** temporel dans la prise en compte des interruptions,
5. **déterminisme** temporel dans la manipulation des évènements.



Lorsque nous maîtrisons le temps eu égard des ordres de grandeur de ce dernier (minutes, secondes, ms,  $\mu$ s...), nous dirons que nous fonctionnons en temps réel.

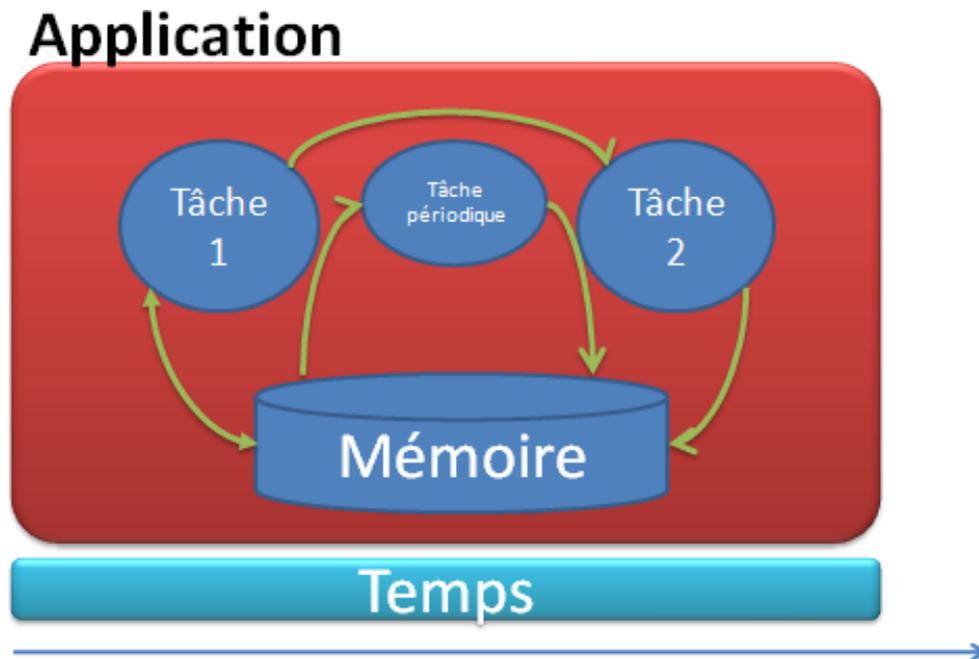


Figure 47, Application temps réel

- Le temps réel est une spécificité logicielle des applications lorsque la réaction aux événements occurrents se réalise d'une manière déterministe.
- Par événement nous voulons dire :
  - une interruption (logicielle ou matérielle),
  - le lancement périodique d'une opération,
  - l'accès à une mémoire pour lecture ou écriture.

**Remarque:**

Les systèmes opératifs Windows (7, 8, 10, ...) ne sont pas des systèmes d'exploitation temps réel bien qu'ils soient capable d'assurer un déterminisme de l'ordre de la ms quand ils ne sont pas chargés. Certains les utilisent pour développer des applications à temps réel non-critiques (ie. qui n'obéissent pas aux exigences ci-dessus!).

### 4.7.2 Outils de développement d'applications temps réels embarquées

Tout OS (Operating System : Système d'exploitation) temps réel est fourni avec son propre système de développement.

#### Mots clefs du développement:

- **Télécharger** l'application (**download**),
- L'**hôte (host)** est la machine sur laquelle s'effectuent les développements
- La **cible (Target)** est la machine sur laquelle fonctionne l'application de commande du robot,
- **Cross développement**, signifie développer sur une unité centrale appelé **Hôte** (de type PC par exemple) pour une autre machine appelée **cible** qui contient le logiciel de commande,
- **Cross compilation**, signifie compiler une application sur un processeur pour un autre processeur (voir également une autre famille de processeurs)
- **Le Shell** est l'outil de commande à distance depuis l'Hôte,
- **Le terminal**, une application pour visualiser les informations échangées entre l'hôte et la cible.

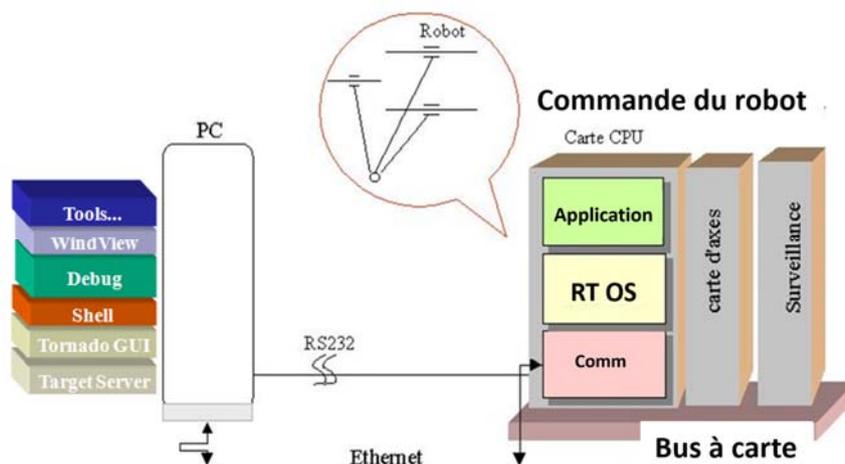


Figure 48, Exemple d'une application de commande de robot avec ses outils de cross développement

### 4.7.3 Mécanismes de communication temps réel

Un OS temps réel est un OS multitâches. Une application temps réel doit être construite autour de plusieurs **tâches** ou **processus** communicants entre eux.

Les processus utilisent des mécanismes de communication (IPC : Inter Process Communication mechanisms) pour se synchroniser et s'échanger des données.

#### Ces mécanismes sont:

- **Les sémaphores binaires** : des objets qui peuvent être échangés et sont consommés ou fournis.
- **Les sémaphores à compteur**: sont initialisées à un nombre donné et sont consommés ou fournis jusqu'à épuisement du stock.
- **Les mutex** sont des sémaphores qui sont soit disponibles soit en utilisation par une ressource.
- **Les mémoires partagées** sont des zones mémoires.
- **Les messageries** pour échanger des chaînes de caractères.

#### 4.7.4 Liste de systèmes d'exploitation temps réel

##### Systèmes d'exploitation temps réel (RTOS)

- ↳ **Lynx Os** de LynxOs Inc. pour systèmes embarqués et temps réel, devenu **LynuxWorks**
- ↳ **QNX** OS de QNX Software,
- ↳ **MS Windows CE** de Microsoft,
- ↳ **Autres** développées par des universités et des laboratoires ()

##### Systèmes d'exploitation uniquement pour applications embarquées (embedded) tels que les téléphones portables, les systèmes de navigation GPS et autres.

- ↳ **VxWorks from WindRiver**
- ↳ **MS Windows XPe XPembedded de Microsoft pour systèmes embarqués,**
- ↳ **Windows CE**
  - ↳ **Linux (redhat,...) , Linux Embedded(BlueCat de LynuxWorks(ex Lynx),...)**

##### Extensions temps réel pour systèmes d'exploitation non temps réels

- ↳ **RTX** d'IntervalZero Inc. est une extension temps réel pour systèmes fonctionnant sous les OS Microsoft,
- ↳ **RTLlinux** extension temps réel pour Linux,
- ↳ **Autres** pour Linux (tel que **RtaiLib**),
- ↳ **Autres** pour MS Windows t.q. **Hyperkernel, InTime,....**

##### Quelques systèmes d'exploitation pour microcontrôleurs

- ↳ **FreeRTOS (FreeRTOS.org)** pour Atmel, Microchip, ARM7, ARM9, Cortex-M3, MSP430, MicroBlaze,
- ↳ **PIC32, 32-bit, RTOS for Microchip Technology's Microcontrollers from Express Logic.**
- ↳ Linux,

Complete list in : [https://en.wikipedia.org/wiki/Comparison\\_of\\_real-time\\_operating\\_systems](https://en.wikipedia.org/wiki/Comparison_of_real-time_operating_systems)

#### Parenthèse

### Info,

## Intel acquiert Wind River Systems

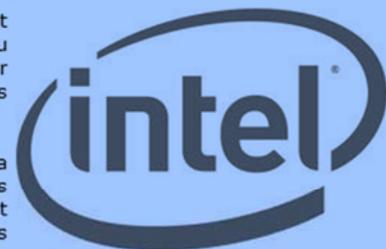
Publié par [Matthieu Dailly](#) le Vendredi 5 Juin 2009

Intel confirme ses ambitions dans le mobile. Le fabricant américain de microprocesseurs vient d'annoncer avoir conclu un accord avec l'éditeur de logiciels pour mobile Wind River Systems, qu'il rachèterait pour environ 884 millions de dollars en numéraire (11,50 dollars par action, +44%).

Parallèlement à ce rachat, Intel se tient prêt à lancer sa nouvelle puce « Medfield », conçu pour les smartphones destinés au grand public et prévu pour 2011 en remplacement des puces « Moorestown », initialement conçues pour les smartphones haut de gamme.

« Cette acquisition va nous apporter des activités dans les logiciels complémentaires (de celle d'Intel) et leaders sur leur marché, ainsi qu'un groupe de personnes incroyablement talentueuses, afin de nous aider à faire croître nos capacités pour les systèmes embarqués et les appareils portables », explique Renee James, responsable de l'activité logiciels et services chez Intel. La firme souhaite en effet concevoir des terminaux de plus en plus compacts, des MID (terminaux internet mobiles) aux derniers mobiles multimédias.

Wind River Systems est basée à Alameda (Californie) et compte 1.600 employés dans 15 pays pour un chiffre d'affaires annuel de 354,7 millions de dollars.



#### 4.7.5 L'application de commande du robot

Le logiciel de commande d'un robot contient tous les blocs fonctionnels étudiés précédemment à savoir ceux représentés par la figure ci-dessous :



Figure 49, Composantes du logiciel de commande

**Ordres de niveau haut**, concerne toutes les fonctions qui gèrent l'interface homme-machine, les ordres de haut niveau mais également la gestion de tout type d'interface opérateur. Les ordres de niveau haut peuvent concerner l'envoi des paramètres du trajet, la configuration de la dynamique, l'envoi des paramètres du réglage, l'activation des préhenseurs, la vérification de l'état d'une entrée digitale, le comptage d'opérations de niveau haut (comme le nombre de prise ou d'échec de prises).

**Génération de trajectoire**, gère la génération de trajectoire avec les paramètres envoyés depuis la couche niveau haut. C'est dans ce module que sont effectués la gestion des trajets, les profils de vitesses et d'accélération, l'interpolation et la synchronisation des axes. Ce module est souvent appelé **interpolateur**.

**Transformation de coordonnées**, ce module implémente les modèles géométriques directs et inverses. Il est possible d'intégrer ce module dans le module précédent de génération de trajectoire.

**Réglage**, formé principalement par la boucle périodique de réglage des axes.

**Pilotes des cartes**, sont des modules qui permettent de gérer les cartes d'acquisition et de fournir toutes les fonctions accessibles depuis ces dernières (lecture analogique, lecture digitale, lecture des encodeurs, lecture de compteurs, activation et désactivation de sorties digitales, pilotage de sorties analogiques,...)

**Sécurité**, ce module concerne la gestion de la sécurité de la commande numérique et du robot. Il peut être implémenté sous forme d'une tâche périodique qui teste la validité des erreurs de réglage de position et de vitesses, la validité des consignes de positions et de vitesses, le test de la redondance de capteurs, le test de certaines limites différentielles sur les positions articulaires,...etc.

**Remarque :**

Les modules de la commande d'axes peuvent être implémentés soit sous forme d'une tâche (équivalent d'un thread sous Windows), d'une librairie dynamique ou statique ou d'une classe.

#### 4.7.6 La commande minimale :

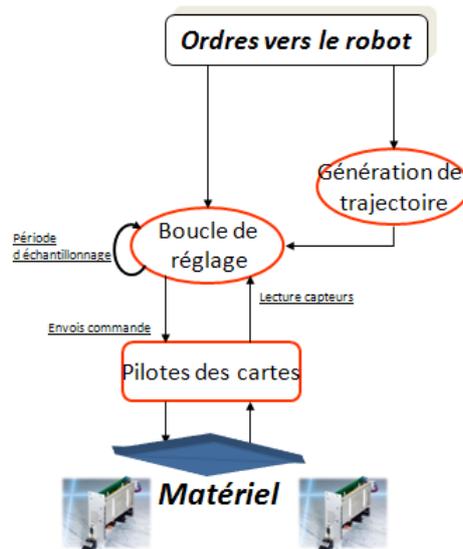


Figure 50, Structure minimale d'une commande de robot

Les **ordres vers le robot** sont implémentés sous la forme d'une bibliothèque d'instructions de **supervision** (`allezAupoint()`, `commence()`, `arrete()`,...)

La **boucle de réglage**, cette boucle est la plus importante elle assure une lecture capteurs, calcule couples moteurs et envois des commandes aux amplis;...

la **génération de la trajectoire** génère les profils et effectue les interpolations d'axes.

## **Annexes**

- **Annexe 1** – Génération de profils de trajectoires
- **Annexe 2** – Interpolation de trajectoires
- **Annexe 3** – Eléments de matériel de commande numérique

## 4.8 Annexe 1 : Calcul de profils de trajectoires

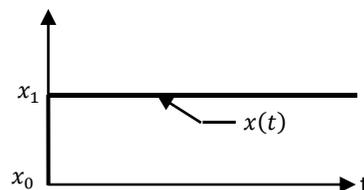
### 4.8.1 Position du problème

Soit un moteur linéaire (M). Le problème posé concerne la réponse à la question suivante :

**Comment générer une consigne de position pour se déplacer d'une position  $x_0$  à une position  $x_1$  ?**

### 4.8.2 Profil de position de type échelon

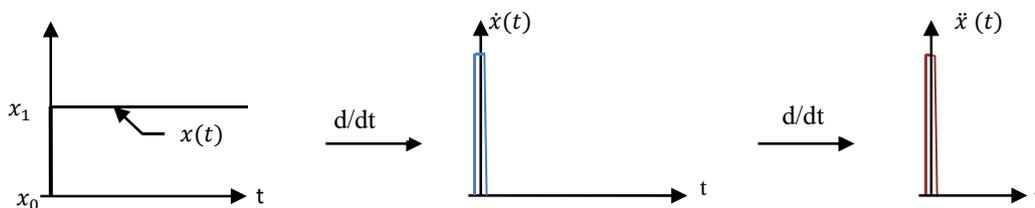
En automatique, on commence souvent par apprendre que la manière la plus simple de réaliser cela consiste à utiliser un échelon (soit un step).



$x(t)$  est alors défini comme suit :

$$x(t) = \begin{cases} x_0 & t \leq 0 \\ x_1 & t > 0 \end{cases}$$

Observons les formes de la vitesse et de l'accélération correspondantes à cette consigne.



La vitesse et accélération associées à cette consigne sont des Diracs et vont ainsi engendrer un couple brutal qui n'est pas bon pour la mécanique (durée de vie des éléments de transmission). Ce saut en accélération risque également d'exciter les fréquences propres non souhaitées (car non prises en compte par le contrôle) et ainsi provoquer des résonances mécaniques. Ce saut de couple brutal, s'il n'est pas pris en charge par un choix judicieux des paramètres du réglage, risque de provoquer des dépassements (overshoot) de la grandeur asservie (ie, la position).

**Dans le cas de la commande d'actionneurs en générale et particulièrement pour la commande de robots, la trajectoire de type ECHELON ne doit jamais être utilisée.**

**Remarque importante:**

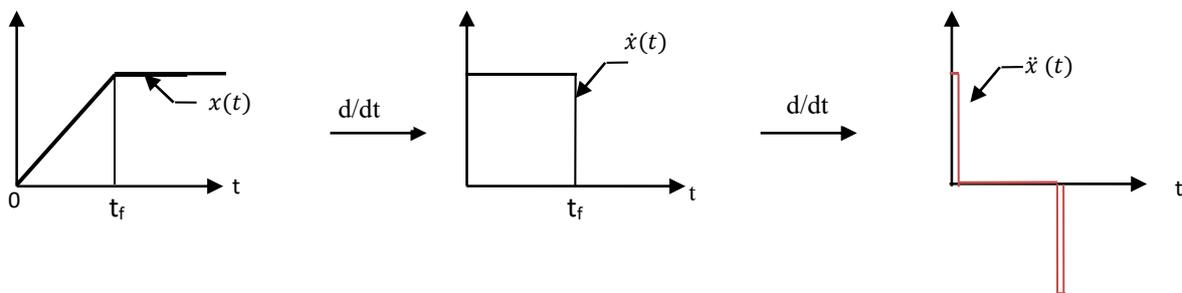
En pratique, la vitesse et accélération (pointe de Dirac) ne sont pas infinies car les dérivées des consignes (de la position, respectivement celle de vitesse) s'effectuent à la cadence de la période d'échantillonnage du contrôle (sampling period  $T_s$ ).

Les valeurs maximales de la vitesse et de l'accélération sont données par :

$$V_{max} = \frac{\Delta x}{T_s} \text{ et } Acc_{max} = \frac{V_{max}}{T_s} = \frac{\Delta x}{T_s^2}$$

**4.8.3 Profil de position de type Rampe (Ramp)**

Une autre trajectoire de consigne simple à mettre en œuvre est la rampe de position. C'est une trajectoire réalisée à vitesse constante tout le long du trajet.



Dans ce cas, nous maîtrisons le temps de réalisation du parcours, la vitesse est ainsi limitée (constante). Le saut d'accélération reste néanmoins toujours brutale mais moins que dans le cas d'un échelon.

**Calcul de la trajectoire :****Hypothèses de calcul du trajet:**

- $t_f$  (temps de réalisation du parcours) ou  $V_{max}$  (Vitesse constante le long du parcours).
- La longueur du trajet <sup>4</sup>  $\Delta x = x_1 - x_0$  ;

Si  $V_{max}$  est imposé alors  $t_f = \frac{\Delta x}{V_{max}}$

Si  $t_f$  est imposé alors  $V_{max} = \frac{\Delta x}{t_f}$

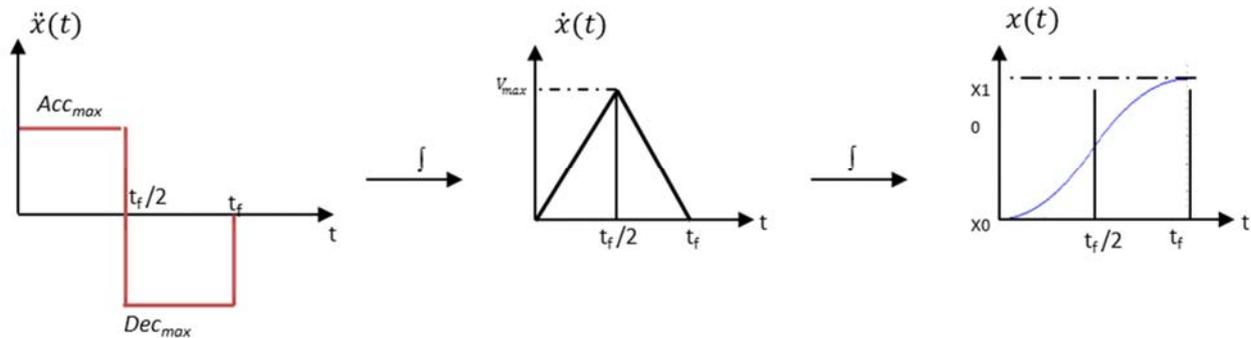
Expression de la trajectoire

$$\begin{cases} x_0 & \text{si } t \leq 0 \\ x_0 + V_{max} * t & 0 < t \leq t_f \\ x_1 & t > t_f \end{cases}$$

<sup>4</sup>  $\Delta x$  est la longueur du parcours linéaire considérée dans ce document. Nous pouvons le remplacer par  $\Delta S$  ; la distance curviligne de parcours si plusieurs degrés de liberté sont à considérer.

#### 4.8.4 Profil triangulaire en vitesse

Pour éviter les Diracs d'accélération et de décélération, une solution serait de d'accélérer d'une manière constante pendant la moitié du trajet et de décélérer avec une décélération constante sur l'autre moitié du trajet. Le profil de vitesse est ainsi triangulaire et le profil de position est parabolique.



#### Hypothèses de calcul du profil:

- Accélération  $Acc\_max$
- Décélération identique à l'accélération
- La longueur du trajet  $\Delta x$

Inconnu:  $t_f$

$\Delta x$  est l'aire du triangle décrivant le profil de vitesse.

$$\Delta x = V_{max} * \frac{t_f}{2}$$

$$\text{et } V_{max} = Acc\_max * \frac{t_f}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta x = Acc\_max \frac{t_f^2}{4}$$

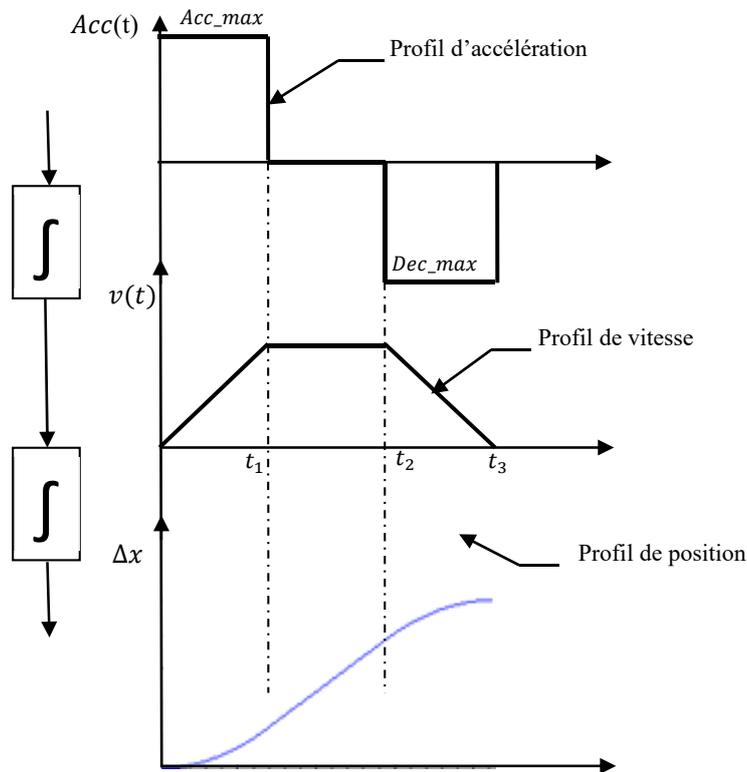
$$t_f = 2 \sqrt{\frac{\Delta x}{Acc\_max}}$$

#### Génération de la consigne :

$$x(t) = \begin{cases} x_0 & t \leq 0 \\ x_0 + Acc\_max \frac{t^2}{2} & 0 < t < \frac{t_f}{2} \\ \frac{x_1 - x_0}{2} + V_{max} \left( t - \frac{t_f}{2} \right) - \frac{Dec\_max}{2} \left( t - \frac{t_f}{2} \right)^2 & \frac{t_f}{2} \leq t < t_f \\ x_1 & t \geq t_f \end{cases}$$

Ce profil permet de réaliser le trajet en un minimum de temps tout en ayant une accélération et décélération constantes. Néanmoins, l'inconvénient est que la vitesse de pointe peut être très élevée au cas où le parcours est long. Le profil trapézoïdal en vitesse est alors préconisé car il permet de limiter la vitesse à une vitesse maximale définie dans les hypothèses.

### 4.8.5 Profil de vitesse trapézoïdale



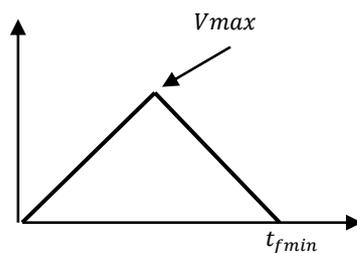
Dans le cas de ce profil nous essayons la vitesse maximale du trajet ( $V_{max}$ ) est définie et limitée et l'accélération maximale ( $Acc\_max$ ) {égale à la décélération maximale  $Dec\_max$ <sup>5</sup>}.

#### Hypothèses de calcul du profil :

- Accélération  $Acc\_max$ .
- Décélération identique à l'accélération.
- Vitesse max  $V_{max}$ .
- La longueur du trajet  $\Delta x$

Le trajet minimal  $\Delta X_{min}$  correspond à l'aire obtenue pour un profil de vitesse triangulaire dont la vitesse de pointe est  $V_{max}$ .

$t_{fmin}$  est le temps final correspondant à la réalisation de ce trajet  $\Delta X_{min}$ .



<sup>5</sup> L'accélération est supposée égale à la décélération pour simplifier le problème. Dans le cas général les accélérations maximales  $Acc\_max$  et  $Dec\_max$  ne sont pas nécessairement identiques.

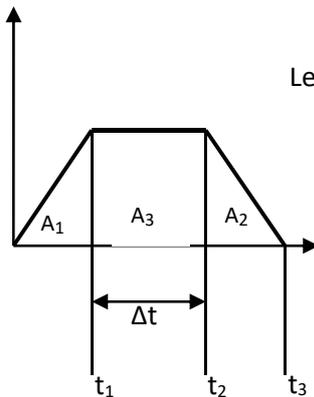
$$\Delta X_{min} = \frac{V_{max}^2}{Acc\_max} \text{ et } t_1 = \frac{t_{fmin}}{2}$$

$$t_{fmin} = 2 \sqrt{\frac{\Delta X_{min}}{Acc\_max}}$$

**1<sup>er</sup> cas :**

Si  $\Delta X \geq \Delta X_{min}$ ,  $V_{max}$  est alors atteinte. Il faut donc rajouter une phase à vitesse constante et dont la durée est :

$$\Delta t = \frac{\Delta x - \Delta X_{min}}{V_{max}}$$



Les aires  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$  sont données comme suit:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = \Delta s_{min} \\ A_3 = \Delta s - \Delta s_{min} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{t_{fmin}}{2} = \sqrt{\frac{\Delta X_{min}}{Acc\_max}} \\ t_2 = t_1 + \Delta t \\ t_3 = t_2 + \frac{t_{fmin}}{2} = 2 \sqrt{\frac{\Delta X_{min}}{Acc\_max}} + \frac{\Delta x - \Delta X_{min}}{V_{max}} \end{cases}$$

**2<sup>ème</sup> cas :**

Si  $\Delta X < \Delta X_{min}$  alors  $V_{max}$  ne sera pas atteinte et le profil sera purement triangulaire. La vitesse maximale devra être adaptée pour réaliser le trajet à parcourir.

$$V_{max\_new} = \sqrt{\Delta x * Acc\_max}$$

$$t_1 = t_2 = t_3/2 = t_f/2 \quad \text{et} \quad t_f = 2 \sqrt{\frac{\Delta x}{Acc\_max}}$$

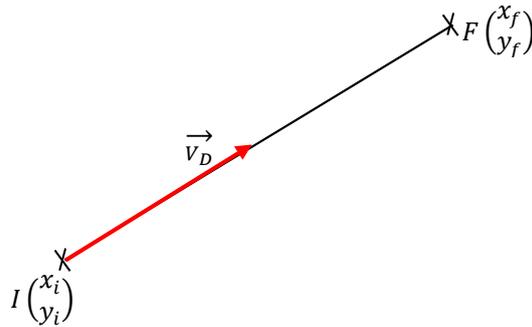
## 4.9 Annexe 2 : Interpolation de trajectoires

### 4.9.1 Interpolation linéaire de trajet

Dans ce paragraphe, il faudra calculer la ligne droite depuis point  $I(x_i, y_i)$  au point  $F(x_f, y_f)$ .

Le trajet à parcourir est donné comme suit:

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(x_f - x_i)^2 + (y_f - y_i)^2}$$



Soit  $\vec{v}_D$  le vecteur directeur le long du parcours

$$\vec{v}_D = \begin{cases} \frac{x_f - x_i}{\Delta s} \\ \frac{y_f - y_i}{\Delta s} \end{cases} = \begin{cases} v_{Dx} \\ v_{Dy} \end{cases}$$

#### Comment générer le trajet en ligne droite depuis le point I jusqu'au point F ?

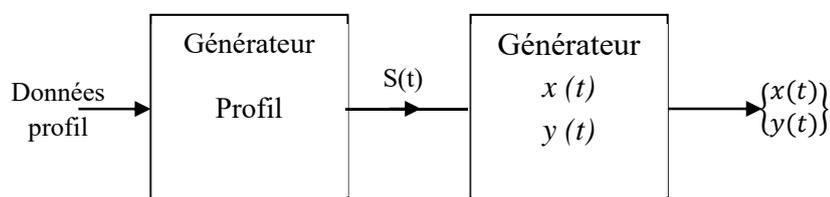
Cette démarche s'appelle interpolation linéaire et revient à calculer les points du trajet en question en fonction du temps. Elle est exécutée en deux temps :

- La première opération consiste à générer le profil de position  $s(t)$  de longueur  $\Delta s$  (ref. Annexe calcul de profil).
- Le profil  $s(t)$  doit par la suite être projeté sur la forme de la trajectoire pour obtenir les coordonnées  $x(t)$  et  $y(t)$  correspondantes. Nous obtenons ainsi les équations des points de la trajectoire:

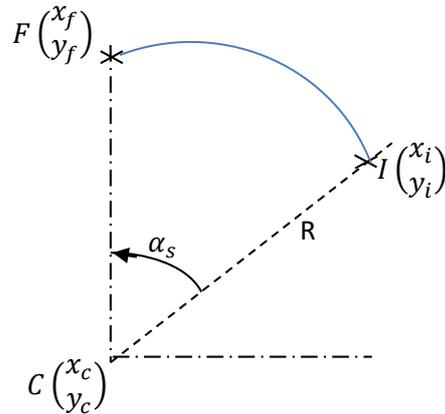
$$\begin{aligned} x(t) &= x_i + v_{Dx} \cdot s(t) \\ y(t) &= y_i + v_{Dy} \cdot s(t) \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned} x(t=0) &= x_i & , & & x(t=t_f) &= x_f \\ y(t=0) &= y_i & , & & y(t=t_f) &= y_f \end{aligned}$$



### 4.9.2 Interpolation circulaire



Dans ce cas il s'agit de réaliser une trajectoire circulaire (arc de cercle) depuis le point « I » au point « F ». « C » est le centre du cercle considéré,  $R$  est le rayon de ce cercle.

Soit  $\alpha$  l'angle à parcourir variant de 0 à  $\alpha_s$ . La distance à parcourir varie de 0 à  $\Delta s = R \cdot \alpha_s$ .

- La première étape consiste à générer le profil de position pour le trajet curviligne le long de l'arc de cercle grâce à un choix approprié du type de profil (trapézoïdale en vitesse ou trapézoïdale en accélération).
- La deuxième opération consiste à déduire la coordonnée  $(x(t), y(t))$  le long du parcours circulaire.

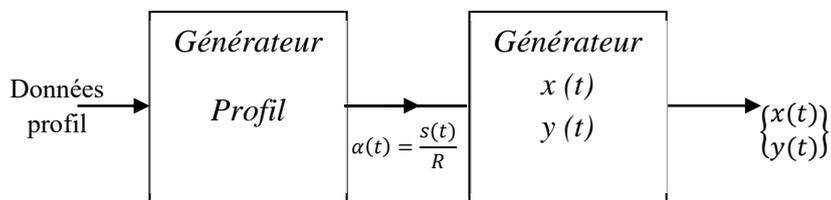
Les expressions des coordonnées  $x(t)$  et  $y(t)$  (lois de mouvement) sont données comme suit :

$$x(t) = x_c + R \sin(\alpha(t)) = x_c + R \sin\left(\frac{s(t)}{R}\right)$$

$$y(t) = y_c + R \cos(\alpha(t)) = y_c + R \cos\left(\frac{s(t)}{R}\right)$$

$$x(t = 0) = x_i ; \quad x(t = t_f) = x_f$$

$$y(t = 0) = y_i ; \quad y(t = t_f) = y_f$$



## 4.10 Annexe 3- Quelques éléments de matériel

### 4.10.1 Le bus à cartes

Le bus fait penser au transport; nous n'en sommes pas loin sauf que dans notre cas nous parlerons de transport de données. Le bus à carte est **une carte dans laquelle se connectent toutes les cartes électroniques de la commande**. Ce bus permet aux cartes de communiquer entre elles grâce aux signaux de données, d'adresses et de contrôle qui le composent. Nous appellerons Fond de panier (**Backplane**) la carte électronique sur laquelle s'insèrent toutes les cartes du bus. Ce fond de panier est passif car n'intègre jamais d'intelligence (i.e. de processeur).

Il existe énormément de types de bus. En commande numérique de robot, l'un des premiers utilisés est le **bus VME supporté principalement par la compagnie Motorola**<sup>6</sup>. D'autres bus industriels sont des bus propriétaires (i.e. qu'ils ne sont supportés que par leur seul fournisseur). Ils ont ainsi existé et beaucoup ont disparu (tel que Gespac de l'entreprise Gespac, Le bus MCA d'IBM («micro channel architecture», ...). Le bus VME a longtemps monopolisé le marché industriel à cause de sa robustesse, sa pérennité et sa simplicité. Un consortium<sup>7</sup> guidé par Intel a lancé le bus Compact PCI qui reprend principalement les signaux PCI.

Pour plus de détails sur tous les bus existants et disparus, on pourra consulter la page web suivante : <http://www.picmg.org/v2internal/specifications.htm>:

#### Formats et bus à cartes

Il y a principalement les types de formats suivants :

**1-** Format de cartes rackables (dites cartes à lames (Blade format))

Ce sont des cartes qui se profilent comme des lames et qu'on insère dans une armoire (voir figure ci-contre)

Exemples : VME, Compact PCI (CPCI), Micro TCA



Figure 51, Exemples de systèmes rackables

**2-** Format à slot. L'exemple type de ce type de cartes est le format de cartes PCI et PCI express. Le PCI existe en format standard avec des cartes mères (Motherboard) et également avec un fond de panier passif. La carte mère est une carte processeur qui intègre le bus à cartes. Pour des raisons de pérennité, des variantes industrielles endurcies de cartes mères existent pour les



Figure 52, De gauche à droite, carte mère industrielle, Fond de panier passif, carte processeur PCI

<sup>6</sup> Motorola semiconductors a disparu au profit de la nouvelle entité Freescale

<sup>7</sup> Lancé depuis le 2 septembre 1997 par le consortium PICMG.

applications exigeantes (Automation et contrôle).

#### 4.10.2 Les alimentations :

Nous distinguons deux types d'alimentations

- alimentations des cartes électroniques d'acquisition et processeurs. Ces alimentations ont des formats bien particuliers car selon les bus utilisés elles doivent fournir différents niveaux de tension (à des puissances déterminées).
- alimentations des amplificateurs de moteurs qui dépendent des puissances moteurs.



Figure 53, Exemples d'alimentations pour format Eurocarte. Alim de carte mère (extrême droite)

## PARTIE V

# Actionneurs et micro- actionneurs

Technologie et applications



### RÉSUMÉ

Cette partie du cours expose les différents types d'actionnement utilisés en robotique et micro-robotique. Les outils d'optimisation et de choix d'un moteur à courant continu sont particulièrement présentés et détaillés.

M. Bouri

---

*Actionneurs.*


---

## Sommaire

---

5.1	<b>Introduction</b> .....	3
5.2	<b>Types d'actionneurs conventionnels.</b> .....	4
5.2.1	Actionneurs hydrauliques.....	4
5.2.2	Actionneurs pneumatiques. ....	4
5.2.3	Actionneurs électromécaniques.....	5
5.3	<b>Comparaison des énergies spécifiques.</b> .....	5
5.4	<b>Principaux types d'actionneurs électromécaniques de la robotique.</b> .....	6
5.4.1	Moteurs pas-à-pas (stepping motors).....	6
5.4.2	Moteurs à courant continu à balais (Brushed DC motors).....	7
5.4.3	Moteurs à courant continu sans balais (Brushless DC motors).....	8
5.5	<b>Équations principales d'un moteur à courant continu.</b> .....	9
5.6	<b>Facteur de régulation.</b> .....	10
5.7	<b>Pertes dans un moteur électrique.</b> .....	11
5.8	<b>Limites thermiques des moteurs à courant continu.</b> .....	12
5.9	<b>Adaptation optimale.</b> .....	15
5.10	<b>Power rate</b> .....	16
5.10.1	Utilisation du power rate. ....	16
5.10.2	Calcul et signification du power rate.....	17
5.11	<b>Optimisation des pertes.</b> .....	17
5.11.1	Optimisation par le rapport de transmission. ....	18
5.11.2	Optimisation par le profil de vitesse. ....	18
5.12	<b>Actionneurs pour micro-manipulateurs.</b> .....	19
5.12.1	Actionneurs à déformation de matériaux. ....	20
5.12.2	Combinaison macro- et micro-déplacements. ....	28
5.13	<b>Bibliographie.</b> .....	29

## 5.1 Introduction

Le choix des actionneurs qui seront utilisés pour les différents axes d'un robot dépendra de plusieurs facteurs, techniques et économiques, définis par le cahier des charges. Pour être en mesure de les sélectionner judicieusement, il est important d'en connaître les principales caractéristiques.

Dans ce chapitre nous allons rapidement présenter les différents types d'actionneurs les plus couramment utilisés en robotique et en citer les avantages et défauts respectifs.

Nous nous attarderons plus spécialement sur le cas des moteurs à courant continu (CC) qui sont actuellement les plus usuels en robotique industrielle. Nous verrons comment choisir le moteur en fonction du cahier des charges et de sa fiche technique.

Finalement nous introduirons quelques types d'actionneurs, encore peu utilisés en robotique industrielle, mais particulièrement bien adaptés à la robotique de précision.

Ce chapitre n'a pas la prétention d'être exhaustif. Nous ne pouvons qu'encourager le lecteur désirant approfondir ce domaine à se référer à la bibliographie donnée en fin de chapitre. Néanmoins, les outils et réflexions proposés ici doivent permettre aux concepteurs de robots d'effectuer les bons choix initiaux.

## 5.2 Types d'actionneurs conventionnels.

Nous appelons "actionneurs conventionnels", les actionneurs les plus utilisés en robotique industrielle. Nous verrons en fin de chapitre, au paragraphe 3.2.11, d'autres types d'actionneurs mieux adaptés aux micro-manipulations, mais encore peu disponibles sur le marché.

Nous avons classé par ordre croissant d'importance, trois types d'actionneurs conventionnels en fonction de la source d'énergie: les actionneurs hydrauliques, pneumatiques et électromécaniques.

### 5.2.1 Actionneurs hydrauliques.

L'énergie hydraulique a presque le monopole dans le domaine de la robotique industrielle lourde.

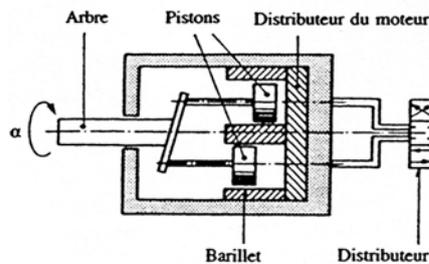
Ses avantages principaux sont:

- un rapport puissance/poids élevé (supérieur à 1 kW par kg pour une pression de 100 bar);
- des constantes de temps très faibles permettant d'excellentes performances en vitesse et accélération;
- la quasi-incompressibilité des fluides conduisant à une raideur élevée.

Ses inconvénients majeurs sont :

- Le coût élevé, déterminé par le groupe hydraulique et certains composants tels que les servovalves. Pour éviter des fuites, les usinages et le montage doivent être d'excellente qualité, donc nécessairement coûteux;
- L'encombrement (tuyaux, raccords, ...) et le dimensionnement délicat des actionneurs, particulièrement ceux de petites dimensions ;
- Le danger de fuite d'huile ;
- L'incompatibilité de l'huile avec l'industrie alimentaire (des huiles spéciales doivent être employées pour ces applications ;
- Le danger d'inondation d'huile en cas de rupture d'un conduit; - le bruit généré par le groupe hydraulique.

Il existe des actionneurs hydrauliques linéaires (vérins à simple ou double effet) ou rotatifs. Ces derniers sont réalisés le plus souvent par des moteurs composés de vérin à simple effet, commandés par des distributeurs (figure 1). Les vitesses maximales de rotations sont relativement faibles, de l'ordre de 1000 rpm, mais ils ont des couples élevés par rapport à leurs dimensions (Typiquement 10Nm/kg, contre 1 Nm/kg pour les moteur électriques)



**Fig. 1.** Esquisse d'un moteur hydraulique rotatif

Ce type d'actionneurs est ainsi presque exclusivement réservé à la robotique lourde et exigeante en besoins de couples et d'efforts. Notons toutefois, que certaines applications de la robotique de précision font à nouveau appel à ce type d'actionneurs.

### 5.2.2 Actionneurs pneumatiques.

L'énergie pneumatique constitue une solution bon marché et simple d'emploi pour les mouvements tout ou rien de l'un ou l'autre des axes d'un robot industriel. En effet, cette énergie est disponible sur chaque poste de travail, elle est propre et les éventuelles fuites ne sont, à priori, pas gênantes. Dans la plupart des cas on peut s'affranchir d'un conduit de retour. La faible masse de ces actionneurs permet des mouvements rapides. Toutefois, du fait de la compressibilité de l'air, leur contrôle en vitesse ou

en position est délicat et la densité d'énergie véhiculée est faible par rapport aux actionneurs hydrauliques. Ainsi, l'utilisation des actionneurs pneumatiques est généralement confinée aux préhenseurs ou à des axes de transferts à positions indexées.

5.2.3 Actionneurs électromécaniques.

L'énergie électrique, partout disponible et très facilement transportable, est actuellement de loin l'énergie la plus utilisées en robotique industrielle. Les actionneurs électromécaniques présentent les avantages suivants :

- Fonctionnement propre et silencieux.
- Prix des composants relativement bas;

Une très grande variété de produits existe sur le marché, qui, par sa taille, permet d'avoir à disposition des composants à des prix très compétitifs.

L'inconvénient d'une densité d'énergie inférieure à celle de actionneurs hydrauliques est compensé par la simplicité de mise en oeuvre, la fiabilité et le faible coût de ces actionneurs.

5.3 Comparaison des énergies spécifiques.

Pour chacun des actionneurs décrit ci-dessus, leurs performances peuvent être caractérisées par l'énergie spécifique  $w$  :

$$w = W / V_a \qquad J/m^3 \text{ ou } N/m^2 \qquad (\text{équation 1})$$

où  $W$  est l'énergie fournie et  $V_a$  le volume actif de l'actionneur.

L'énergie spécifique des actionneurs hydrauliques  $w_h$  et pneumatiques  $w_p$ , est la pression interne  $p$ , dans le système :

$$w_h \text{ ou } w_p = p \qquad N/m^2 \qquad (\text{équation 2})$$

Pour un actionneur électromécanique on a :

$$w_e = \frac{1}{2} \cdot B^2 / \mu_0 \qquad N/m^2 \qquad (\text{équation 3})$$

où  $B$  est le champ magnétique dans l'entrefer et  $\mu_0$  la perméabilité du vide ( $0.4 \cdot 10^{-6}$  Vs/Am). Pour chacun de ces cas on peut déterminer une valeur maximale d'énergie spécifique, limitée par les matériaux utilisés.

La table 1 compare les énergies spécifiques des trois types d'actionneurs considérés ici, ceci pour des valeurs maximales courantes.

type d'actionneur	facteur limitatif	énergie spécifique [J/m <sup>3</sup> ]
hydraulique	pression maximale: 70 bar	7*10 <sup>6</sup>
pneumatique	pression maximale: 6 bar	0.6*10 <sup>6</sup>
électrique	champ magnétique (saturation): 1T	0.4*10 <sup>6</sup>

**Table 1** Comparaison des énergies spécifiques

Cette table illustre bien les performances en termes de puissance par unité de volume des actionneurs hydrauliques. C'est donc l'aspect économique (coût et fiabilité) qui rend les actionneurs électromécaniques attractifs pour la robotique industrielle.

#### 5.4 Principaux types d'actionneurs électromécaniques de la robotique.

Dans les paragraphes suivants, nous allons très rapidement citer les avantages et inconvénients respectifs des moteurs électriques les plus utilisés en robotique.

##### 5.4.1 Moteurs pas-à-pas (stepping motors).

Les moteurs pas-à-pas présentent de nombreux avantages: ils sont d'une construction simple (leur coût est relativement bas, ils sont fiables et robustes), ils peuvent travailler directement avec des commandes digitales en boucle ouverte (suppression du capteur de position, pour autant que l'on puisse garantir qu'aucun pas n'est sauté) et ils présentent un couple élevé à basse vitesse (jusqu'à 5 fois celui d'un moteur CC) permettant un entraînement direct.

Leurs inconvénients majeurs sont la présence de positions d'arrêts préférentielles (limitation de la résolution), la génération de vibrations (bruit, précision du système dégradée) et leur basse vitesse maximale.

Ces inconvénients peuvent être contournés avec une commande sophistiquée utilisant un capteur de positions. Dans ce cas on perd l'avantage majeur qu'est la simplicité des entraînements pas-à-pas et généralement on préfère utiliser des moteurs à courant continu avec ou sans balais.

Ainsi, les moteurs pas-à-pas sont relativement peu utilisés en robotique. Toutefois, pour des applications simples dont on connaît parfaitement les conditions de travail (par exemple les imprimantes ou traceurs) ces entraînements sont encore souvent utilisés.

Voyons maintenant les principaux types de moteurs pas-à-pas ainsi que leurs caractéristiques principales.

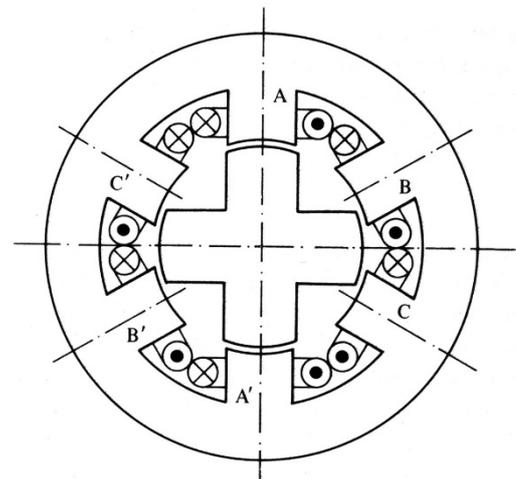
##### **Réductant (variable reluctance).**

Le moteur pas-à-pas réductant ne comporte pas d'aimant permanent (figure 2). Il est robuste et bon marché.

Ce type de moteur n'a pas de position stable sans alimentation (pas d'aimant). Son couple et son rendement sont faibles. Par contre, sa petite inertie permet un bon rapport couple sur inertie ( $M/J$ ). C'est donc un moteur à haute capacité d'accélération et de décélération.

Ce type de moteur est insensible à la polarité du courant. Il faut donc un minimum de trois phases pour avoir un mouvement dans les deux directions.

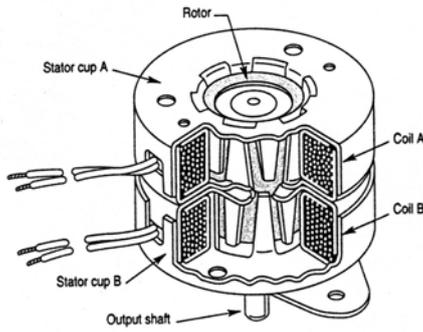
Ces moteurs sont utilisés pour des entraînements simples de petites dimensions (par exemple tables pour le micro-positionnement). Leur nombre de pas par tour est généralement compris entre 12 et 72.



**Fig. 2** Structure d'un moteur pas-à-pas triphasé

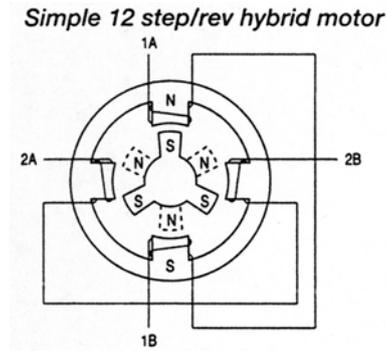
##### **Électromagnétique (permanent magnet).**

Le moteur pas-à-pas électromagnétique a un, ou plusieurs aimants permanents au rotor (figure 3). Il présente des positions fixes même sans être alimenté. Son rendement est élevé.



Courtesy  
Airpax Corp., USA

**Fig. 3** Moteur pas-à-pas électromécanique. **Fig. 4** Moteur pas-à-pas réluctant polarisé



Ce type de moteur est caractérisé par une alimentation de phases de signes alternés. Deux phases sont suffisantes. Sa structure ne permet pas d'avoir un grand nombre de pas par tour généralement compris entre 2 et 24.

Ce type de moteur pas-à-pas est réservé aux applications simples en boucle ouverte.

**Réluctant polarisé (hybrid motor).**

C'est le type de moteur pas-à-pas le plus utilisé actuellement pour des applications sophistiquées (figure 4, page précédente). Il peut avoir un nombre de pas par tour élevé, compris entre 24 et 400. Son rendement est bon.

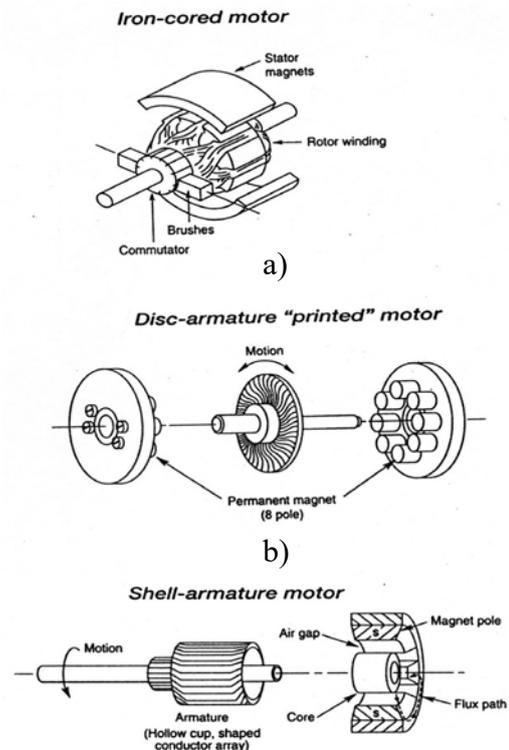
5.4.2 Moteurs à courant continu à balais (Brushed DC motors).

Ce sont les moteurs les plus utilisés en robotique à ce jour. Ils sont fiables, d'un prix intéressant et un grand choix existe sur le marché. Leurs performances dynamiques sont excellentes.

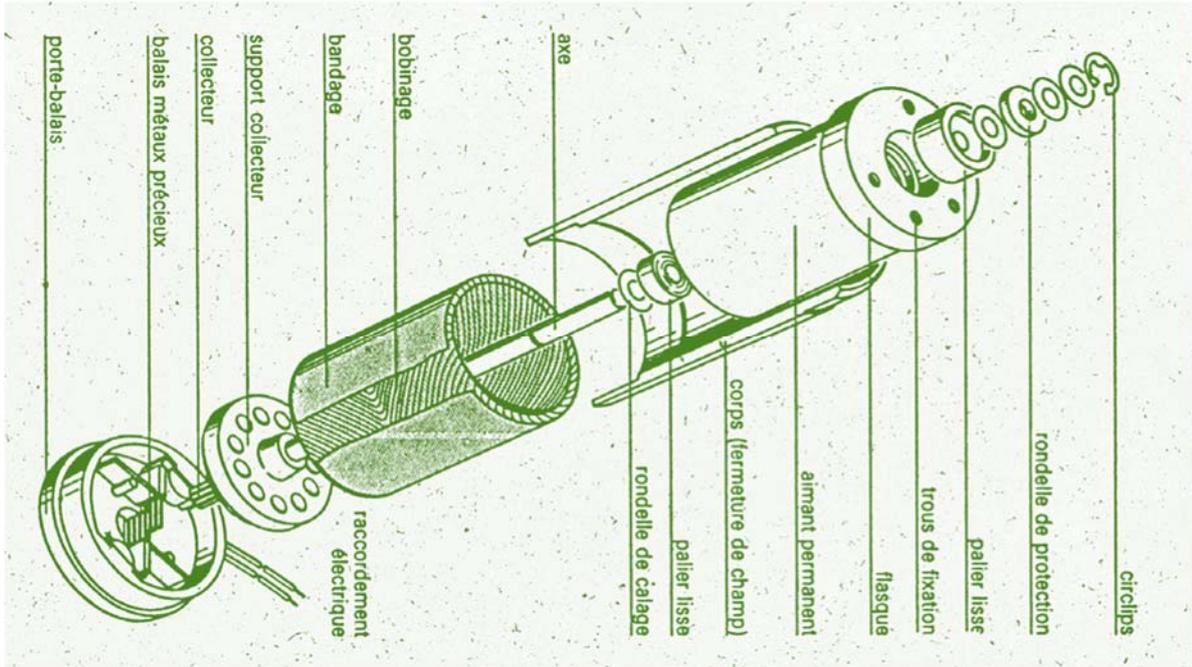
On distingue deux grandes familles (figure 5 a et b, c): moteur à rotor avec fer et à rotor sans fer.

Les moteurs à rotors avec fer ont l'avantage d'avoir un couple élevé (le champ magnétique dans l'entrefer est grand). Par contre leur inertie est grande et ils ont des pertes fer qui peuvent être très élevées au hautes vitesses. Les moteurs à rotors sans fer ont un couple moins élevé, mais leur inertie est faible ce qui est un avantage important en robotique où on demande de grandes accélérations. Leurs pertes fer sont très faibles.

Le rotor sans fer peut être soit de type imprimé (printed motor) ou de type cloche (figure 5b, resp. c). La figure 6 montre une vue éclatée d'un moteur à courant continu à balais à rotor cloche sans fer.



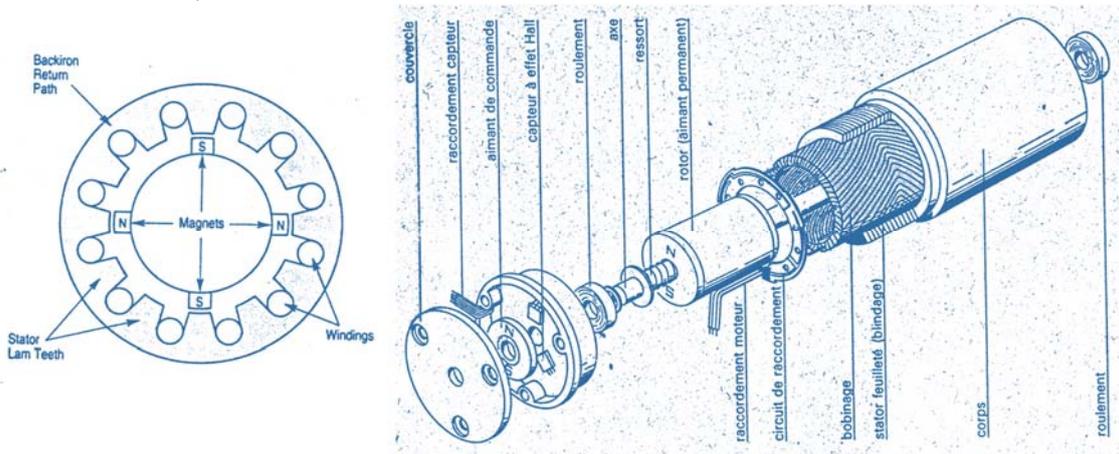
**Fig. 5** Moteurs à courant continu à balais. a) rotor avec fer, b) rotor imprimé (printed motor), c) rotor cloche



**Fig. 6** Vue éclatée d'un moteur à courant continu à balais à rotor cloche (moteur MAXON, environ 100 W).

5.4.3 Moteurs à courant continu sans balais (Brushless DC motors).

Le collecteur des moteurs à courant continu est le point faible des moteurs à balais. Il limite leur durée de vie à quelques milliers d'heures (cela dépend fortement des conditions de fonctionnement) et leur vitesse à 3000 rpm (cette limite dépend aussi de la durée de vie souhaitée). La commutation génère des perturbations électromagnétiques qui peuvent gêner l'électronique de commande ou les appareils proches. Des étincelles sont générées lors des commutations interdisant l'utilisation de ce type de moteur en milieu explosif.



a) b)

**Fig. 7** Moteur à courant continu sans balais  
a) coupe simplifiée, b) vue éclatée d'un tel moteur.

Pour pallier ces défauts, des moteurs à courant continu sans balais ont été développés<sup>1</sup>(figure 7). Les progrès de l'électronique en général et de l'électronique de puissance en particulier, font que ces moteurs avec leurs commandes sont disponibles à des prix acceptables pour le marché et qu'ils remplacent de plus en plus les moteurs à courant continu à balais. Ajoutons encore que pour réduire l'encombrement des entraînements électriques et en augmenter la fiabilité, la tendance actuelle est de développer des entraînements directs permettant de supprimer les réducteurs. Toutefois, les difficultés liées à cette technologie (toutes les perturbations sont transmises directement au moteur, couple élevé à basse vitesse, ...) font qu'ils sont encore confinés à des applications haute gamme, techniquement très exigeantes.

### 5.5 Équations principales d'un moteur à courant continu.

Nous allons maintenant établir quelques équations caractéristiques des moteurs à courant continu. Elles sont valables aussi bien pour les moteurs avec ou sans balais.

Un moteur CC peut être schématisé par une source de tension représentant la tension induite dans le bobinage (back-EMF), par une résistance et une inductance caractérisant le bobinage (figure 8). La tension aux bornes du bobinage vaut :

$$U = R_a \cdot i + k_E \cdot \omega + L_a \cdot \frac{\delta i}{\delta t} \quad [\text{V}] \quad (\text{équation 4})$$

où  $R_a$  et  $L_a$  sont respectivement la résistance et l'inductance du bobinage,  $i$  le courant instantané dans le bobinage et  $k_E$  la constante de tension induite du moteur.  $\omega$  est la vitesse angulaire du rotor en [rad/s].



**Fig. 8** Schéma équivalent d'un moteur CC. a) schéma complet, b) schéma simplifié utilisé pratiquement.

Dans la plupart des cas on néglige le terme lié à l'inductance<sup>2</sup> et l'équation 4 devient:

$$U = R_a \cdot i + k_E \cdot \omega \quad [\text{V}] \quad (\text{équation 5})$$

Le couple sur l'axe de sortie est:

$$M_s = k_M \cdot i - M_{fr} \quad [\text{Nm}] \quad (\text{équation 6})$$

où  $k_M$  est la constante de couple du moteur et  $M_{fr}$  le couple de frottement<sup>3</sup>. La puissance de sortie du moteur vaut :

$$P_s = M_s \cdot \omega \quad [\text{W}] \quad (\text{équation 7})$$

Et la puissance d'entrée:

$$P_e = U \cdot i \quad [\text{W}] \quad (\text{équation 8})$$

Les pertes dans le moteur  $P_p$ , ont deux sources: les pertes  $P_{fr}$  dues aux divers couples de frottements et les pertes Joules  $P_j$  dans le bobinage

<sup>1</sup>. Il s'agit en réalité de moteurs synchrones à commutations électroniques.

<sup>2</sup>. Cette dernière est très petite dans les moteurs à rotor sans fer.

<sup>3</sup>. Ce couple inclut les frottements des paliers, du collecteur et de ventilation ainsi que le couple dû aux pertes dans le fer et aux commutations (paragraphe 3.2.6).

$$P_p = P_{fr} + P_j = M_{fr} \cdot \omega + R_a \cdot i^2 \quad [\text{W}] \quad (\text{équation 9})$$

Le bilan énergétique s'écrit comme suit:

$$P_e = P_s + P_p \quad [\text{W}] \quad (\text{équation 10})$$

Le rendement est le rapport entre la puissance mécanique disponible sur l'axe du moteur  $P_s$  et la puissance électrique fournie au moteur  $P_e$  :

$$\eta = \frac{P_s}{P_e} \quad (\text{équation 11})$$

En remplaçant dans l'équation 10 les puissances par leur valeur respective, on démontre facilement que les constantes de tension induite et de couple sont équivalentes dans un système d'unités unifié :

$$k_e = k_M = k \quad [\text{Vs}] \text{ ou } [\text{Nm/A}] \quad (\text{équation 12})$$

Sur la figure 9a on a représenté l'allure du courant, de la vitesse, de la puissance et du rendement d'un moteur CC en fonction du couple sur l'axe.

La table 2 de la page 3.2-10 résume les principales équations utilisées pour ces graphiques.

Deux remarques restent à faire:

- les équations de la table 2 doivent être utilisées avec les unités du système international (unités MKSA). Généralement les fiches techniques sont en unités plus pratiques (par exemple le nombre de tours pas minute [rpm] ou [tr/s] au lieu des radians par seconde<sup>1</sup>) ainsi que les sous unités (mN, mA, etc ...);
- les limites thermiques ne sont pas prises en considération par ces équations. Par exemple, la puissance maximale ou le couple maximum ne peut pas être maintenu de manière continue. Nous étudierons au paragraphe 3.2.7 l'aspect thermique des moteurs CC.

## 5.6 Facteur de régulation.

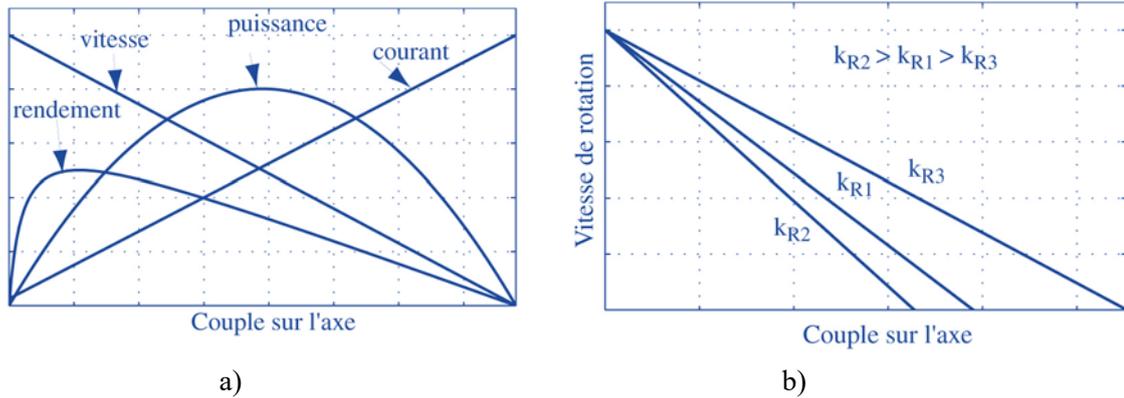
Une figure de mérite souvent mentionnée par les fiches techniques des moteurs est le facteur de régulation  $k_R$  :

$$k_R = \frac{R_a}{k^2} \quad [1/\text{Ws}^2] \text{ ou } [1/\text{Nms}]^2 \quad (\text{équation 13})$$

Il correspond à la pente de la caractéristique vitesse/couple ( $\Delta\omega/\Delta M_s$ ). En effet on peut écrire l'équation 17 (table 2) de la manière suivante:

$$\omega = \frac{1}{k} \cdot (U - R_a \cdot i_o) - \frac{R_a}{k^2} \cdot M_s \quad [\text{rad/s}] \quad (\text{équation 14})$$

Ainsi, plus le facteur de régulation est petit, moins le moteur est sensible à une variation du couple de charge (figure 9b).



**Fig. 9** Caractéristiques des moteurs à courant continu. a) courant, vitesse, puissance et rendement en fonction du couple sur l'axe, b) influence du facteur de régulation.

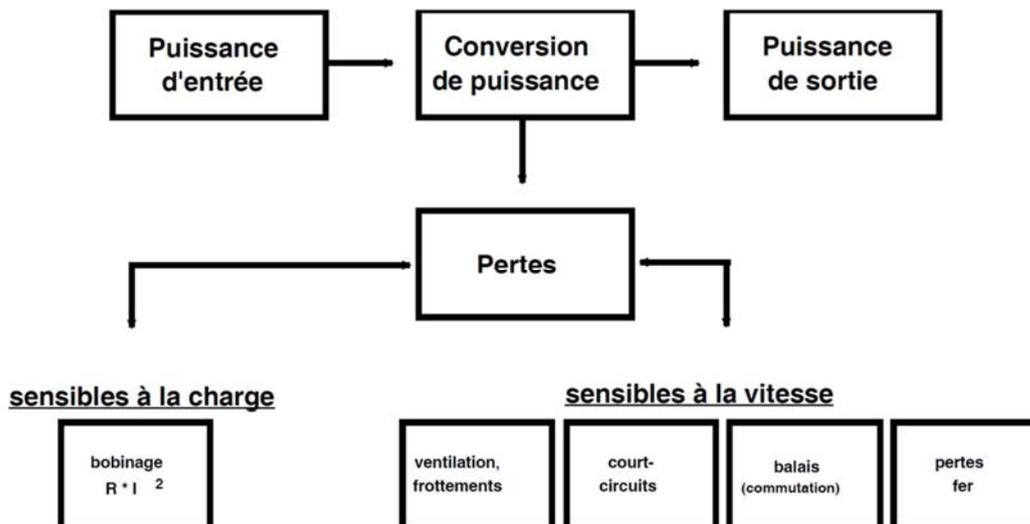
1. Rappel:  $1rpm = \frac{30}{\pi} rad/s$ .
2. Parfois il est exprimé comme  $k/\sqrt{R_a}$  et appelé "motor constant" en anglais.

### 5.7 Pertes dans un moteur électrique.

Le processus de transformation d'énergie électrique en énergie mécanique s'accompagne de pertes. Ces dernières peuvent dépendre de la charge (perte Joules dans le bobinage) ou de la vitesse (pertes dues aux frottements, à la ventilation, ou encore aux pertes fer liées au champ magnétique pulsant dans les parties métalliques du rotor ou du stator).

Le commutation, qu'elle soit mécanique (collecteur) ou électronique est aussi source de pertes thermiques.

La figure 10 donne un aperçu du processus de conversion d'énergie et des pertes qui y sont liées.



**Fig. 10** Pertes dans un moteur électrique.

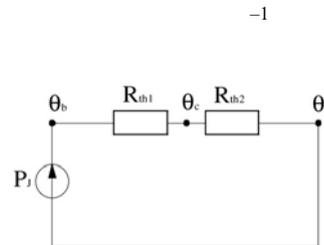
### 5.8 Limites thermiques des moteurs à courant continu.

Les pertes thermiques dans le moteur vont provoquer son échauffement. Ainsi, l'élévation de température du bobinage, qui est un fil de cuivre isolé dans la plupart des cas, entraîne une augmentation de la résistance ohmique

$$R_a(\theta) = R_{ao} \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta\theta) \quad [\Omega] \quad (\text{équation 15})$$

où  $R_{ao}$  est la résistance à température ambiante,  $\alpha$  une constante<sup>1</sup> en [1/K] et  $\Delta\theta$  est l'élévation de température en [K], par rapport à la température ambiante. Le bobinage ne doit pas dépasser la limite<sup>2</sup> de température donnée par le fabricant. L'énergie thermique est évacuée du moteur par convection et rayonnement thermique.

La figure 11 donne un schéma thermique simplifié d'un moteur électrique, valable en régime permanent.



**Fig. 11** Schéma thermique d'un moteur électrique à courant continu. Valable uniquement en régime permanent.

1. Pour le cuivre  $\alpha = 0.004K$ . Ceci représente une augmentation de 40% de la résistance ohmique pour une variation de 100°C, ce qui est loin d'être négligeable.
2. Typiquement 100°C pour les moteurs conventionnels et 125°C pour des versions spéciales.

courant [A]	$i = \frac{M_s}{k} + i_o$	$i_o = k \cdot M_o$ et $i_d = U/R_a$	$M_d = k \cdot \frac{U}{R_a}$	(équ. 16)
vitesse [rad/s]	$\omega = \frac{1}{k} \cdot [U - R_a \cdot (\frac{M_s}{k} + i_o)]$	$\omega_o = \frac{1}{k} \cdot (U - R_a \cdot i_o)$		(équ. 17)
puissance [w]	$P_s = M_s \cdot \omega = (U - R_a \cdot i) \cdot (i - i_o)$	$P_{s_{max}} = \frac{1}{2} \cdot [U \cdot (i_d - i_o) - \frac{1}{2} \cdot R_a \cdot (i_d^2 - i_o^2)]$	$i_{P_{s_{max}}} = \frac{1}{2} \cdot (i_o + i_d)$	(équ. 18)
rendement [-]	$\eta = \frac{P_s}{P_e} = 1 + \frac{i_o}{i_d} - \frac{i}{i_d} - \frac{i_o}{i}$	$\eta_{max} = \left(1 - \sqrt{\frac{i_o}{i_d}}\right)^2$	$i_{\eta_{max}} = \sqrt{i_o \cdot i_d}$	(équ. 19)

**Table 2** Équations caractéristiques des moteurs à courant continu.

**Liste des symboles:**

- $i$  [A]: courant dans le moteur
- $i_o$  [A]: courant à vide du moteur déterminé par les frottements
- $i_d$  [A]: courant théorique de démarrage. Ce courant n'est limité que par la résistance du bobinage, la tension induite étant nulle. En pratique, il est la plupart du temps limité par l'amplificateur.
- $k$  [Vs] ou [Nm/A]: constante de couple du moteur
- $M_s$  [Nm]: couple mécanique disponible sur l'arbre du moteur
- $M_d$  [Nm]: couple théorique de démarrage que l'on peut obtenir avec  $i_d$
- $U$  [V]: tension appliquée aux bornes du moteur
- $R_a$  [ $\Omega$ ]: résistance électrique du bobinage (ou armature)
- $\omega$  [rad/s]: vitesse de rotation
- $\omega_o$  [rad/s]: vitesse de rotation à vide. Le courant consommé vaut  $i_o$
- $P_s$  [W]: puissance mécanique disponible sur l'arbre du moteur
- $P_{s_{max}}$  [W]: puissance maximale théorique (sans tenir compte des limites thermiques)
- $i_{P_{s_{max}}}$  [A]: courant consommé à la puissance maximale
- $\eta$  [-]: rendement du moteur
- $\eta_{max}$  [-]: rendement maximum. Il est atteint pour des petits couples à haute vitesse
- $i_{\eta_{max}}$  [A]: courant absorbé au rendement maximum

$\theta_a$ ,  $\theta_c$  et  $\theta_b$  représentent respectivement les températures ambiante, de la culasse (boîtier du moteur) et du bobinage.  $P_J = R_a(\theta) \cdot i^2$  sont les pertes Joules dans le bobinage.  $R_{th1}$  est la résistance thermique entre le bobinage et la culasse, alors que  $R_{th2}$  est la résistance thermique entre le boîtier et l'environnement.  $R_{th1}$  ne peut pas être modifiée, par contre  $R_{th2}$  peut être réduite sensiblement par un radiateur ou autre système de refroidissement (ventilateur, circulation d'eau, etc ...).

Notons encore que les moteurs brushless ont une  $R_{th1}$  beaucoup plus basse que les moteurs à balais, leurs bobinages étant au stator (comparaison entre les figures 6 et 7). Les équations thermiques s'écrivent:

$$\theta_b = P_J \cdot (R_{th1} + R_{th2}) + \theta_a \quad [\text{K}] \quad (\text{équation 20})$$

$$\theta_c = P_J \cdot R_{th2} + \theta_a \quad [\text{K}] \quad (\text{équation 21})$$

L'élévation de température du bobinage sera donc:

$$\Delta\theta_b = \theta_b - \theta_a = (R_{th1} + R_{th2}) \cdot R_{ao} \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta\theta_b) \cdot i^2 \quad [\text{K}] \quad (\text{équation 22})$$

D'où finalement l'équation de l'élévation de température du bobinage tenant compte de la variation de la résistance ohmique:

$$\Delta\theta_b = \frac{\Delta\theta_{bo}}{1 - \alpha \cdot \Delta\theta_{bo}} \quad [\text{K}] \quad (\text{équation 23})$$

où  $\Delta\theta_{bo}$  serait l'élévation de température si la résistance ne changeait pas:

$$\Delta\theta_{bo} = (R_{th1} + R_{th2}) \cdot R_{ao} \cdot i^2 \quad [\text{K}] \quad (\text{équation 24})$$

On peut maintenant calculer le couple permanent maximum qui donne une élévation de température du bobinage de  $\Delta\theta_{bmax}$ :

$$M_{perm} = \sqrt{\frac{k^2}{R_{bo}} \cdot \frac{1}{R_{th1} + R_{th2}} \cdot \frac{\Delta\theta_{bmax}}{1 + \alpha \cdot \Delta\theta_{bmax}}} \quad [\text{Nm}] \quad (\text{équation 25})$$

Dans la plupart des cas, le moteur fonctionne en start and stop, ceci implique que le couple n'est pas permanent. L'équation 25 reste valable si on remplace le couple instantané par un couple équivalent (couple RMS) défini comme suit:

$$M_{RMS} = \sqrt{\frac{\int M_s^2(t) \cdot dt}{\int dt}} \quad [\text{Nm}] \quad (\text{équation 26})$$

Souvent on subdivise le cycle en tronçons de couples continus  $M_i$ . L'équation 26 devient:

$$M_{RMS} = \sqrt{\frac{\sum_i M_i \cdot t_i}{\sum_i t_i}} \quad (\text{équation 27})$$

**Attention:** en appliquant cette méthode, il faut être conscient que, comme le courant instantané n'est pas constant, la température du bobinage subit une ondulation. La température de pointe doit rester

inférieure à la température maximale supportée par le bobinage. Il y a donc danger si les temps de cycles ne sont pas beaucoup inférieurs aux constantes de temps thermiques du moteur<sup>4</sup>.

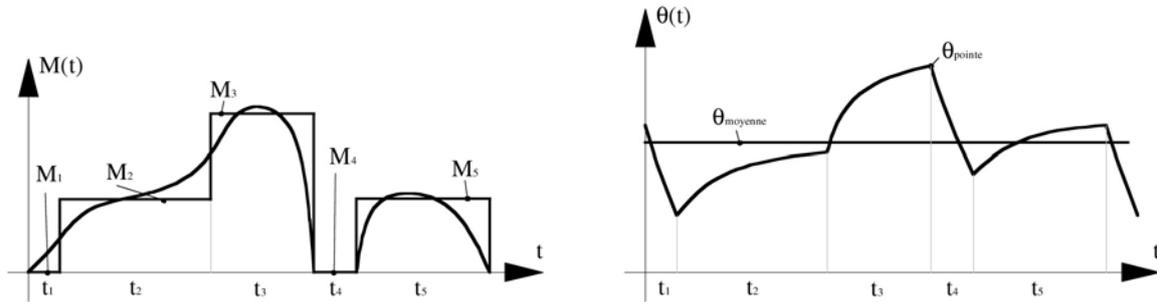


Fig. 12 a) découpage d'un cycle par tronçons, b) ondulation de la température du bobinage.

### 5.9 Adaptation optimale.

En robotique on désire déplacer une charge d'un point à un autre dans en temps aussi bref que possible. Le profil de vitesse optimal est donc triangulaire.

Nous allons démontrer ici qu'il y a un rapport de réduction optimal pour lequel l'accélération et la décélération sont maximales.

Nous faisons l'hypothèse d'une charge purement inertielle<sup>5</sup>. L'équation de Newton pour un mouvement circulaire est:

$$\sum M = \alpha \cdot J \quad [\text{Nm}] \quad (\text{équation 28})$$

où  $\alpha$  est l'accélération angulaire et les inerties. La charge et le moteur sont accouplés par un  $J$  facteur de réduction. Vu de la charge, l'équation 28 devient:

$$r M_m = \alpha_{ch} \cdot J_{ch} + \alpha_{ch} \cdot r \cdot J_m \quad (\text{équation 29})$$

où les indices 'm' et 'ch' indiquent respectivement le moteur et la charge. De cette équation on tire l'accélération de la charge:

$$\alpha_{ch} = \frac{r \cdot M_m}{r^2 \cdot J_m + J_{ch}} \quad [\text{rad/s}^2] \quad (\text{équation 30})$$

On cherche le rapport de transmission donnant l'accélération maximale. On obtient par dérivation et annulation :

$$r_{opt} = \sqrt{\frac{J_{ch}}{J_m}} \quad (\text{équation 31})$$

Donc l'inertie de la charge vue par le moteur vaut:

<sup>4</sup>. Généralement ces constantes de temps thermiques ne sont pas données par le fabricant (lui-même les ignore d'ailleurs souvent!). Elles sont particulièrement courtes (de l'ordre de quelques dizaines de ms) pour les petits moteurs à rotors sans fer.

<sup>5</sup>. Les frottements et la gravité sont négligés.

$$J_{ch}' = \frac{J_{ch}}{r_{opt}^2} = J_m \quad (\text{équation 32})$$

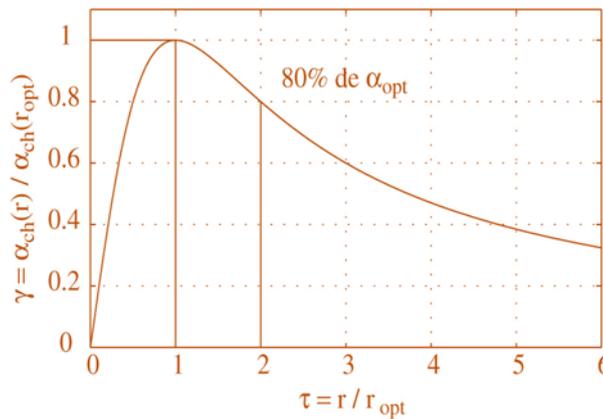
Ainsi, pour **optimiser les vitesses** de déplacement d'une charge on cherchera un rapport de transmission qui fait "voir" au moteur l'inertie de la charge égale à la sienne.

Pratiquement on ne trouve jamais le rapport de transmission optimum. On choisira un rapport supérieur de façon à protéger le moteur d'une surcharge, ceci, naturellement aux dépens de la vitesse. Les frottements et la gravité, négligés dans notre optimisation, tendent aussi à augmenter la valeur de rapport optimum.

La figure 13 montre la variation de l'accélération en fonction de l'écart par rapport au rapport idéal.

$$\gamma = \frac{\alpha_{ch}}{\alpha_{opt}} = 2 \cdot \frac{\tau}{1 + \tau^2} \quad (\text{équation 33})$$

où  $\tau = r/r_{opt}$ .



**Fig. 13** Variation de l'accélération en fonction du rapport de transmission.

### 5.10 Power rate.

Nous allons maintenant étudier une seconde figure de mérite des moteurs à courant continu, le power rate. Elle a l'avantage de tenir compte des performances dynamiques du système, ce qui n'était pas le cas du facteur de régulation (paragraphe 3.2.5).

Calculons l'accélération optimale en introduisant le rapport de transmission optimum dans l'équation 30:

$$\alpha_{ch} = \frac{M_m}{2 \cdot \sqrt{J_m \cdot J_{ch}}} = \frac{M_m}{\sqrt{J_m}} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{J_{ch}}} \quad (\text{équation 34})$$

Par définition on pose que le power rate est égal à:

$$Q_m = \frac{M_m^2}{J_m} \quad [\text{W/s}] \quad (\text{équation 35})$$

#### 5.10.1 Utilisation du power rate.

Le power rate permet de sélectionner un moteur capable d'accélérer avec une valeur donnée  $\alpha_{ch}$  une charge d'inertie  $J_{ch}$ . En effet, des équations 34 et 35 on peut déduire que:

$$Q_m \geq 4 \cdot \alpha_{ch}^2 \cdot J_{ch} \quad (\text{équation 36})$$

**Attention**, ceci est vrai seulement si le rapport de transmission est optimum. Si ce n'est pas le cas, le power rate requis sera encore plus grand.

Le power rate permet une première sélection du moteur, imposée par le mouvement désiré de la charge  $\alpha_{ch}$  et de son inertie  $J_{ch}$  (cahier des charges de l'application).

Bien que cette figure de mérite soit utile pour les applications robotiques, elle est rarement donnée par le fabricant. Nous allons donc étudier comment déterminer et analyser le power rate à partir des informations traditionnellement données par les fournisseurs de moteurs électriques.

### 5.10.2 Calcul et signification du power rate

Le power rate est défini comme le rapport du couple au carré sur l'inertie du moteur (équation 35). Si l'inertie est un paramètre clairement défini, il en est autrement en ce qui concerne le couple. Doit-on prendre le couple de démarrage, le couple permanent ou encore le couple de pointe?

Il est donc important, lors d'une analyse comparative entre divers moteurs, de déterminer un power rate équivalent pour chacun.

Introduisons l'équation du couple permanent (équation 25) dans la définition du power rate (équation 35):

$$Q_m = \frac{M_m^2}{J_m} = \underbrace{\frac{1}{R_{th1} + R_{th2}} \cdot \frac{\Delta\theta_{bmax}}{1 + \alpha \cdot \Delta\theta_{bmax}}}_{\text{caractéristiques thermiques}} \cdot \underbrace{\frac{k^2}{R_{bo}} \cdot \frac{1}{J_m}}_{\text{caractéristiques mécaniques}} \quad [\text{W/s}] \quad (\text{équation 37})$$

Partant de cette équation et en se basant sur les fiches techniques des moteurs on peut déterminer leur power rate d'une façon objective, utile à la comparaison.

On voit que dans l'équation 37 apparaît l'inverse du facteur de régulation défini au paragraphe 3.2.5 ( $k_R = R_a \square k^2$ ).

Le power rate est une figure de mérite bien adaptée aux applications dynamiques, c'est-à-dire où on demande au moteur d'accélérer le plus rapidement possible une charge, alors que le facteur de régulation permet de sélectionner un moteur pour des applications à vitesse constante. En robotique on utilise principalement le power rate lors de la sélection des moteurs.

### 5.11 Optimisation des pertes.

Intéressons-nous maintenant à l'énergie dissipée par effet Joules lors d'un déplacement. Nous faisons à nouveau l'hypothèse que la charge est purement inertielle et que les frottements sont négligeables.

Nous voulons calculer l'énergie  $W_m$  dissipée dans le moteur, lorsqu'on déplace une charge d'inertie  $J_{ch}$  d'un angle  $\theta_{ch}$  en un temps  $t_c$ . La charge et le moteur sont accouplés par un facteur de réduction  $r$ .

La puissance dissipée par effet Joules dans le bobinage vaut:

$$p_J(t) = R_a \cdot i^2 = R_a \cdot \left( \frac{M_m(t)}{k} \right)^2 \quad [\text{W}] \quad (\text{équation 38})$$

Le couple instantané que doit fournir le moteur vaut:

$$M_m(t) = J_m \cdot \alpha_m(t) + \frac{1}{r} \cdot J_{ch} \cdot \alpha_{ch}(t) = \alpha_{ch}(t) \cdot r \cdot \left( J_m + \frac{J_{ch}}{r^2} \right) \quad [\text{N}] \quad (\text{équation 39})$$

$\alpha$  représentant les accélérations angulaires ( $\alpha_m(t) = r \cdot \alpha_{ch}(t)$ ).

L'énergie dissipée se calcule en intégrant l'équation 38 sur le temps  $t_c$  :

$$W_m = \underbrace{\frac{R_a}{k^2}}_{\text{moteur}} \cdot \underbrace{r^2 \cdot \left(J_m + \frac{J_{ch}}{r^2}\right)^2}_{\text{réduction}} \cdot \underbrace{\int_{t_c} \alpha_{ch}^2(t) \cdot dt}_{\text{profil de vitesse}} \quad (\text{équation 40})$$

Plus le facteur de régulation est petit, moins les pertes sont importantes.

Nous voyons selon l'équation 40 que l'on peut aussi agir sur le facteur de réduction et sur la profil de vitesse pour diminuer les pertes.

### 5.11.1 Optimisation par le rapport de transmission.

Nous cherchons à minimiser le terme  $r^2 \cdot \left(J_m + \frac{J_{ch}}{r^2}\right)^2$  de l'équation 40. On démontre facilement que le rapport de transmission optimal, **minimisant les pertes dans le moteurs** est :

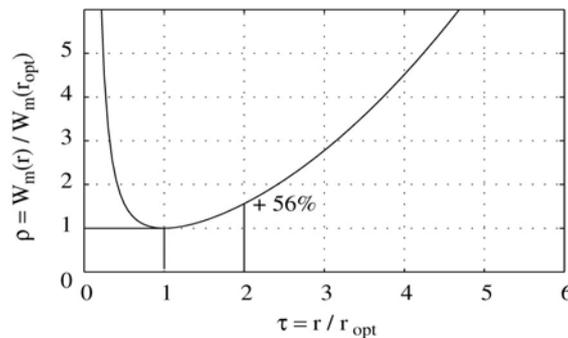
$$r_{opt} = \sqrt{\frac{J_{ch}}{J_m}} \quad (\text{équation 41})$$

Ainsi nous obtenons **le même résultat que pour l'optimisation de la vitesse. En optimisant les pertes dans le moteur, on optimise aussi la vitesse de déplacement.**

Étudions l'influence sur les pertes d'un écart par rapport au rapport optimal:

$$\rho = \frac{W_m(r)}{W_m(r_{opt})} = \frac{1}{4} \cdot \left(\tau + \frac{1}{\tau}\right)^2 \quad (\text{équation 42})$$

Nous voyons sur la figure 14 que les pertes croissent rapidement lorsqu'on s'écarte de rapport optimal.

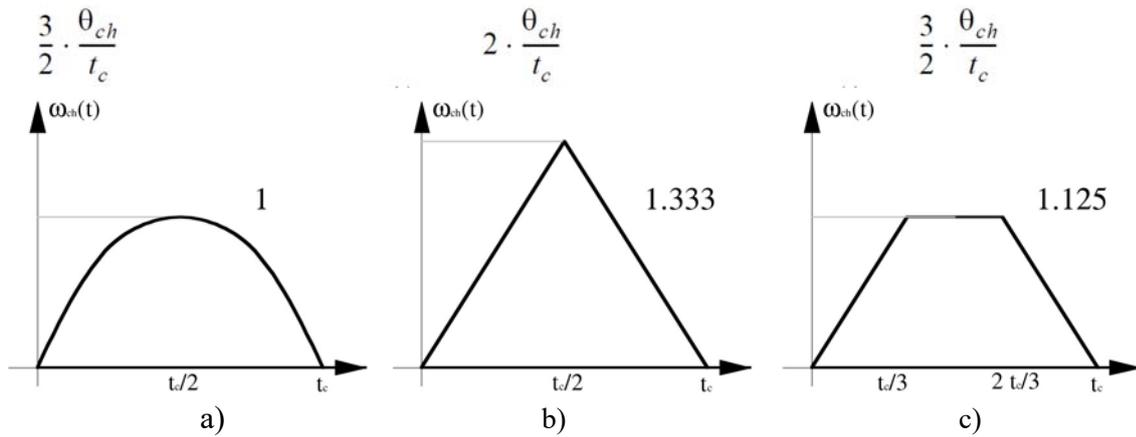


**Fig. 14** Variation des pertes thermiques dans le moteur en fonction du rapport de transmission.

### 5.11.2 Optimisation par le profil de vitesse.

Nous considérons trois types de profils de vitesse: parabolique, triangulaire et trapézoïdal (figure 15). Dans un premier temps on calcule les vitesses de pointe pour chaque profil donnant la même vitesse moyenne ( $\square_{ch} \square t_c$  identique pour les trois profils). Ensuite on intègre le terme de profil de vitesse de l'équation 40. Les trois résultats sont normalisés par rapport au profil parabolique. La table 3 résume ces divers résultats.

Le profil parabolique minimise l'énergie dissipée. Celui trapézoïdal est un bon compromis, il est plus simple à réaliser pratiquement et les pertes qui y sont associées sont proches des pertes optimales. Finalement le profil triangulaire est le moins bon car il génère des pertes 33% plus élevées que l'optimum.



**Fig. 15** Comparaison des trois profils de vitesse. a) parabolique, b) triangulaire et c) trapézoïdal.

type de profil	vitesse de pointe	facteur de puissance
parabolique	$\frac{3}{2} \cdot \frac{\theta_{ch}}{t_c}$	1
triangulaire	$2 \cdot \frac{\theta_{ch}}{t_c}$	1.333
trapézoïdal	$\frac{3}{2} \cdot \frac{\theta_{ch}}{t_c}$	1.125

**Table 3** Paramètres caractéristiques de 3 profils de vitesse.

### 5.12 Actionneurs pour micro-manipulateurs.

Généralement on demande aux micro-manipulateurs utilisés en micro-assemblage une résolution submicronique (typiquement  $0.1 \mu\text{m}$ ), sur des courses de plusieurs centimètres. Dans bien des cas 3, voire 5 degrés de liberté sont nécessaires pour l'alignement des composants. Une grande précision de positionnement ne peut être garantie qu'avec une structure cinématique rigide, stable - mécaniquement et thermiquement - donc compacte. Les actionneurs doivent avoir une résolution suffisante pour que le système atteigne la position désirée avec la précision souhaitée. Idéalement, la précision absolue ne devrait être limitée que par l'organe de mesure, placé en fin de chaîne cinématique.

Nous voyons donc que pour répondre aux spécificités du micro-assemblage, les actionneurs doivent:

- avoir une résolution inférieure à  $0.1 \mu\text{m}$ ;
- permettre une course de plusieurs centimètres (à une vitesse suffisante);
- être rigides;
- et être d'intégration aisée dans le micro-manipulateur (compacts).

Nous avons vu les avantages des actionneurs électromécaniques. Toutefois, lorsque les dimensions diminuent et que l'encombrement est une limitation, ils perdent une partie de leur intérêt. La puissance est disponible à haute vitesse nécessitant l'utilisation d'un réducteur mécanique pour obtenir des couples suffisants. La résolution est ainsi limitée par le jeu et la flexibilité de la transmission. De plus l'encombrement devient prohibitif.

Pour pallier ces inconvénients, des entraînements directs peuvent être utilisés. Par exemple, l'entreprise ETEL SA à Môtiers, développe des axes linéaires électromécaniques<sup>6</sup> permettant un positionnement submicronique et des vitesses élevées. De même, Litton Precision Products Inc. vend un axe linéaire à entraînement direct et à sustentation magnétique pouvant transporter des charges de 180 kg à 1.76 m/s et ayant une précision de 0.5 µm.

L'université de McGill à Montréal en collaboration avec l'entreprise MPB de Pointe-Claire, a développé une structure parallèle à trois degrés de liberté ayant un volume de travail de l'ordre 90 mm<sup>3</sup>, une répétabilité de 2 nm et des accélérations de 20 G.

En résumé nous pouvons dire que les actionneurs électromécaniques à entraînement direct sont utilisés lorsque de grandes accélérations -ou vitesses- et précisions sont nécessaires, mais où l'encombrement et le prix ne sont pas des critères limitatifs.

Pour ces différentes raisons, d'autres types d'actionneurs répondant mieux aux besoins spécifiques du micro-assemblage ont été développés.

#### 5.12.1 Actionneurs à déformation de matériaux.

Dans les paragraphes suivants nous présentons brièvement quelques actionneurs basés sur le principe de la déformation de certains matériaux. Généralement, ce type d'actionneur offre une grande densité d'énergie, une rigidité élevée et une excellente résolution. Par contre, la déformation des matériaux étant très faible par rapport à leur dimension, un système d'amplification du mouvement est nécessaire.

#### **Dilatation thermique.**

Si la dilatation thermique est souvent source d'imprécision dans les mécanismes, elle peut dans certains cas être utilisée avantageusement comme actionneur.

En première approximation, on peut admettre que la dilatation est linéaire avec l'accroissement de la température:

$$\Delta l = l \cdot \alpha \cdot \Delta \theta \quad (\text{équation 43})$$

où  $\Delta l$  est l'allongement,  $l$  la longueur nominale,  $\alpha$  le coefficient de dilatation thermique en K<sup>-1</sup> et  $\Delta \theta$  l'élévation de température en K.

La table 4 donne quelques coefficients de dilatation thermique de matériaux usuels.

Matériaux	$\alpha$ en 10 <sup>-6</sup> K <sup>-1</sup>
Acier	12
Aluminium	24
Cuivre	17
Invar	1

<sup>6</sup> . De type "Voice Coil" entre autres.

<sup>7</sup> . Les fonctions de capteur et d'actionneur sont combinées.

Laiton	19
Nickel	13

**Table 4** coefficients de dilatation thermique usuels.

Cet effet étant insuffisant, la déformation générée par la dilatation doit être amplifiée. Le système le plus courant est l'élément bimétal. Deux fines lames de métaux ayant des coefficients de dilatation thermique différents sont collés l'une contre l'autre.

Une application classique est le disjoncteur thermique. Lorsque le courant dépasse un certain seuil, l'échauffement induit la déformation du bimétal et le courant est interrompu<sup>1</sup>. Les vannes thermostatiques fonctionnent selon le même

principe.

Une micro-pince actionnée par dilatation thermi-

que a été développée à l'institut des microsystèmes (IMS) de l'EPFL (figure 16). Dans ce cas le mouvement est amplifié par effet de levier et l'énergie est apportée par un courant électrique circulant dans la pince.

Ce type d'actionneur est relativement lent<sup>8</sup> et a le défaut intrinsèque de provoquer un échauffement local élevé.

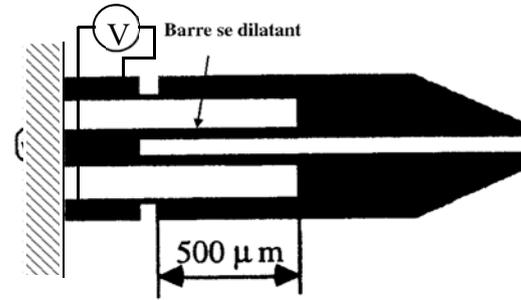
#### Polymères conducteurs.

Ces matériaux sont encore dans leur phase expérimentale. En particulier, le MIT (Massachusetts Institute of Technology) conduit des tests sur leurs applications comme actionneurs. Ils semblent particulièrement intéressants par la force qu'ils peuvent générer par unité de surface et par leur capacité de déformation.

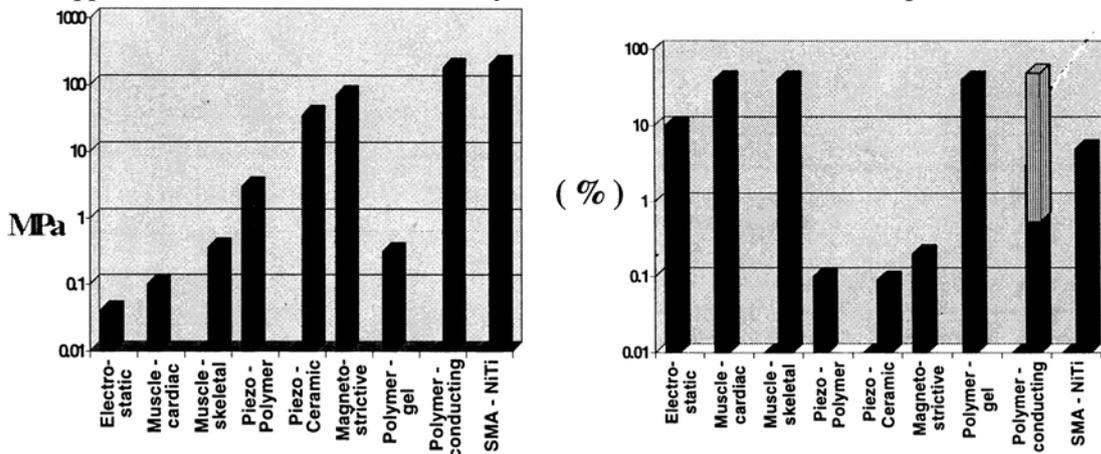
Un doute subsiste quant à la possibilité de travailler à haute fréquence<sup>9</sup>.

Les graphiques de la figure 17 permettent rapidement d'apprécier l'intérêt de tels matériaux.

Aucune application n'est encore connue à ce jour, mais ces matériaux semblent prometteurs.



**Fig. 16** Micro-pince thermique de l'IMS.



<sup>8</sup>. En fait, ceci n'est plus nécessairement vrai pour les microsystèmes, les inerties thermiques étant très petites. Dans le cas de la micro-pince citée, un cycle de 30 ms a été atteint.

<sup>9</sup>. Une bande passante de 10 Hz a été obtenue au MIT avec un actionneur composé de deux couches de 60 μm d'épaisseur.

a) b)  
**Fig. 17** Comparaison de matériaux utilisés pour des micro-actionneurs.  
 a) force générée par unité de surface, b) déformation relative.

### Électrostriction.

Les matériaux électrostrictifs sont encore peu utilisés. Leur comportement est très similaire aux éléments piézo-électriques. Comparés à ces derniers, ils présentent une hystérésis plus faible -seulement quelques pourcents<sup>10</sup> -, mais ils sont généralement un peu moins rigides et linéaires, spécialement aux faibles champs électriques.

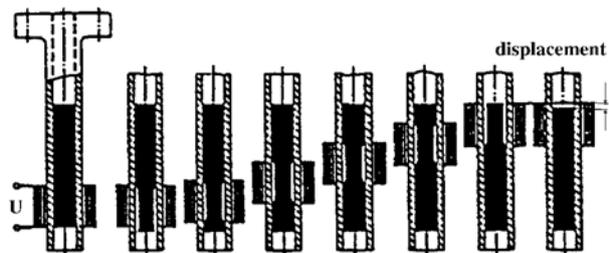
On obtient typiquement des déformations de 0.01% pour une tension de l'ordre de 100V. Avec un "stack"<sup>11</sup>, une même déformation est possible déjà à 10V.

Notons encore que ces matériaux s'usinent plus facilement que les céramiques piézo-électrique, ce qui les rend attractifs en termes de coûts de production.

### Magnétostriction.

Ce phénomène est aussi très proche de l'effet piézo-électrique, mais dans ce cas, la déformation est induite par un champ magnétique. Cet aspect rend ce type de matériau attractif pour les petits mécanismes car l'énergie peut être transmise à l'actionneur sans qu'il y ait de contact électrique ou mécanique. D'un autre côté, ces matériaux sont coûteux et présentent une grande hystérésis et une grande dérive.

L'entreprise DynaMotive Corporation propose un actionneur de type proche du "inch-worm" utilisant un matériau magnétostrictif commercialisé sous le nom de Terfenol-D. En déplaçant un champ magnétique de façon à exploiter le coefficient de Poisson d'un barreau de Terfenol-D, ce dernier peut se déplacer dans un alésage, comme un ver dans son trou (figure 18). Plusieurs travaux de recherche sont en cours pour l'utilisation de ces matériaux dans des micro-mécanismes.



**Fig. 18** Principe de fonctionnement d'un actionneur au Terfenol-D.

### Magnétoélasticité.

Cet effet est lié au coefficient de magnétostriction. Le module d'élasticité d'un matériau magnétostrictif change sous l'effet d'un champ magnétique. Si on précontraint un tel matériau, sa longueur change avec le champ magnétique.

Il n'y a pas encore d'application connue comme actionneurs de micro-mécanismes.

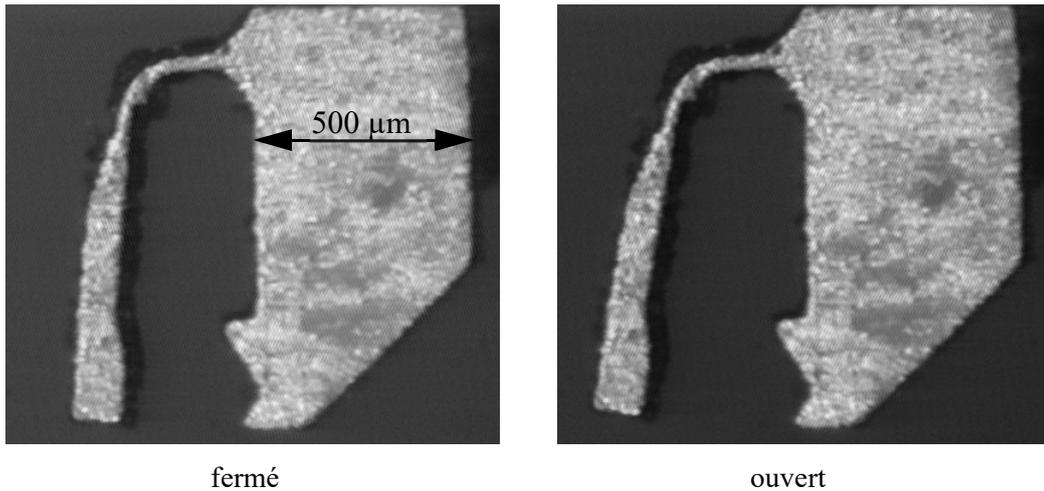
### Alliages à mémoire de forme (SMA).

Certains alliages à base de nickel et de titane peuvent subir une transformation de phase réversible entre les structures martensitique et austénitique. Ces matériaux sont appelés alliages à mémoire de forme, ou SMA<sup>12</sup>, car ils peuvent passer d'une forme mémorisée à l'autre. La commutation apparaît lorsque la pièce est portée à une certaine température. En jouant sur la géométrie on peut obtenir de très grands déplacements.

<sup>10</sup>. Typiquement 15 % pour un piézo-électrique.

<sup>11</sup>. Empilage de plusieurs dizaines de couches minces, connectées électriquement en parallèle.

<sup>12</sup>. Acronyme de "Shape Memory Alloy" en anglais.



**Fig. 19** Micro-pince en SMA développée à l'institut de systèmes robotiques (ISR) de l'EPFL.

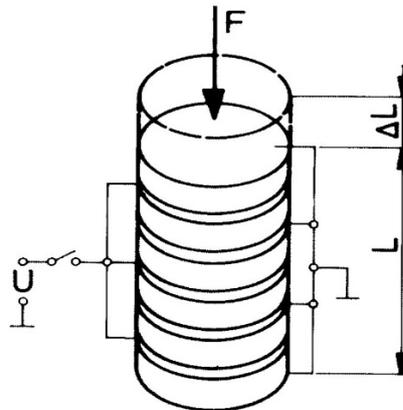
Plusieurs micro-mécanismes utilisant des SMA ont été développés. En particulier, l'ISR a conçu des micro-pinces utilisant ce phénomène (figure 19).

La déformation de ces matériaux est relativement lente, car elle est liée à leur inertie thermique. De plus, le fait de devoir élever localement la température peut, dans certains cas, en limiter l'utilisation<sup>13</sup>.

Notons encore que ces matériaux présentent une super-élasticité qui les rend extrêmement intéressants pour des structures flexibles.

#### Piézo-électricité.

Parmi les nombreux matériaux présentant un effet piézo-électrique, ce sont les céramiques composées d'un mélange d'oxyde de plomb, appelées PZT<sup>14</sup>, qui sont les plus utilisées pour les micro-mécanismes. Elles sont extrêmement rigides, ont d'excellents temps de réponses et leurs coefficients piézo-électriques sont parmi les plus élevés. Elles sont facilement disponibles et bon marché. Comme toutes les céramiques, elles peuvent être façonnées de différentes formes par frittage et découpage laser.



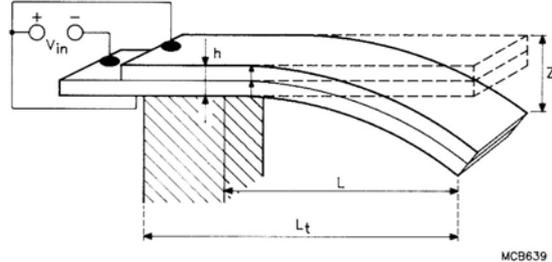
**Fig.20** Principe d'un actionneur multicouche ou "stack".

Leurs principaux défauts sont une hystérésis importante (typiquement 15%), leur dérive qui fait que la déformation principale est suivie d'une déformation parasite lente (typiquement 1% de la déformation principale par décade de temps) et une grande sensibilité à la température du coefficient piézo-électrique. Ces défauts limitent leur précision en boucle ouverte.

<sup>13</sup> . Notons que certains travaux de recherche effectués à l'ISR permettent de démontrer qu'il est possible d'obtenir des temps de cycles de l'ordre de 50 ms avec des micro-mécanismes SMA.

<sup>14</sup> . Pour Plomb, Zirconium et Titane.

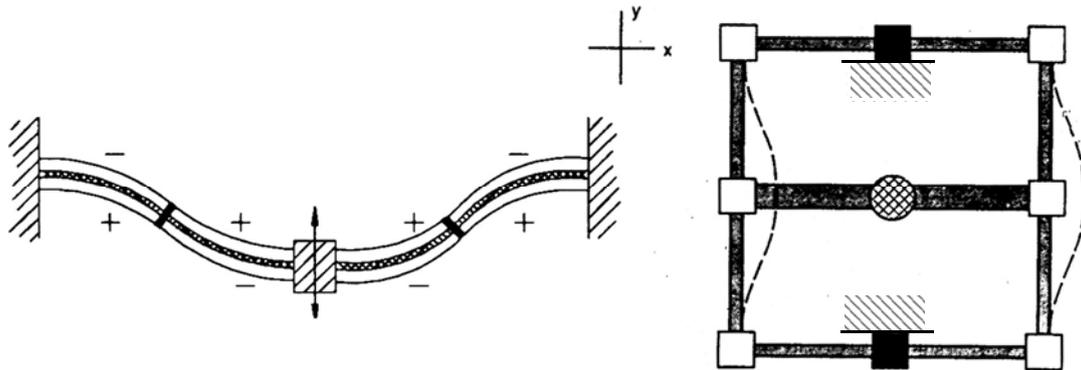
L'élongation des éléments piézo-électriques par rapport à leurs dimensions est insuffisante dans la plupart des applications. Typiquement, une céramique PZT aura une déformation de 0.015% sous une tension appliquée de 100V. C'est-à-dire qu'un barreau de 10 mm de long s'allongera de 1.5 $\mu$ m. Il existe plusieurs moyens d'amplifier le déplacement d'un élément piézo-électrique. Une première solution consiste à empiler plusieurs couches céramique, d'épaisseurs comprises entre 0.2 et 1 mm, connectées électriquement en parallèle (figure 20). De cette manière on peut obtenir des déformations de l'ordre de 0.1% à 100V (10  $\mu$ m pour 10 mm). Ce type d'actionneurs est connu sous le nom d'actionneurs multicouches ou "stack" en anglais. Ils sont relativement coûteux (typ-



iquement 80 SFr pour un actionneur de 10\*5\*5 mm<sup>3</sup>) et ne supportent pas de travailler en traction.

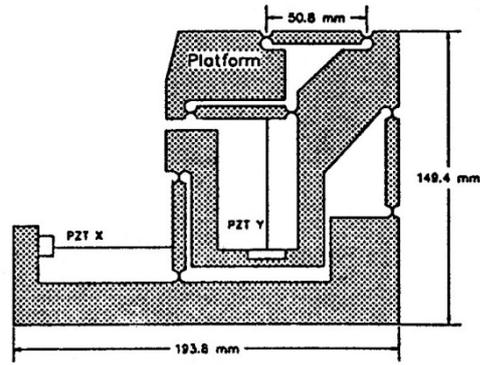
**Fig. 21** Principe d'un élément piézo-électrique bimorphe.

Aussi doit on prévoir une précontrainte extérieure pour qu'ils ne travaillent qu'en compression. Les éléments piézo-électriques bimorphes permettent aussi une amplification importante du mouvement (typiquement 0.25% à 100V). Deux fines céramiques piézo-électriques sont collées l'une contre l'autre. Par une tension électrique on contracte l'une alors qu'on allonge l'autre. On obtient ainsi une déflexion par élongations différenciées des deux couches (figure 21). La figure 22 montre une table à deux degrés de liberté X, Y utilisant ce type d'actionneur. Naturellement, l'amplification de mouvement se fait au détriment de la rigidité de l'actionneur.



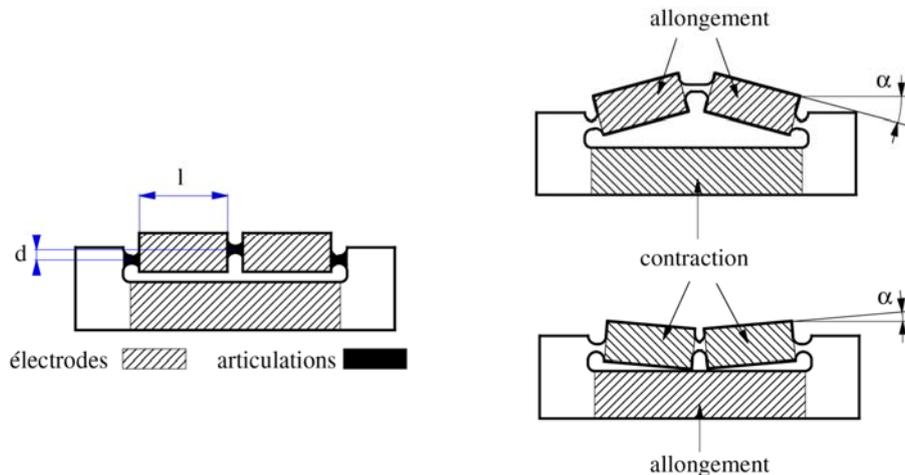
**Fig. 22** Principe d'une table X, Y utilisant des actionneurs à éléments piézo-électriques bimorphes.

L'amplification peut aussi être obtenue par effet de levier (figure 23). On profite de la grande force générée par les piézo-électriques pour amplifier leurs mouvements par effet de levier. Plusieurs leviers peuvent être mis en cascade, résultant en une grande amplification du mouvement. On utilise de préférence des systèmes à structures flexibles afin de supprimer les frottements et les jeux. Comme dans le cas du bimorphe, l'augmentation du déplacement se fait au détriment de la rigidité du mécanisme. À l'ISR nous avons développé des systèmes de mouvements monolithiques d'amplification du mouvement par leviers



**Fig. 23** Table X, Y avec amplification par leviers

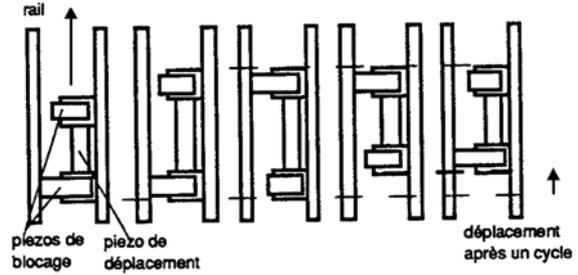
Les actionneurs, les articulations ainsi que le système de leviers sont découpés directement dans une plaque de céramique piézo-électrique. On évite ainsi de coûteuses et délicates opérations d'assemblage. L'effet d'amplification du mouvement est obtenu par un léger décalage, de l'axe des articulations. En allongeant, respectivement contractant, les actionneurs on obtient une rotation d'angle  $\alpha$  par effet de genouillère (figure 24). Avec ce principe des déplacements de 0.25 à 0.35% sont possibles pour 100 V. Les solutions proposées jusqu'ici permettent d'obtenir des déplacements de quelques dizaines de micromètres au maximum. Les tâches de micro-assemblage nécessitent souvent des courses de quelques millimètres, voire quelques centimètres. De tels déplacements peuvent être obtenus par des mouvements pas-à-pas. Ce principe englobe les actionneurs "inch-worm", inertiels ou stick & slip décrits ci-après.



**Fig. 24**

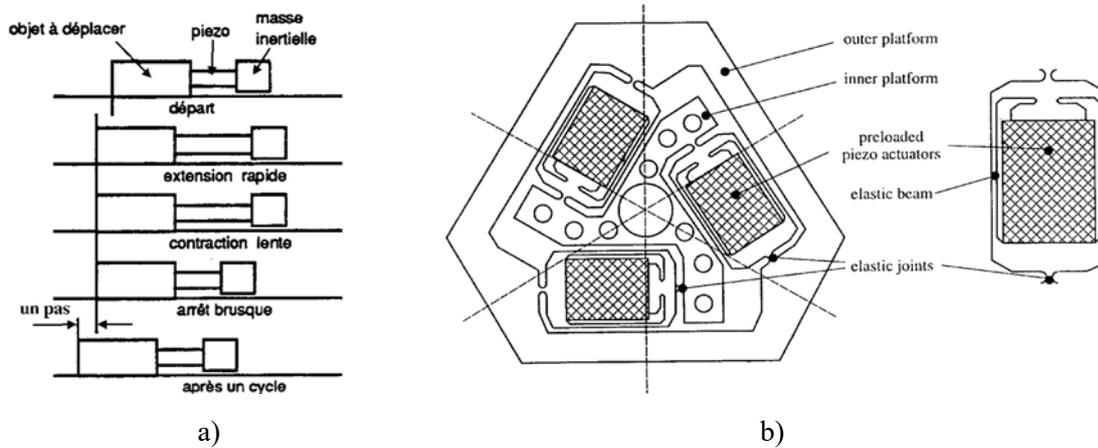
Principe de l'amplification de mouvement par effet de genouillère.

Le principe de fonctionnement des actionneurs “**inch-worm**” est inspiré du mode de déplacement du ver de terre. Alors qu’une des extrémités est bloquée, le système s’allonge. L’autre extrémité est à son tour bloquée. La première est alors débloquée et le système se contracte. On a ainsi effectué un pas (figure 25).



**Fig. 25** Principe de fonctionnement d’un “inch-worm”.

La force d’entraînement de ce type d’actionneur est élevée. Une excellente résolution est obtenue en bloquant une extrémité et en jouant sur l’allongement du piézo de déplacement <sup>1</sup>.

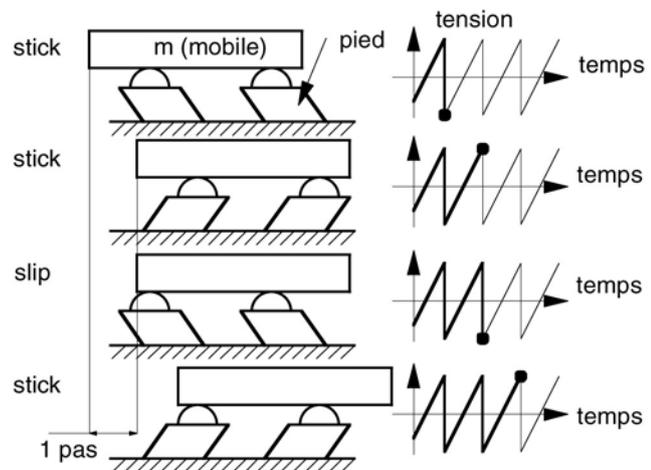


**Fig. 26** a) principe des actionneurs inertiels, b) micro-robot à 3DDL de l’IfR.

Le principe des **actionneurs inertiels**<sup>2</sup> repose sur la force de réaction générée lorsque’une masse est accélérée (comme par exemple le recul d’une arme à feu). Dans le cas des actionneurs inertiels, on éloigne brusquement deux masses, puis on les rapproche lentement. Cette asymétrie de mouvement, alliée aux frottements permet un déplacement pas-à-pas (figure 26a). De nombreuses variantes de ce système ont été proposées. Parmi celles-ci, l’Institut für Robotik à l’ETH de Zürich a développé un intéressant micro-robot mobile à trois degrés de liberté utilisant trois actionneurs inertiels (figure 26b).

- 
1. Ces caractéristiques dépendent naturellement des dimensions. Avec des piézo-électriques de  $5 \times 5 \times 10 \text{ mm}^3$ , des forces de plusieurs Newton sont possibles. La résolution est de l’ordre de quelques nanomètres.
  2. “Impact drives” en anglais.

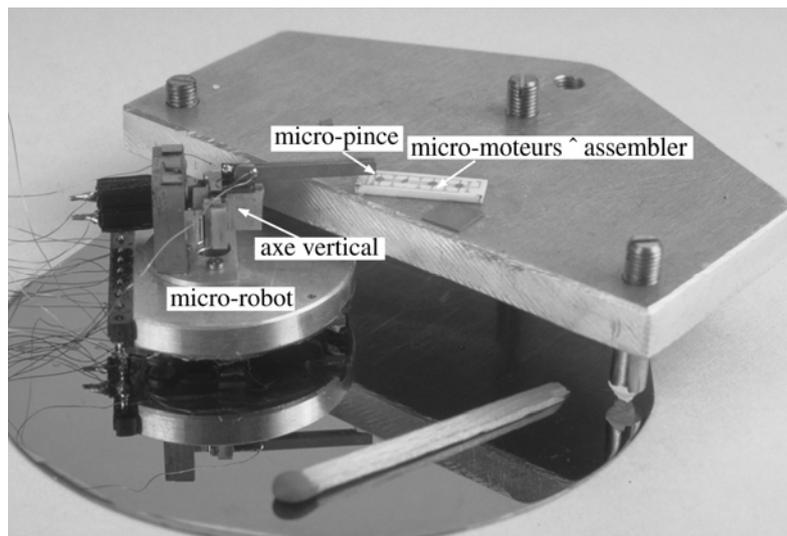
Les **actionneurs stick & slip** peuvent être considérés comme un cas particulier des actionneurs inertiels. Dans le cas du “stick & slip” une des deux masses est nulle, ou plus précisément négligeable par rapport à l’autre. Un pas consiste en une lente déformation des pieds, suivie de leur brusque retour en arrière. Lors de la phase lente, la masse suit le mouvement des pieds grâce aux frottements (stick), alors que son inertie l’empêche de suivre leurs brusques retours en arrière (slip) (figure 27).



**Fig. 27** Principe de fonctionnement d’un actionneur stick & slip en mode pas-à-pas.

Outre au mode pas-à-pas décrit cidessus, l’actionneur stick & slip peut aussi travailler en mode à balayage.

Dans ce mode, les pieds sont déformés suffisamment lentement pour éviter tout glissement.



**Fig. 28** Micro-robot mobile à 4 DDL actionné par stick & slip. Ce prototype est utilisé pour des tests de micro-assemblage.

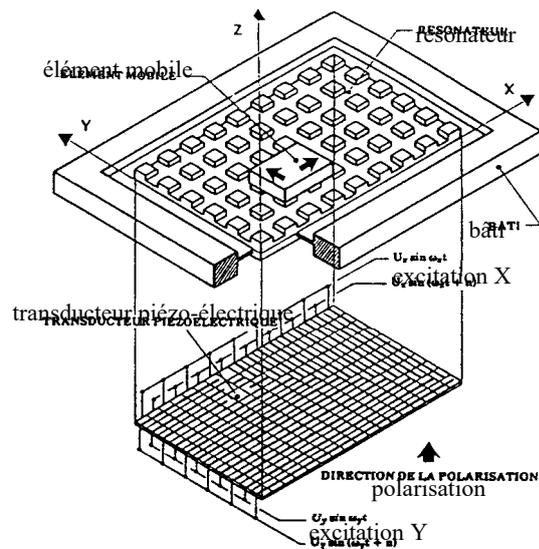
La combinaison de ces deux modes permet d’avoir des actionneurs à longues courses (mode pas-à-pas: déplacements grossiers sur plusieurs centimètres à des vitesse de quelques mm/s) ayant une résolution nanométrique (mode à balayage: déplacements fins sur quelques centaines de nanomètres).

Ce type d’actionneur est beaucoup utilisé en microscopie à balayage (par exemple pour les microscopes à effet tunnel, STM, ou à force atomique, AFM). À l’ISR, nous développons des micro-manipulateurs actionnés par stick & slip, dédiés au micro-assemblage.

Les 4 degrés de liberté du micro-robot de la figure 28 sont actionnés par stick & slip. Ce robot a été utilisé pour des tests de micro-assemblage automatiques sous microscope optique.

Nous terminons cette liste, non-exhaustive, des actionneurs piézo-électriques par les **moteurs ultrasonores** (ultrasonic motors). Leur principe est basé sur la génération d'une vibration mécanique à la surface de contact entre un élément fixe -stator- et un élément mobile -rotor ou patin-. Cette vibration engendre une déformation de forme elliptique ou circulaire qui entraîne la partie mobile en contact, par pression avec le stator. Celui-ci est excité à sa fréquence propre afin d'augmenter l'amplitude de la vibration.

Les moteurs ultrasonores à onde progressive sont les plus répandus. L'onde est générée par la combinaison de deux ondes



stationnaires décalées d'un quart de période. De **Fig. 29** tels moteurs fournissent un couple (ou une force) important délivré à basse vitesse.

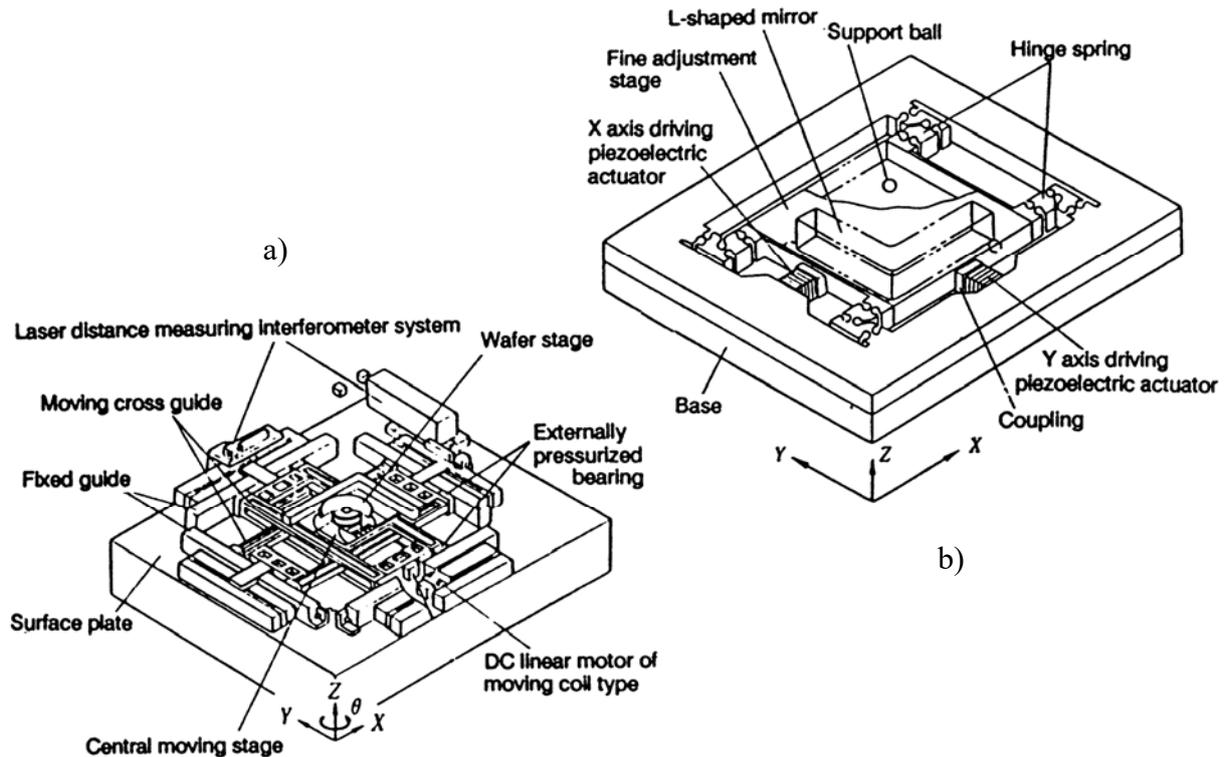
Ils sont utilisés, entre autres, pour des objectifs autofocus d'appareils de photos ou de caméras. Plusieurs entreprises japonaises commercialisent ce type de moteurs.

Des chercheurs de l'université de Besançon ont développé un actionneur à ondes stationnaires à deux degrés de liberté (figure 29). Son fonctionnement met en jeu des plots de contacts qui assurent la conversion par friction des vibrations de flexions en un mouvement linéaire d'un patin. Ce dispositif présente un intérêt certain sur le plan de la miniaturisation.

Moteur à ondes stationnaires à deux degrés de liberté de l'université de Besançon.

#### 5.12.2 Combinaison macro- et micro-déplacements.

Cette solution consiste à mettre deux actionneurs redondants par degré de liberté. Un actionneur grossier pour les longs déplacements et un actionneur fin pour ajuster la position finale et corriger les erreurs du premier actionneur. Une configuration typique est un axe mécanique terminé par un actionneur piézo-électrique multicouches ayant une course de quelques dizaines de microns. Une telle configuration est extrêmement performante en termes de vitesse et de dynamique. La vitesse est définie par celle de l'axe mécanique et la dynamique par l'actionneur piézoélectrique. La précision absolue dépendra naturellement du capteur de position. Une précision relative nanométrique sur des courses de quelques microns est possible avec un piézo-électrique équipé d'un capteur de position intégré. Ces performances intéressantes se paient par une mise en oeuvre relativement lourde et coûteuse.



**Fig. 30** Table X, Y utilisant le principe de macro- micro-déplacement.  
 a) vue d'ensemble b) vue de détail de la table fine.

### 5.13 Bibliographie.

- 1) Braun, Jan. "Formulae Handbook." *Maxon Motors, Sachseln, Switzerland* (2012).
- 2) Duerig, Thomas W., K. N. Melton, and D. Stöckel. *Engineering aspects of shape memory alloys*. Butterworth-Heinemann, 2013.
- 3) Otto Stemme, "Magnetism", 182 pages, ISBN 978-3-9520143-3-2, Maxon Academy, 2011.
- 4) Urs Kafader, "The selection of high-precision microdrives", Maxon academy edition.
- 5) Jufer, Marcel. *Electromécanique*. Vol. 9. PPUR presses polytechniques, 1995.
- 6) Kenjō, Takashi, and Shigenobu Nagamori. *Permanent-magnet and brushless DC motors*. Vol. 18. Oxford University Press, USA, 1985.
- 7) Hanselman, Duane C. *Brushless permanent magnet motor design*. The Writers' Collective, 2003.
- 8) Video – Brushed vers brushless . <https://vimeo.com/151895017>
- 9) Video – Motor Data selection <https://vimeo.com/151893603>