Chapitre 7

Déterminants

Dans ce chapitre, on se donne un corps K et on suppose que dans ce corps $1+1 \neq 0$. De façon équivalente $1 \neq -1$ (on dit que le caractéristique du corps est différente de 2).

7.1 Déterminants des 2×2 matrices.

A chaque matrice carrée A est associé un scalaire qui s'appelle son *déterminant* et se note $\det(A)$ ou parfois $|A|$. Nous discutons d'abord le cas des matrices de taille 2×2.

Définition Le *déterminant* d'une 2×2 matrice est défini par

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Théorème 7.1.1. *Le déterminant des 2×2 matrices vérifie les propriétés suivantes :*

a) $\det(\lambda A) = \lambda^2 A$.

b) Le déterminant d'un produit de deux matrices est égal au produit des déterminants :

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

c) La 2×2 matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. *Dans ce cas on a*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

d) Deux vecteurs colonne de K^2 sont linéairement indépendants si et seulement si leurs composantes forment une matrice de déterminant non nul :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ sont linéairement indépendants } \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Preuve. La propriété (a) suit immédiatement de la définition. Pour (b), il suffit de calculer et simplifier :

$$\det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}) & (a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}) \\ (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}) & (a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}) \end{pmatrix}$$

$$= (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}) - (a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})$$

$$= (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})$$

$$= \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Pour prouver (c), on observe que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette équation montre que si $\det(A) \neq 0$ alors A est inversible et son inverse est donnée par la formule du point (c). Inversément, supposons que la matrice A est inversible, alors il existe A^{-1} telle que $A \cdot A^{-1} = \mathbf{I}_2$, donc

$$1 = \det(\mathbf{I}_2) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot (A^{-1}),$$

ce qui entraîne que $\det(A) \neq 0$.

Pour prouver (d) on observe que les vecteurs $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ engendrent l'image de $A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$, on a donc

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A : K^2 \to K^2 \text{ est surjective } \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ sont linéairement indépendants.}$$

□

Exemples.

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

7.2 Déterminants des 3×3 matrices.

Le déterminant d'une 3×3 matrice est la fonction det : $M_3(K) \to K$ définie par

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13}.$$

Il est parfois commode de voir le déterminant comme une fonction det : $K^3 \times K^3 \times K^3 \to K$ des 3 vecteurs colonne de K^3 formant la matrice $A \in M_3(K)$. Il prend alors la forme

$$\det(X, Y, Z) = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_1z_2y_3 - x_2y_1z_3 - x_3y_2z_1.$$

où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$.

On note aussi $|A|$ pour le déterminant d'une matrice. Il est alors facile de voir que le déterminant d'une matrice de $M_3(K)$ s'exprime de la manière suivante comme une combinaison linéaire de trois déterminants 2×2 :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 \cdot \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \cdot \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \cdot \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Par exemple

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (-1 - 9) + 0 \cdot (-3 - 12) + 5 \cdot (9 - 4) \\ &= 15. \end{aligned}$$

7.3 Définition générale du déterminant et premières propriétés

Dans une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, il y a $n!$ façons de former un monôme du type

$$a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

qui contient un et un seul coefficient de chaque colonne et de chaque ligne, c'est à dire que $i_1, i_2, \ldots, i_n$ est une permutation de $1, 2, \ldots, n$. On obtient le déterminant de la matrice A en multipliant ce monôme par la signature de la permutation associée et en sommant tous les termes obtenus.

Définition. Le *déterminant* de la matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ est le scalaire défini par

$$\det(A) = |A| = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}, \tag{7.1}$$

où $\mathcal{S}_n$ est le groupe symétrique des permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$ et $\operatorname{sgn}(\sigma) = \pm 1$ est la signature de la permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

Il est parfois commode (et fréquent parmi les physiciens) d'écrire le déterminant sous la forme

$$\det(A) = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} \varepsilon_{i_1,i_2,\ldots,i_n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}, \tag{7.2}$$

où $\varepsilon_{i_1,i_2,\ldots,i_n} \in \{0, 1, -1\}$ est le *symbole de Levi-Civita* défini par

$$\varepsilon_{i_1,i_2,\ldots,i_n} = \begin{cases} +1 & \text{si } i_1, i_2, \ldots, i_n \text{ est une permutation paire de } 1, 2, \ldots, n, \\ -1 & \text{si } i_1, i_2, \ldots, i_n \text{ est une permutation impaire de } 1, 2, \ldots, n, \\ 0 & \text{si } i_1, i_2, \ldots, i_n \text{ n'est pas une permutation de } 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Remarquer que la somme (7.2) possède n^n termes, mais seulement $n!$ parmi ces termes sont non nuls (par exemple si $n = 5$, la somme (7.2) contient $3125 = 5^5$ termes dont seulement $120 = 5!$ sont non nuls).

Exemple. Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit des termes diagonaux de cette matrice :

$$\det \begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_3 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n,$$

car tous les termes de la somme (7.1) sont nuls sauf celui qui correspond à la permutation $\sigma = id$.

Proposition 7.3.1. *Le déterminant d'une matrice carrée est égal au déterminant de sa transposée*

$$\det(A^\top) = \det(A).$$

Preuve. Rappelons que la signature d'une permutation σ est égale à la signature de la permutation inverse σ^{-1}. L'opération de transposer une matrice échange les lignes et les colonnes, on a donc

$$\begin{aligned} \det(A^\top) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{1\sigma(2)} \cdots a_{2\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) a_{\sigma^{-1}(1)1} a_{\sigma^{-1}(2)2} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n} \\ &= \sum_{\rho \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sgn}(\rho) a_{\rho(1)1} a_{\rho(2)2} \cdots a_{\rho(n)n} \qquad (\text{on a posé } \rho = \sigma^{-1}) \\ &= \det(A). \end{aligned}$$

$\square$

Une conséquence importante de cette proposition est que toute propriété du déterminant qui s'applique au colonnes d'une matrice s'applique également aux lignes de cette matrice.

Dans la suite de ce paragraphe, il est commode d'associer à un n-tuple de vecteurs colonne

$$(A_1, A_2, \dots A_n) \in K^n \times K^n \times \cdots \times K^n$$

la matrice dont la j^{me} colonne est le vecteur A_j (on utilise donc l'isomorphisme naturel $(K^n)^n \to M_n(K)$; on peut ainsi regarder le déterminant comme une application

$$\det : \underbrace{K^n \times K^n \times \cdots \times K^n}_{n} \to K.$$

On a alors les propriétés suivantes.

Théorème 7.3.2. *a) Le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonnes :*

$$\begin{aligned}\det(A_1, \dots, A_{j-1}, (\lambda A'_j + \mu A'_j), A_{j+1}, \dots, A_n) &= \lambda \det(A_1, \dots, A_{j-1}, A'_j, A_{j+1}, \dots, A_n) \\ &\quad + \mu \det(A_1, \dots, A_{j-1}, A''_j, A_{j+1}, \dots, A_n)\end{aligned}$$

pour tous $1 \leqslant j \leqslant n$ et tous $\lambda, \mu \in K$.

b) Pour toute permutation $\rho \in \mathcal{S}_n$ on a

$$\det(A_{\rho(1)}, \dots, A_{\rho(n)}) = \operatorname{sgn}(\rho) \det(A_1, \dots, A_n).$$

c) Si $E_1, E_2, \dots E_n$ est la base canonique de K^n, alors

$$\det(E_1, \dots, E_n) = 1.$$

Preuve. a) Si $A_j = \lambda A'_j + \mu A'_j$, alors pour chaque coefficient de la $j^{\text{ème}}$ colonne on a $a_{ij} = (\lambda a'_{ij} + \mu a''_{ij})$. Donc pour chaque monôme formant le déterminant, on a

$$a_{i_1 1} \cdots a_{i_j j} \cdots a_{i_n n} = \lambda a_{i_1 1} \cdots a'_{i_j j} \cdots a_{i_n n} \; + \; \mu a_{i_1 1} \cdots a'_{i_j j} \cdots a_{i_n n},$$

et en faisant la somme (7.1), on obtient la propriété (a).

b) Soit $\rho \in \mathcal{S}_n$, et notons A' la matrice obtenue en appliquant la permutation ρ^{-1} aux colonnes de A, donc les colonnes de A' sont $A_{\rho(1)}, \dots, A_{\rho(n)}$. On a alors

$$\begin{aligned}\det(A') &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),\rho(1)} a_{\sigma(2),\rho(2)} \cdots a_{\sigma(n),\rho(n)} \\ &= \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sgn}(\rho\tau) a_{\tau(1),1} a_{\tau(2),2} \cdots a_{\tau(n),n} \qquad \text{(on à posé } \tau = \rho^{-1}\sigma) \\ &= \operatorname{sgn}(\rho) \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sgn}(\tau) a_{\tau(1)1} a_{\tau(2)2} \cdots a_{\tau(n)n} \\ &= \operatorname{sgn}(\rho) \det(A).\end{aligned}$$

Car $\operatorname{sgn} : \mathcal{S} \to \{+1, -1\}$ est un homomorphisme de groupes et on a

$$\operatorname{sgn}(\tau \circ \rho^{-1}) = \operatorname{sgn}(\tau) \operatorname{sgn}(\rho^{-1}) = \operatorname{sgn}(\tau) \operatorname{sgn}(\rho).$$

c) Le déterminant $\det(E_1, \ldots, E_n)$ est le déterminant de la matrice identité dont les coefficients sont les symboles de Kronecker δ_{ij}. Tous les termes de la somme (7.1) sont nuls, sauf celui correspondant à la permutation $\sigma = \mathrm{Id}$, et le mônome correspondant est

$$\mathrm{sgn}(\mathrm{Id}) \cdot \delta_{11}\delta_{22} \ldots \delta_{\mathrm{nn}} = 1.$$

□

Définition. Une application $\theta : K^n \times K^n \times \cdots \times K^n \to K$ vérifiant les conditions (a) et (b) de ce théorème est dite *multilinéaire* et *alternée.*

Corollaire 7.3.3. *Si deux colonnes sont identiques, i.e.* $A_r = A_s$ *avec* $1 \leqslant r < s \leqslant n$*, alors*

$$\det(A_1, \ldots, A_n) = 0.$$

Preuve. Soit $\rho = (r, s) \in \mathcal{S}_n$ la transposition qui échange r et s, alors la propriété (b) du théorème précédent implique que

$$\begin{aligned}\det(A_1, \ldots, A_r, \ldots, A_s, \ldots A_n) &= \mathrm{sgn}(\rho) \det(A_1, \ldots, A_s, \ldots, A_r, \ldots A_n)\\ &= -\det(A_1, \ldots, A_s, \ldots, A_r, \ldots A_n)\\ &= -\det(A_1, \ldots, A_r, \ldots, A_r, \ldots A_n)\end{aligned}$$

donc ce déterminant est nul.

□

Corollaire 7.3.4. *a.) Si on ajoute à la* $j^{\text{ème}}$ *colonne de la matrice* $A \in M_n(K)$ *une combinaison linéaire des autres colonnes, alors le déterminant ne change pas.*
b.) Si les colonnes de la matrice $A \in M_n(K)$ *sont linéairement dépendantes, alors* $\det(A) = 0$*.*

Preuve. a.) On a

$$\begin{aligned}\det(A_1, \ldots, \ldots A_{r-1}, (A_r + \sum_{j \neq r} \lambda_j A_j), A_{r+1}, \ldots A_n) &= \det(A_1, \ldots, A_r, \ldots A_n)\\ &\quad + \sum_{j \neq r} \lambda_j \det(A_1, \ldots, A_{r-1}, A_j, A_{r+1}, \ldots A_n),\end{aligned}$$

on obtient donc l'affirmation voulue par le corollaire précédent car chaque terme de cette dernière somme est nul.

b.) Les colonnes de $A \in M_n(K)$ sont linéairement dépendantes si et seulement si l'une des colonnes est combinaison linéaire des autres colonnes. Supposons par exemple que la colonne A_r est combinaison linéaire des autres colonnes On a alors par l'affirmation (a) :

$$\det(A_1, \ldots, A_r, \ldots A_n) = \det(A_1, \ldots, 0, \ldots A_n) = 0.$$

□

Exemple. On a

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 1 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & x_4 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = x_3.$$

Plus généralement si $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$, alors

$$\det(E_1, \ldots, E_{j-1}, X, E_{j+1}, \ldots E_n) = x_j,$$

7.4 Théorème fondamental

Théorème 7.4.1 (Théorème fondamental de la théorie des déterminants.). *Soit* $\theta : K^n \times K^n \times \cdots \times K^n \to K$ *une application mutilinéaire et alternée, alors il existe* $\gamma \in K$ *tel que* $\theta = \gamma \cdot \det$, *i.e.*

$$\theta(A_1, \ldots, A_n) = \gamma \cdot \det(A_1, \ldots, A_n)$$

pour tous $A_1, \ldots, A_n \in K^n$. *De plus,* $\gamma = \theta(E_1, \ldots, E_n)$.

Preuve. On a $A_1 = a_{11}E_1 + \cdots + a_{n1}E_n$, donc par multilinéarité de θ, on a

$$\theta(A_1, \ldots, A_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}\theta(E_i, A_2, \ldots, A_n).$$

On a aussi $A_2 = a_{12}E_1 + \cdots + a_{n2}E_n$, donc

$$\theta(A_1, \ldots, A_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i1}a_{j2}\theta(E_i, E_j, A_3 \ldots, A_n).$$

en continuant avec les colonnes $A_3 \ldots, A_n$, on obtient

$$\theta(A_1, \ldots, A_n) \quad = \quad \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_2=1}^{n} a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}\theta(E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_n}).$$

Or nous avons supposé que θ est alternée, cela entraîne que

$$\theta(E_{i_1}, \ldots, E_{i_n}) = \varepsilon_{i_1 \ldots i_n} \cdot \theta(E_1, \ldots, E_n).$$

Posons $\gamma = \theta(E_1, \ldots, E_n)$, alors nous avons

$$\begin{aligned}\theta(A_1, \ldots, A_n) &= \gamma \cdot \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_2=1}^{n} \varepsilon_{i_1 \ldots i_n} a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n} \\ &= \gamma \cdot \det(A).\end{aligned}$$

□

Corollaire 7.4.2. *Si* A *et* B *appartiennent à* $M_n(K)$*, alors*

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Preuve. La $j^{\text{ème}}$ colonne de $A \cdot B$ est l'image par A de la $j^{\text{ème}}$ colonne de B

$$(AB)_j = A \cdot B_j = b_{1j}A_1 + b_{2j}A_2 + \cdots + b_{nj}A_n.$$

Si on note $\theta : M_n(K) \to K$ l'application définie par $\theta(B) = \det(A \cdot B)$, alors θ est une application multilinéaire et alternée. Le théorème précédent montre alors que

$$\det(AB) = \theta(B) = \gamma \cdot \det(B)$$

avec $\gamma = \theta(\boldsymbol{I}_n) = \det(A\boldsymbol{I}_n) = \det(A)$. Donc $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

$\square$

Corollaire 7.4.3. *Le déterminant d'une matrice carrée est nul si et seulement si ses colonnes sont linéairement dépendantes.*

Preuve. On a déjà vu que si les colonnes de $A \in M_n(K)$ sont linéairement dépendantes, alors $\det(A) = 0$. Supposons réciproquement que les colonnes de $A \in M_n(K)$ sont linéairement indépendantes. Alors l'application linéaire $L_A : K^n \to K^n$ est injective et donc inversible, ce qui implique que la matrice A est inversible. On a alors

$$1 = \det(\mathbf{I}_n) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1}),$$

ce qui implique que $\det(A) \neq 0$.

$\square$

Observons que la preuve montre aussi que $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Théorème 7.4.4. *(Règle de Cramer) Soient $A \in M_n(K)$ et $X, B \in K^n$. Supposons que $AX = B$, alors la $j^{\text{ème}}$ composante de X vérifie*

$$\det(A) \cdot x_j = \det(A_1, \ldots, A_{j-1}, B, A_{j+1}, \ldots A_n).$$

En particulier si A est inversible, alors cette formule permet de résoudre le système linéaire $AX = B$.

Preuve. Notons S_j la matrice $(E_1, \ldots, E_{j-1}, X, E_{j+1}, \ldots E_n)$, alors la condition $AX = B$ est équivalente à

$$A \cdot S_j = (A_1, \ldots, A_{j-1}, B, A_{j+1}, \ldots A_n).$$

Donc

$$\det(A) \cdot \det(S_j) = \det(A_1, \ldots, A_{j-1}, B, A_{j+1}, \ldots A_n),$$

mais nous avons vu plus haut que $\det S_j = x_j$.

$\square$

Théorème 7.4.5. *(Théorème d'unicité du déterminant.) Le déterminant est l'unique application* $K^n \times K^n \times \cdots \times K^n \to K$ *vérifiant les trois propriétés suivantes :*

(i) det *est multilinéaire, i.e. linéaire en chaque variable.*

(ii) Si la matrice A possède deux colonnes adjacentes qui sont égales, alors sont déterminant est nul. En d'autres termes

$$\det(A_1, \ldots, A_r, A_{r+1} \ldots, A_n) = 0.$$

(iii) $\det(E_1, \ldots, E_n) = 1$ *(où* $\{E_i\} \in K^n$ *est la base canonique),*

Preuve. Il est clair à partir du théorème 7.3.2 et du corollaire 7.3.3 que le déterminant vérifie les propriétés (i), (ii) et (iii).

Prouvons la réciproque. Soit $\theta : K^n \times K^n \times \cdots \times K^n \to K$ une application vérifiant les conditions (i), (ii) et (iii) ci-dessus, on doit montrer que θ coïncide avec le déterminant. Par le théorème fondamental 7.4.1, il suffit de démontrer que θ est alterné. Montrons d'abord que $\theta(A_1, \ldots, A_n)$ change de signe si on transpose deux colonnes adjacentes :

En effet les propriétés (i) et (ii) entrainent

$$\begin{aligned} 0 &= \theta(A_1, \ldots, (A_r + A_{r+1}), (A_r + A_{r+1}), \ldots, A_n) \\ &= \theta(A_1, \ldots, A_r, A_r, \ldots, A_n) + \theta(A_1, \ldots, A_r, A_{r+1}, \ldots, A_n) \\ &\qquad + \theta(A_1, \ldots, A_{r+1}, A_r, \ldots, A_n) + \theta(A_1, \ldots, A_{r+1}, A_{r+1}, \ldots, A_n) \\ &= \theta(A_1, \ldots, A_r, A_{r+1}, \ldots, A_n) + \theta(A_1, \ldots, A_{r+1}, A_r, \ldots, A_n), \end{aligned}$$

donc

$$\theta(A_1, \ldots, A_{r+1}, A_r, \ldots, A_n) = -\theta(A_1, \ldots, A_r, A_{r+1}, \ldots, A_n).$$

On peut réécrire cette propriété de la façon suivante : si $\tau = (r, r+1)$ est la transposition qui échange r et $r+1$, alors

$$\theta(A_{\tau(1)}, \ldots, A_{\tau(n)}) = -\theta(A_1, \ldots, A_n).$$

Supposons maintenant que $\tau = (r, s)$ est la transposition qui échange r et s avec $1 \leq r < s \leq n$. Alors τ peut s'écrire comme composition de $2k+1$ transpositions adjacentes :

$$\tau = (r, s) = (r, r+k) = (r+k, r+k-1) \ldots (r+2, r+1)(r, r+1)(r+1, r+2) \ldots (r+k-1, r+k).$$

Donc

$$\theta(A_{\tau(1)}, \ldots, A_{\tau(n)}) = (-1)^{2k+1} \theta(A_1, \ldots, A_n) = -\theta(A_1, \ldots, A_n).$$

Soit maintenant une permutation quelconque $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On sait qu'on peut écrire σ comme produit de transpositions : $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_s$ où chaque τ_k est une permutation. En répétant l'argument précédent s fois, on trouve que

$$\theta(A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(n)}) = (-1)^s \theta(A_1, \ldots, A_n).$$

Mais $(-1)^s = \mathrm{sgn}(\sigma)$, on a donc démontré que l'application θ est alternée. Le théorème 7.4.1 nous dit alors que $\theta = \det$.

$\square$

7.5 Cofacteurs et formule de Laplace

Définitions. Les *cofacteurs* de la $n \times n$ matrice $A = (a_{ij})$ sont définis par

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(i|j)$$

où $A(i|j)$ est la $(n-1) \times (n-1)$ matrice obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A. La *matrice des cofacteurs* de A est la $n \times n$ matrice $C = \mathrm{Cof}(A) = (c_{ij})$.

Proposition 7.5.1. *On peut calculer le déterminant d'une matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ par la formule de récurrence suivante (valable pour tout i) :*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A(i|j). \tag{7.3}$$

Cette formule s'appelle le *développement de Laplace du déterminant suivant la $i^{\text{ème}}$ ligne.*

Preuve. Pour une matrice $A \in M_n(K)$, on écrit

$$\theta_i(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A(i|j).$$

Il est clair que $\theta_i(\mathbf{I}_n) = 1$ et que θ_i est multilinéaire en tant qu'application $K^n \times \cdots \times K^n \to K$. Montrons que θ_i s'annule lorsque deux colonnes adjacentes de la matrice A sont identiques. Supposons donc que $A_r = A_{r+1}$ avec $r < n$, alors

$$\theta_i(A) = (-1)^{i+r} a_{ir} \det A(i|r) + (-1)^{i+r+1} a_{i(r+1)} \det A(i|(r+1)) + \sum_{j \neq r, r+1} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A(i|j).$$

Or si $i \neq r$ et $i \neq r+1$, alors la sous-matrice $A(i|j)$ possède deux colonnes adjacentes qui sont égales, donc $\det A(i|j) = 0$. D'autre part $A(i|(r+1)) = A(i|r)$ et $a_{i(r+1)} = a_{ir}$, donc $\theta_i(A) = 0$ pour toute matrice A ayant deux colonnes adjacentes égales.
Le théorème 7.4.5 entraîne alors que $\theta_i(A) = \det(A)$ pour tout $A \in M_n(K)$.

□

Corollaire 7.5.2. *On peut aussi calculer le déterminant d'une matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ en développant suivant la $j^{\text{ème}}$ colonne :*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} c_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A(i|j).$$

Preuve. C'est une conséquence de la proposition précédente et du fait que $\det(A^\top) = \det(A)$.

□

Exemple. Le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ peut se développer selon la première colonne, ce qui donne

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (1) - 2 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) \\ &= 4, \end{aligned}$$

Il peut aussi se développer selon la troisième colonne, ce qui donne

$$\det(A) = 1 \cdot 3 - 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 4,$$

ou encore selon la deuxième ligne :

$$\begin{aligned} \det(A) &= -2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -2 \cdot (-2) + 1 \cdot (0) - 0 \cdot (2) \\ &= 4. \end{aligned}$$

On simplifie le calcul d'un déterminant en choisissant de le développer selon une ligne ou une colonne qui contient un ou plusieurs zéros (si c'est possible). On simplifie encore si un ou plusieurs cofacteurs sont nuls. Dans l'exemple ci-dessus c'est le développement selon la deuxième ligne qui est le plus efficace.

La proposition 7.5.1 a aussi la conséquence suivante :

Corollaire 7.5.3. *Si $k \neq i$, alors*

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{kj} \det A(i|j) = 0.$$

Preuve. Notons Z la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par la $k^{\text{ème}}$ ligne, i.e.

$$z_{r,s} = \begin{cases} a_{r,s} & \text{si } r \neq i, \\ a_{k,s} & \text{si } r = i \end{cases}$$

alors $\det(Z) = 0$ car cette matrice à deux lignes identiques. Par construction on a $Z(i|j) = A(i|j)$ et $z_{ij} = a_{kj}$ pour tout j et pour tout k, donc l'équation (7.3) appliquée à la matrice Z entraîne que

$$0 = \det(Z) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} z_{ij} \det Z(i|j) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ik} \det A(i|j) = \det(Z) = 0.$$

□

Théorème 7.5.4. *(Formule de Laplace) On a*

$$A \cdot \mathrm{Cof}(A)^{\top} = \mathrm{Cof}(A)^{\top} \cdot A = \det(A) \cdot \mathbf{I}_n$$

Preuve. La proposition précédente et son corollaire nous dit que

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} c_{ij} = \delta_{ik} \det(A)$$

Ce qui signifie que $A \cdot \mathrm{Cof}(A)^\top = \det(A) \cdot \mathbf{I}_n$. On prouve $\mathrm{Cof}(A)^\top \cdot A = \det(A) \cdot \mathbf{I}_n$ de la même manière. □

Corollaire 7.5.5. *Une matrice carrée A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Si c'est le cas, l'inverse est donnée par la transposée de la matrice des cofacteurs divisée par le déterminant :*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{Cof}(A)^\top.$$

Exemple. Reprenons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a $\det(A) = 4$ et la matrice des cofacteurs $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ est

$$\mathrm{Cof}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\mathrm{Cof}(A))^\top = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le lecteur est invité à vérifier qu'en effet le produit de cette matrice par A donne la matrice identité.

Résumé des propriétés du déterminant :

1) Le déterminant définit une application multilinéaire $\det : K^n \times \cdots \times K^n \to K$.
2) On a $\det(A) = \det(A^\top)$ et $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \det(A)$ (en particulier $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$).
3) Le déterminant de la matrice A change de signe si on échange deux lignes ou deux colonnes de A.
4) Plus généralement $\det(A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(n)}) = \mathrm{sgn}(\sigma) \det(A_1, \dots, A_n)$ pour toute permutation σ (et on a une formule similaire sur les lignes de la matrice).
5) Si une matrice A' est obtenue à partir de A en ajoutant à une colonne de A une combinaison linéaire des autres colonnes de A, alors $\det(A') = \det(A)$.
6) Si une matrice A' est obtenue à partir de A en ajoutant à une ligne de A une combinaison linéaire des autres lignes de A, alors $\det(A') = \det(A)$.
7) Les vecteurs colonnes $A_1, \dots, A_n$ sont linéairement indépendants si et seulement si $\det(A_1, \dots, A_n) \neq 0$.

8) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

9) Le déterminant peut se calculer à partir des cofacteurs en développant selon une ligne ou une colonne :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} c_{ij}.$$

où les C_{ij} sont les cofacteurs de A : $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(i|j)$.

10) La matrice $A \in M_n(K)$ est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Dans ce cas on a $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\mathrm{Cof}(A))^{\top}$.

Exemple. Soit à calculer le déterminant

$$A = \det \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient une matrice A' de même déterminant en soustrayant la quatrième ligne à la deuxième ligne. On développe ensuite selon les cofacteurs de la deuxième ligne et on obtient

$$\begin{aligned}
\det(A) = \det(A') = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} &= -3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -3 \cdot \left(2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right) + 1 \cdot \left(4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right) \\
&= -3(2 \cdot 3 - 2 \cdot 6) + (4 \cdot 3 - 2 \cdot 5) \\
&= 20.
\end{aligned}$$

7.6 Calcul de déterminants par l'algorithme de Gauss-Jordan

Pour calculer un déterminant, on peut utiliser le développement par les cofacteurs. Concrètement cela signifie qu'on remplace le calcul d'un déterminant $n \times n$ par n déterminants $(n-1) \times (n-1)$. Cette méthode n'est pas utilisable pour les matrices de grandes taille. On préfère alors utiliser l'algorithme de Gauss-Jordan pour calculer des déterminants.

On a vu au paragraphe 6.4 la définition des matrices élémentaires. Leurs déterminants sont très simples à calculer :

Proposition 7.6.1. *Les déterminants des matrices élémentaires sont donnés par*

$$\det(P_{(r,s)}) = -1, \quad \det(D_{(4)}(\lambda)) = \lambda \quad \textit{et} \quad \det L_{(r,s)}(\lambda) = 1.$$

La preuve est une simple application des propriétés du déterminant. □

Rappelons que le théorème 6.4.1 nous dit que pour toute matrice $A \in M_{n \times n}(K)$ il existe $Q \in GL_n(K)$ telle que Q est le produit d'un nombre fini de matrices et $A' = Q \cdot A$ est de forme échelonnée. Cela nous conduit à la méthode suivante pour calculer le déterminant d'une matrice $A \in M_n(K)$:

1. Ramener A à une forme échelonnée A' par l'algorithme de Gauss-Jordan.
2. Comme A' est une $n \times n$ échelonnée, c'est une matrice triangulaire.
3. Noter S_k la matrice élémentaire qui correspond à la $k^{\text{ème}}$ étape de l'algorithme, alors
$$S_m S_{m-1} \cdots S_1 \cdot A = A',$$
où m est le nombre d'étapes de la réduction à la forme échelonnée. La matrice Q est donc le produit $Q = S_m S_{m-1} \cdots S_1$.
4. On a donc
$$\det(A) = \det(Q)^{-1} \det(A') = \prod_{k=1}^{m} \det(S_k)^{-1} \det(A')$$
et chaque $\det(S_k)$ est facile à calculer. Le déterminant $\det(A')$ est aussi facile à calculer car c'est une matrice triangulaire.

Remarquer que si A' contient une ligne nulle, alors $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A') < n$ et donc $\det(A) = 0$.

Exemple. Considérons la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 4 \\ -7 & -17 & -7 \\ 3 & 9 & 4 \end{pmatrix}.$$
Cette matrice peut s'échelonner en 3 étapes :
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 4 \\ -7 & -17 & -7 \\ 3 & 9 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -7 & -17 & -7 \\ 3 & 9 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 9 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A'$$
La première étape est une opération élémentaire de type II, qui est la multiplication de la première ligne par $\frac{1}{4}$, la seconde opération de type III (on ajoute 7 fois la première ligne à la seconde) et la troisième opération est aussi de type III (on soustrait 3 fois la première ligne de la troisième). Matriciellement, cela nous donne :
$$A' = L_{(3,1)}(-3) \cdot L_{(2,1)}(7) \cdot D_{(1)}(\frac{1}{4}) \cdot A \quad \Rightarrow \quad A = D_{(1)}(4) \cdot L_{(2,1)}(-7) \cdot L_{(3,1)}(3) \cdot A'.$$
Ce qu'on peut vérifier en multipliant les matrices :
$$\begin{pmatrix} 4 & 12 & 4 \\ -7 & -17 & -7 \\ 3 & 9 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Le déterminant de A' vaut 4, donc
$$\det(A) = \det(D_{(1)}(4)) \cdot \det(L_{(2,1)}(-7)) \cdot \det(L_{(3,1)}(3)) \cdot \det(A') = 4 \cdot 4 = 16.$$

Remarque. Il est (presque) évident à partir du théorème 7.3.2 que pour tous $S, B \in M_n(K)$, où S est une matrice élémentaire, on a $\det(SB) = \det(S)\det(B)$. Comme toute matrice carrée est un produit de matrice élémentaires, on en déduit une nouvelle preuve de l'identité
$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$
qui ne dépend pas du théorème fondamental 7.4.1 (mais cette preuve repose sur l'algorithme de Gauss-Jordan et donc sur le théorème 6.3.1).