Chapitre 3

Variétés Différentiables

3.1 Structure différentiable sur une variété topologique

Définition 3.1.1 Soit M une variété de dimension n et $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ un atlas. Supposons que $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$ et notons $V_{ij} = \phi_i(U_{ij})$ et $V_{ji} = \phi_j(U_{ij})$. On a un homéomorphisme

$$\phi_{ji} = \phi_j \circ \phi_i^{-1} : V_{ij} \to V_{ji}.$$

Cet homéomorphisme se nomme *l'application de changement de cartes* (ou *application de transition*).

Définition 3.1.2
- Un altas est dit *de classe* C^k si tous les changements de cartes sont des difféomorphismes de classe C^k.
- Deux atlas $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont dit C^k*-compatibles* si $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ est un atlas de classe C^k.

Remarque 3.1.3 C'est une relation d'équivalence.

Définition 3.1.4 Une *structure différentiable* de classe C^∞ sur M est une classe d'équivalence d'atlas C^k-compatibles.

Lemme 3.1.1 *Pour toute structure différentiable sur M, il existe un unique atlas maximal $\widehat{\mathcal{A}}$ pour la relation d'inclusion.*

Preuve Soit $\mathcal{A}_0$ un atlas C^k sur M. Alors $\widehat{\mathcal{A}} = \cup \big\{ \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ atlas } C^k \text{ compatible avec } \mathcal{A}_0 \big\}$.

□

Remarque 3.1.5
a) $1 \leq k \leq \infty$ est arbitraire. On prendra généralement $k = \infty$.
b) Le cas $k = 0$ correspond simplement aux variétés topologiques : tout atlas d'une variété topologique est de classe C^0.
c) Un théorème dit que tout atlas de classe C^k $(k \geq 1)$ est C^k-équivalent à un atlas de classe C^∞ (voir le livre de M. Hirsch, *Differential topology*, GTM 33, Springer, 1976).

3.2 Fonctions différentiables

Définition 3.2.1 Soit $(M, \mathcal{A})$ une variété différentiable. Une fonction $f : M \to \mathbb{R}$ est *différentiable (C^∞)* si $f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}$ est différentiable (C^∞) pour tout carte $(U, \phi) \in \mathcal{A}$. On note $C^\infty(M, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions différentiables sur M.

Lemme 3.2.1 *$C^\infty(M,\mathbb{R})$ est une algèbre (pour l'addition et la multiplication des fonctions). De plus, si $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est différentiable et $f\in C^\infty(M,\mathbb{R})$, alors $g\circ f$ est différentiable.*

Théorème 3.2.2 *Soit M une variété différentiable C^∞, et $U\subset M$ un ouvert. Si $C\subset U$ est compact, alors il existe une fonction $f\in C^\infty(M,\mathbb{R})$ telle que :*

i.) $f\mid_C\ = 1$.

ii.) $\operatorname{supp}(f)\subset U$.

On rappelle que $\operatorname{supp}(f)=\overline{\{x\in M\mid f(x)\neq 0\}}$ est le *support* de f.

Définition 3.2.2 Une fonction vérifiant les propriétés du lemme se nomme une *fonction plateau.*

Preuve du théorème : Commençons par quelques préliminaires :

1. La fonction $h_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$h_1(x)=\begin{cases}\exp\left(\frac{1}{1-x^2}\right) & \text{si } |x|<1,\\ 0 & \text{si } |x|\geq 1.\end{cases}$$

   est de classe C^∞. Observer que $\operatorname{supp}(h_1)=[-1,1]$ et que $0\leq h(x)\leq h(0)=1/\mathrm{e}$ pour tout x.

2. Notons $\gamma=\displaystyle\int_{-1}^{1}h_1(s)ds$ et introduisons la fonction h_2 définie par

$$h_2(x)=\frac{2}{\gamma}\int_{-\infty}^{x}h_1(2s-1)ds.$$

   Alors $h_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction C^∞ qui vérifie
   - $0\leq h_2(x)\leq 1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$,
   - $h_2(x)=0$ si $x\leq 0$,
   - $h_2(x)=1$ si $x\geq 1$.

Avec ces préliminaires, on peut prouver le théorème :

Soit $p\in C\subset U$, et $\phi_p:U_p\to\mathbb{R}^n$ une carte de l'atlas différentiable maximal de M telle que $U_p\subset U$. On choisit ϕ_p de telle sorte que $\phi_p(p)=0$ et que

$$B(0,2)=\{x\in\mathbb{R}^n\mid \|x\|<2\}\subset\phi_p(U_p),$$

ce qui est évidemment toujours possible. Soit $f_p:M\to\mathbb{R}$ la fonction

$$f_p(q)=\begin{cases}h_1(\|\phi_p(q)\|) & \text{si } q\in U_p,\\ 0 & \text{si } q\notin U_p.\end{cases}$$

Alors par construction, on a $f_p\in C^\infty(M,\mathbb{R})$. De plus $\operatorname{supp}(f_p)\subset U_p$ et $f_p>0$ sur un voisinage W_p de p. Puisque C est compact, on peut trouver $p_1,\cdots,p_r\in C$ tels que $C\subset\cup_{i=1}^r W_{p_i}$.
Soit $\hat f=\sum_{i=1}^r f_{p_i}$. Alors $\hat f(q)>0$ pour tout $q\in\cup_{p_i}W_{p_i}$ et $\operatorname{supp}\hat f\subset U$.
Posons maintenant $\alpha=\min_C\hat f>0$, alors la fonction cherchée est donnée par $f=h_2(\frac{1}{\alpha}\hat f)$.

□

Corollaire 3.2.3 *Pour toute variété différentiable non vide de* $\dim(M)\geq 1$*, on a* $\dim_{\mathbb{R}}\left(C^\infty(M,\mathbb{R})\right)=\infty$.

3.3 Applications différentiables

Définition 3.3.1 Soient $(M, \mathcal{A})$ une variété de classe C^k de dimension m et $(N, \mathcal{B})$ une variété de classe C^k de dimension n. On dit qu'une application $F : M \to N$ *est de classe* C^k si pour toute carte $(U_i, \phi_i) \in \mathcal{A}$ de M et toute carte $(V_j, \psi_j) \in \mathcal{A}$ de N, l'application

$$\psi_j \circ F \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap F^{-1}(V_j)) \to \mathbb{R}^n$$

est de classe C^k.

On exprime cette définition en disant que F est differentiable si elle est différentiable au sens classique lorsqu'elle est "*lue dans les cartes*". Noter que $U_i \cap F^{-1}(V_j)$ est l'ensemble des points de U_i dont l'image par F est contenue dans V_j, c'est un ouvert de M. Ainsi $\phi_i(U_i \cap F^{-1}(V_j)) \subset \mathbb{R}^m$ est le plus grand domaine où l'application $\psi_j \circ F \circ \phi_i^{-1}$ est définie.

Cette définition est assez complexe, la proposition suivante nous donne une façon plus simple d'appréhender les applications différentiables.

Proposition 3.3.1 *Soit $F : M \to N$ une application entre deux variétés différentiables. On dit que F est de classe C^k si le rappel par F de toute fonction différentiable sur N est une fonction différentiable sur M, i.e. si*

$$F^*(C^k(M)) \subset C^k(M).$$

Nous laissons la preuve en exercice. Rappelons que $F^*h = h \circ F$ pour $h \in C^\infty(N)$.

Définition 3.3.2 $F : M \to N$ est un *difféomorphisme* si F est bijective, C^∞, et F^{-1} est aussi C^∞.

Remarque. En particulier, tout difféomorphisme est un homéomorphisme. Ainsi, deux variétés difféomorphes sont toujours homéomorphes. On peut se demander si la réciproque est vraie. C'est un problème difficile : la réponse est *positive* en dimensions $1, 2, 3$ et négative au delà. John Milnor et Michel Kervaire on construit des exemples de variétés différentiables de dimension 7 qui sont homéomorphes mais non difféomorphes. En 1983, Simon Donalsdson a construit des exemples en dimension 4. Il existe aussi des variétés topologiques qui n'admettent aucune structure différentiable (Kervaire a produit un exemple de dimension 10 en 1960 et les travaux de Donaldson ont permis de construire des exemples en dimension 4 vers 1983).

3.4 L'espace tangent à une variété différentiable

Dans ce paragraphe, nous introduisons la notion d'espace tangent à une variété différentielle abstraite. Pour motiver la définition qui suit, rappelons qu'à tout vecteur (concret) $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ et tout point $p \in U$ (où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$) on peut associer la dérivée directionnelle d'une fonction différentiable f en direction de $\mathbf{v}$ au point p :

$$\partial_{\mathbf{v}} : C^\infty(U) \to \mathbb{R}, \qquad \partial_{\mathbf{v}}(f) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 f(p + t\mathbf{v}).$$

L'opérateur $\partial_{\mathbf{v}}$ est linéaire et vérifie la règle de Leibniz $\partial_{\mathbf{v}}(fg) = f(p)\partial_{\mathbf{v}}(g) + g(p)\partial_{\mathbf{v}}(f)$. Observons aussi que $\partial_{\mathbf{v}} = \partial_{\mathbf{w}}$ si et seulement si $\mathbf{v} = \mathbf{w}$. Il y a donc équivalence entre les dérivations des fonctions en un point p d'un ouvert U et les vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Cette remarque conduit à la définition suivante :

Définition 3.4.1 Soit M une variété différentiable et p un point de M. Un *vecteur tangent* à M en p (ou *dérivation* en p) est une application $X : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ telle que

a) X est $\mathbb{R}$-linéaire,

b) et X vérifie la règle de Leibniz :

$$X(fg) = f(p)X(g) + g(p)X(f)$$

pour tous $f, g \in C^\infty(M)$.

L'ensemble des vecteurs tangents à M en p s'appelle l'espace tangent à M en p et se note T_pM.

On note typiquement $X, Y, Z, ... \in T_pM$ des éléments de l'espace tangent.

Exemples.

1.) Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $p \in U$, les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x^i}$ sont des vecteurs tangents à U en p.

2.) Plus généralement, toute dérivée directionnelle $\partial_{\mathbf{v}}$ est un vecteur tangent à U en p.

3.) La dérivée seconde $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ n'est pas un vecteur tangent (la règle de Leibniz n'est pas vérifiée).

4.) Soit $\gamma : (a, b) \to M$ une courbe C^∞, $t_0 \in (a, b)$, et $p = \gamma(t_0) \in M$. L'application $X : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ définie par $X(f) = \frac{d}{dt}\big|_{t_0} f \circ \gamma$ est un vecteur tangent à M en p. On note souvent $X = \partial_{\dot\gamma}(t_0)$ ou simplement $X = \dot\gamma(t_0)$ ce vecteur tangent.

Remarque. Si f est une fonction constante sur M, alors $X(f) = 0$. En effet, observons d'abord que pour $f \equiv 1$ on a

$$X(1) = X(1 \cdot 1) = 1 \cdot X(1) + 1 \cdot X(1) = 2 \cdot X(1),$$

donc $X(1) = 0$. Si maintenant $f \equiv c$, alors $X(f) = X(c) = cX(1) = 0$.

Lemme 3.4.1 *T_pM est un espace vectoriel.*

Preuve Il est facile de vérifier que si X et Y sont des vecteurs tangents et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors $\lambda X + \mu Y$ est un vecteur tangent, par conséquent T_pM est un sous-espace vectoriel du dual de $C^\infty(M)$ (i.e. l'espace des applications linéaires $C^\infty(M) \to \mathbb{R}$). $\square$

Lemme 3.4.2 *Tout $X \in T_pM$ est un opérateur local : si $f = g$ au voisinage de p, alors $X(f) = X(g)$.*

Preuve Soit U un voisinage de p tel que $(f - g)|_U = 0$, et soit $\eta \in C^\infty(M)$ une fonction plateau telle que $\operatorname{supp}(\eta) \subset U$ et $\eta = 1$ dans un ouvert V tel que $p \in V \subset U$.
Alors $(f - g) = (f - g)(1 - \eta)$, on a donc par la règle de Libniz

$$X(f - g) = X\big((f - g)(1 - \eta)\big) = (f - g)(p)X(1 - \eta) + (1 - \eta)(p)X(f - g) = 0$$

car $(f - g)(p) = (1 - \eta)(p) = 0$. Par linéarité de X on conclut que $X(f) = X(g)$. $\square$

Considérons la situation suivante : on se donne une variété différentiable M, un ouvert non vide $W \subset M$ et on fixe un point $p \in W$. La restriction des fonctions définit une application $C^\infty(M) \to C^\infty(W)$, ce qui permet d'associer à tout élément $X \in T_pW$ un élément $\hat{X} \in T_pM$ défini ainsi :

$$\hat{X}(f) = X(f|_W).$$

Proposition 3.4.3 *L'application définie ci-dessus est un isomorphisme entre T_pW et T_pM.*

Preuve Toute fonction $f \in C^\infty(M)$ définit par restriction une fonction $f|_W \in C^\infty(W)$. On obtient ainsi une application

$$T_pW \to T_pM, \qquad X \mapsto \hat{X}$$

où $\hat{X}(f) := X(f|_W)$ pour $f \in C^\infty(M)$. Cette application est clairement linéaire, montrons que c'est un isomorphisme en construisant une application inverse. Pour cela on choisit une fonction plateau $\eta \in C^\infty(M)$ telle que $\operatorname{supp}(\eta) \subset W$ et $\eta = 1$ dans un voisinage $V \subset W$ de p. Pour toute fonction $g \in\in C^\infty(W)$ on associe alors la fonction $\tilde{g} \in C^\infty(M)$ définie par

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} \eta(x)g(x) & \text{si } x \in W \\ 0 & \text{si } x \notin W \end{cases}$$

Pour tout $Y \in T_pM$ on associe un vecteur $\check{Y} \in T_pW$ définit par

$$\check{Y}(g) = Y(\tilde{g}).$$

Nous affirmons que les applications $X \mapsto \hat{X}$ et $Y \mapsto \check{Y}$ sont inverses l'une de l'autre.
1.) Si $X \in T_pW$ et $Y = \hat{X} \in T_pM$, alors $\check{Y} = X$. En effet on a pour tout $g \in C^\infty(W)$

$$\check{Y}(g) = Y(\tilde{g}) = \hat{X}(\tilde{g}) = X(\tilde{g}|_W) = X(g).$$

La dernière égalité découle du lemme précédent puisque $\tilde{g}|_W$ et g sont égales dans un voisinage de p.
2.) Si $Y \in T_pM$ et $X = \check{Y} \in T_pW$, alors $\hat{X} = Y$. En effet on a pour tout $f \in C^\infty(M)$

$$\hat{X}(f) = X(f|_W) = \check{Y}(f|_W) = Y(\tilde{f}) = Y(f).$$

La dernière égalité vient du fait que $\tilde{f}$ et f sont égales dans un voisinage de p.

□

Remarquons que cet isomorphisme ne fait intervenir aucun choix, donc *si W est un ouvert de la variété différentiable M, alors T_pW et T_pM sont canoniquement isomorphes.*

Le théorème suivant nous permet de construire une base naturelle de l'espace vectoriel T_pM à partir de toute carte en p.

Théorème 3.4.4 *Soit $(M, \mathcal{A})$ une variété différentiable de dimension m et p un point de M. Soit $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ une carte au voisinage de p et notons $x^1, \ldots, x^m$ les coordonnées associées. Pour tout $i = 1, \ldots, m$, on note $\partial_i^{\phi,p}$ l'application*

$$\partial_i^{\phi,p} : C^\infty(M) \to \mathbb{R}, \qquad \partial_i^{\phi,p}(f) := \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\phi(p)} f \circ \phi^{-1}.$$

Alors $\partial_1^{\phi,p}, \ldots, \partial_m^{\phi,p}$ est une base de T_pM. En particulier $\dim(T_pM) = \dim(M)$.

Ce théorème entraîne en particulier que la dimension de T_pM est égale à la dimension de M. On note par abus

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \partial_i^{\phi,p}(f),$$

et on dit que $\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x^m}$ est la *base naturelle* de T_pM associée à la carte (U, ϕ) (ou associée au système de coordonnées $x^1, \ldots, x^m$).

Preuve du théorème. Ecrivons pour simplifier $\partial_i = \partial_i^{\phi,p}$ et observons que par le proposition précédente, $T_pU = T_pM$, il suffit donc de prouver que $\partial_1, \ldots, \partial_m$ est une base de T_pU.
Quitte à restreindre le domaine U de la carte ϕ on peut supposer que $\phi(p) = 0$ et que $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ est étoilé en 0. Nous affirmons que toute fonction $f \in C^\infty(U)$ peut s'écrire sous la forme suivante (décomposition de Hadamard)

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^m \phi^i(q) g_i(q) \tag{3.1}$$

où ϕ^i est la $i^{\text{ème}}$ composante de ϕ et les g_i sont des fonctions de $C^\infty(U)$ telles que $g_i(p) = \partial_i(f)$.
Prouvons le théorème en admettant cette affirmation. Soit $X \in T_pU$ un vecteur tangent à p en U, alors on a pour tout $f \in C^\infty(U)$:

$$X(f) = X(f(p)) + \sum_{i=1}^m \phi^i(p) X(g_i) + \sum_{i=1}^m X(\phi^i) g_i(p).$$

Or $f(p)$ est constant, donc $X(f(p)) = 0$ et $\phi^i(p) = 0$ car on a supposé $\phi(p) = 0$, ainsi

$$X(f) = \sum_{i=1}^m X(\phi^i) g_i(p) = \sum_{i=1}^m X(\phi^i) \partial_i(f).$$

Par conséquent

$$X = \sum_{i=1}^m a^i \partial_i$$

avec $a^i = X(\phi^i)$. On a montré que tout $X \in T_pM$ est combinaison linéaire des ∂_i. Pour voir que ces vecteurs tangents sont linéairement indépendants, on observe que

$$\partial_i(\phi^j) = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\phi(p)} \phi^j \circ \phi^{-1} = \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \delta_i^j.$$

$$\partial_i(\phi^j) = \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \delta_i^j.$$

Donc si $\sum_{i=1}^m a^i \partial_i = 0 \in T_pU$, alors pour tout $j = 1, \ldots, m$ on a $a^j = \sum_{i=1}^m a^i \partial_i(\phi^j) = 0$.
Nous devons encore prouver la décomposition (**??**). Notons $\tilde{f} = f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}$ et $\tilde{q} \ = \phi(q)$. Alors pour tout $x \in \phi(U)$ on a

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= \tilde{f}(0) + \int_0^1 \frac{d}{dt} \tilde{f}(tx) dt \\ &= \tilde{f}(0) + \int_0^1 \sum_{i=1}^m x^i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^i}(tx) dt \\ &= \tilde{f}(0) + \sum_{i=1}^m x^i \tilde{g}_i(x) \end{aligned}$$

avec $\tilde{g}_i(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^i}(tx) dt$.

On applique cette identité à $x = \phi(q)$, alors $\tilde{f}(x) = f(q)$ et $x^i = \phi^i(q)$. On obtient donc (**??**) avec $g_i = \tilde{g}_i \circ \phi$, de plus les fonctions g_i vérifient

$$g_i(p) = \tilde{g}_i(0) = \int_0^1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^i}(0)dt = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^i}(0) = \partial_i f.$$

□

Corollaire 3.4.5 *Si W est un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $p \in W$, alors l'application*

$$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \;\mapsto\; \partial_{\mathbf{v}} \in T_pW$$

est un isomorphisme canonique d'espaces vectoriels.

Preuve L'application $\mathbf{v} \mapsto \partial_{\mathbf{v}}$ est clairement linéaire et injective. Il s'agit donc d'un isomorphisme puisque $\dim(T_pW) = \dim(\mathbb{R}^m) = m$. L'isomorphisme est canonique car sa construction ne fait pas intervenir le choix d'une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ (ni aucun autre choix).

□

Remarque Dans la base canonique, cet isomorphisme s'écrit ainsi : si $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^m v_i \mathbf{e}_i$ alors

$$\partial_{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

3.4.1 Approche cinématique :

Donnons-nous une courbe $\gamma : (-1,1) \to M$ de classe C^1 sur la variété M et notons $p = \gamma(0) \in M$. On définit une application $X : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ par

$$X(f) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f \circ \gamma.$$

Lemme 3.4.6 *$X \in T_pM$.*

Preuve du lemme : C'est trivial car $\frac{d}{dt}$ est linéaire et vérifie la règle de Leibniz. □

On note $X_{\dot{\gamma}(0)}$ (ou simplement $\dot{\gamma}(0)$) ce vecteur tangent et on dit que c'est *le vecteur tangent associé à la courbe* γ en $t = 0$.

Proposition 3.4.7 *i) Tout élément de T_pM est le vecteur tangent associé à une courbe de M.*

ii) Si $\alpha, \beta : (-1,1) \to M$ sont deux courbes de classe C^1 telles que $\alpha(0) = \beta(0) = p$, alors $p = \gamma(0) \in M$, alors $X_{\dot{\alpha}(0)} = X_{\dot{\beta}(0)}$ si et seulement si

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f \circ \alpha = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f \circ \beta \tag{3.2}$$

pour toute fonction $f \in C^1(M)$.

Preuve (i.) Soit $X \in T_pM$ un vecteur tangent à M en p. Donnons-nous une carte (U, ϕ) au voisinage de p et notons $x^1, \dots, x^n$ le système de coordonnées associé. Alors on peut écrire $X = \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Notons $\gamma(t) = \phi^{-1}(ta^1, \cdots, ta^n) \in U$. On vérifie que pour tout $f \in C^\infty(M)$ on a

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f \circ \alpha = \sum_i a^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p),$$

par conséquent $X = X_{\dot{\gamma}(0)}$.

(ii.) La seconde assertion suit immédiatement de la définition de $X_{\dot{\alpha}(0)}$.

$\square$

Remarque 3.4.2 Notons $\mathcal{P}_pM$ l'ensemble des courbes $\gamma : (-1, 1) \to M$ qui sont C^1 et telles que $\gamma(0) = p$. Alors la proposition précédente dit que *L'espace tangent T_pM s'identifie canoniquement avec le quotient $\mathcal{P}_p(M)/\sim$ où deux courbes $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_p(M)$ sont équivalentes si et seulement si $\frac{d}{dt}\big|_0 f \circ \alpha = \frac{d}{dt}\big|_0 f \circ \beta$ pour tout $f \in C^\infty(M)$.*

On peut donc aussi voir un vecteur tangent en p comme une classe d'équivalence de courbes passant par le point p. La classe d'équivalence de la courbe γ se note $\dot{\gamma}(0)$. Cette définition est *le point de vue cinématique* sur l'espace tangent.

Remarquons pour finir que la valeur $t = 0$ du paramètre ne joue aucun rôle particulier. Si $\gamma : (a, b) \to M$ est une courbe C^1, alors pour tout $t \in (a, b)$ on a un vecteur tangent $X_{\dot{\gamma}(t)} \in T_{\gamma(t)}M$ définit par

$$X_{\dot{\gamma}(t)}(f) = \left.\frac{d}{dt}\right|_t f \circ \gamma.$$

Si la courbe s'écrit $\gamma(t) = \big(x^1(t), \cdots, x^n(t)\big)$ en coordonnées locales, alors

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^n \dot{x}^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

où $x^i(t) = \frac{dx^i}{dt}(t)$.

3.5 L'espace cotangent

Définition. Soit M une variété différentiable de dimension m et p un point de M. L'espace cotangent à M en p est le dual de l'espace tangent. On le note

$$T_p^*M = \operatorname{Hom}(T_pM, \mathbb{R})$$

Un élément $\theta \in T_p^*M$ s'appelle un *vecteur cotangent* ou un *covecteur* en p.

Exemple. Si f est une fonction C^1 définie au voisinage de p, on définit un covecteur $df_p \in T_pM^*$ par

$$df_p(X) = X(f).$$

Ce covecteur s'appelle la *différentielle* de f en p. On le note parfois d_pf. Observons que si le vecteur $X = X_{\dot{\gamma}(0)} \in T_pM$ est représenté par la courbe $\gamma : (-1, 1) \to M$, alors

$$df_p(v) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\gamma(t)).$$

Proposition 3.5.1 *Soit M une variété différentiable et p un point de M.*

(a) Si $x^1, x^2, \dots, x^m$ est un système de coordonnées locales au voisinage de p (associé à une carte (U, φ)), alors $dx^1_p, dx^2_p, \dots dx^m_p$ est une base de T^*_pM.

(b) La différentielle d'une fonction $f \in C^1(M)$ en p s'écrit dans cette base sous la forme :

$$df_p = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) dx^i_p \quad \in \ T^*_pM. \tag{3.3}$$

Preuve (a.) Si on se donne une carte (U, ϕ) au voisinage de p, alors les coordonnées associées sont des fonctions différentiables x^i définies sur l'ouvert U (ça n'est rien d'autre qu'une autre notation pour la composante ϕ^i de ϕ). La différentielle en p de x^i est donc un covecteur $dx^i_p \in T^*_pM$. C'est le covecteur défini par

$$dx^i_p(X) = X(x^i).$$

On observe que

$$dx^i_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j, \tag{3.4}$$

cette relation montre que les covecteurs $dx^1_p, dx^2_p, \dots dx^m_p$ sont linéairement indépendants. Il forment donc une base de T^*_pM car $\dim(T^*_pM) = \dim(T_pM) = m$. Cette relation montre aussi que les bases $\{dx^i_p\}$ et $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ sont en dualité.

(b.) Il suffit de vérifier (**??**) sur les vecteurs de base de T_pM. Or on a en effet

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \cdot dx^i_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \cdot \delta^i_j = \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) = df_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right).$$

□

Remarques.

(a) Si le point p, a été fixé, alors on note simplement $dx^i_p = dx^i$.

(b) Si $y^1, \dots y^n$ est un autre système de coordonnées au voisinage de p, alors on a les relations

$$dy^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial y^i} = \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial x^j}, \tag{3.5}$$

où on a utilisé la convention de sommation (on somme de 1 à m sur les indices répétés). Ces formules sont à connaître par coeur, elles font apparaître la matrice jacobienne du changement de coordonnées comme matrice de changement de base sur l'espace tangent.