Chapitre 3

Variétés Différentiables

3.1 Structure différentiable sur une variété topologique

Définition 3.1.1 Soit M une variété de dimension n et $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i\in I}$ un atlas. Supposons que $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$ et notons $V_{ij} = \phi_i(U_{ij})$ et $V_{ji} = \phi_j(U_{ij})$. On a un homéomorphisme

$$\phi_{ji} = \phi_j \circ \phi_i^{-1} : V_{ij} \to V_{ji}.$$

Cet homéomorphisme se nomme *l'application de changement de cartes* (ou *application de transition*).

Définition 3.1.2
- Un altas est dit *de classe* C^k si tous les changements de cartes sont des difféomorphismes de classe C^k.
- Deux atlas $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont dit C^k*-compatibles* si $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ est un atlas de classe C^k.

Remarque 3.1.3 C'est une relation d'équivalence.

Définition 3.1.4 Une *structure différentiable* de classe C^∞ sur M est une classe d'équivalence d'atlas C^k-compatibles.

Lemme 3.1.1 *Pour toute structure différentiable sur M, il existe un unique atlas maximal $\widehat{\mathcal{A}}$ pour la relation d'inclusion.*

Preuve Soit $\mathcal{A}_0$ un atlas C^k sur M. Alors $\widehat{\mathcal{A}} = \cup\big\{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ atlas } C^k \text{ compatible avec } \mathcal{A}_0\big\}$.

□

Remarque 3.1.5
a) $1 \leq k \leq \infty$ est arbitraire. On prendra généralement $k = \infty$.
b) Le cas $k = 0$ correspond simplement aux variétés topologiques : tout atlas d'une variété topologique est de classe C^0.
c) Un théorème dit que tout atlas de classe C^k ($k \geq 1$) est C^k-équivalent à un atlas de classe C^∞ (voir le livre de M. Hirsch, *Differential topology*, GTM 33, Springer, 1976).

3.2 Fonctions différentiables

Définition 3.2.1 Soit $(M, \mathcal{A})$ une variété différentiable. Une fonction $f : M \to \mathbb{R}$ est *différentiable (C^∞)* si $f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}$ est différentiable (C^∞) pour tout carte $(U, \phi) \in \mathcal{A}$. On note $C^\infty(M, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions différentiables sur M.

Lemme 3.2.1 *$C^\infty(M,\mathbb{R})$ est une algèbre (pour l'addition et la multiplication des fonctions). De plus, si $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est différentiable et $f\in C^\infty(M,\mathbb{R})$, alors $g\circ f$ est différentiable.*

Théorème 3.2.2 *Soit M une variété différentiable C^∞, et $U\subset M$ un ouvert. Si $C\subset U$ est compact, alors il existe une fonction $f\in C^\infty(M,\mathbb{R})$ telle que :*

i.) $f\mid_C = 1$.

ii.) $\operatorname{supp}(f)\subset U$.

On rappelle que $\operatorname{supp}(f)=\overline{\{x\in M \mid f(x)\neq 0\}}$ est le *support* de f.

Définition 3.2.2 Une fonction vérifiant les propriétés du lemme se nomme une *fonction plateau.*

Preuve du théorème : Commençons par quelques préliminaires :

1. La fonction $h_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$h_1(x)=\begin{cases}\exp\left(\frac{1}{1-x^2}\right) & \text{si } |x|<1,\\ 0 & \text{si } |x|\geq 1.\end{cases}$$

est de classe C^∞. Observer que $\operatorname{supp}(h_1)=[-1,1]$ et que $0\leq h(x)\leq h(0)=1/\mathrm{e}$ pour tout x.

2. Notons $\gamma=\displaystyle\int_{-1}^{1}h_1(s)ds$ et introduisons la fonction h_2 définie par

$$h_2(x)=\frac{2}{\gamma}\int_{-\infty}^{x}h_1(2s-1)ds.$$

Alors $h_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction C^∞ qui vérifie
   - $0\leq h_2(x)\leq 1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$,
   - $h_2(x)=0$ si $x\leq 0$,
   - $h_2(x)=1$ si $x\geq 1$.

Avec ces préliminaires, on peut prouver le théorème :

Soit $p\in C\subset U$, et $\phi_p:U_p\to\mathbb{R}^n$ une carte de l'atlas différentiable maximal de M telle que $U_p\subset U$. On choisit ϕ_p de telle sorte que $\phi_p(p)=0$ et que

$$B(0,2)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|<2\}\subset\phi_p(U_p),$$

ce qui est évidemment toujours possible. Soit $f_p:M\to\mathbb{R}$ la fonction

$$f_p(q)=\begin{cases}h_1(\|\phi_p(q)\|) & \text{si } q\in U_p,\\ 0 & \text{si } q\notin U_p.\end{cases}$$

Alors par construction, on a $f_p\in C^\infty(M,\mathbb{R})$. De plus $\operatorname{supp}(f_p)\subset U_p$ et $f_p>0$ sur un voisinage W_p de p. Puisque C est compact, on peut trouver $p_1,\cdots,p_r\in C$ tels que $C\subset\cup_{i=1}^r W_{p_i}$.

Soit $\hat f=\sum_{i=1}^r f_{p_i}$. Alors $\hat f(q)>0$ pour tout $q\in\cup_{p_i}W_{p_i}$ et $\operatorname{supp}\hat f\subset U$.

Posons maintenant $\alpha=\min_C\hat f>0$, alors la fonction cherchée est donnée par $f=h_2(\frac{1}{\alpha}\hat f)$.

□

Corollaire 3.2.3 *Pour toute variété différentiable non vide de* $\dim(M)\geq 1$*, on a* $\dim_{\mathbb{R}}\left(C^\infty(M,\mathbb{R})\right)=\infty$*.*

3.3 Applications différentiables

Définition 3.3.1 Soient $(M, \mathcal{A})$ une variété de classe C^k de dimension m et $(N, \mathcal{B})$ une variété de classe C^k de dimension n. On dit qu'une application $F : M \to N$ *est de classe* C^k si pour toute carte $(U_i, \phi_i) \in \mathcal{A}$ de M et toute carte $(V_j, \psi_j) \in \mathcal{A}$ de N, l'application

$$\psi_j \circ F \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap F^{-1}(V_j)) \to \mathbb{R}^n$$

est de classe C^k.

On exprime cette définition en disant que F est differentiable si elle est différentiable au sens classique lorsqu'elle est "*lue dans les cartes*". Noter que $U_i \cap F^{-1}(V_j)$ est l'ensemble des points de U_i dont l'image par F est contenue dans V_j, c'est un ouvert de M. Ainsi $\phi_i(U_i \cap F^{-1}(V_j)) \subset \mathbb{R}^m$ est le plus grand domaine où l'application $\psi_j \circ F \circ \phi_i^{-1}$ est définie.

Cette définition est assez complexe, la proposition suivante nous donne une façon plus simple d'appréhender les applications différentiables.

Proposition 3.3.1 *Soit $F : M \to N$ une application entre deux variétés différentiables. On dit que F est de classe C^k si le rappel par F de toute fonction différentiable sur N est une fonction différentiable sur M, i.e. si*

$$F^*(C^k(M)) \subset C^k(M).$$

Nous laissons la preuve en exercice. Rappelons que $F^*h = h \circ F$ pour $h \in C^\infty(N)$.

Définition 3.3.2 $F : M \to N$ est un *difféomorphisme* si F est bijective, C^∞, et F^{-1} est aussi C^∞.

Remarque. En particulier, tout difféomorphisme est un homéomorphisme. Ainsi, deux variétés difféomorphes sont toujours homéomorphes. On peut se demander si la réciproque est vraie. C'est un problème difficile : la réponse est *positive* en dimensions $1, 2, 3$ et négative au delà. John Milnor et Michel Kervaire on construit des exemples de variétés différentiables de dimension 7 qui sont homéomorphes mais non difféomorphes. En 1983, Simon Donalsdson a construit des exemples en dimension 4. Il existe aussi des variétés topologiques qui n'admettent aucune structure différentiable (Kervaire a produit un exemple de dimension 10 en 1960 et les travaux de Donaldson ont permis de construire des exemples en dimension 4 vers 1983).

3.4 L'espace tangent à une variété différentiable

Dans ce paragraphe, nous introduisons la notion d'espace tangent à une variété différentielle abstraite. Pour motiver la définition qui suit, rappelons qu'à tout vecteur (concret) $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ et tout point $p \in U$ (où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$) on peut associer la dérivée directionnelle d'une fonction différentiable f en direction de $\mathbf{v}$ au point p :

$$\partial_{\mathbf{v}} : C^\infty(U) \to \mathbb{R}, \qquad \partial_{\mathbf{v}}(f) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 f(p + t\mathbf{v}).$$

L'opérateur $\partial_{\mathbf{v}}$ est linéaire et vérifie la règle de Leibniz $\partial_{\mathbf{v}}(fg) = f(p)\partial_{\mathbf{v}}(g) + g(p)\partial_{\mathbf{v}}(f)$. Observons aussi que $\partial_{\mathbf{v}} = \partial_{\mathbf{w}}$ si et seulement si $\mathbf{v} = \mathbf{w}$. Il y a donc équivalence entre les dérivations des fonctions en un point p d'un ouvert U et les vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Cette remarque conduit à la définition suivante :

Définition 3.4.1 Soit M une variété différentiable et p un point de M. Un *vecteur tangent* à M en p (ou *dérivation* en p) est une application $X : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ telle que

a) X est $\mathbb{R}$-linéaire,

b) et X vérifie la règle de Leibniz :

$$X(fg) = f(p)X(g) + g(p)X(f)$$

pour tous $f, g \in C^\infty(M)$.

L'ensemble des vecteurs tangents à M en p s'appelle l'espace tangent à M en p et se note T_pM.

On note typiquement $X, Y, Z, ... \in T_pM$ des éléments de l'espace tangent.

Exemples.

1.) Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $p \in U$, les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x^i}$ sont des vecteurs tangents à U en p.

2.) Plus généralement, toute dérivée directionnelle $\partial_{\mathbf{v}}$ est un vecteur tangent à U en p.

3.) La dérivée seconde $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ n'est pas un vecteur tangent (la règle de Leibniz n'est pas vérifiée).

4.) Soit $\gamma : (a, b) \to M$ une courbe C^∞, $t_0 \in (a, b)$, et $p = \gamma(t_0) \in M$. L'application $X : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ définie par $X(f) = \frac{d}{dt}\big|_{t_0} f \circ \gamma$ est un vecteur tangent à M en p. On note souvent $X = \partial_{\dot\gamma}(t_0)$ ou simplement $X = \dot\gamma(t_0)$ ce vecteur tangent.

Remarque. Si f est une fonction constante sur M, alors $X(f) = 0$. En effet, observons d'abord que pour $f \equiv 1$ on a

$$X(1) = X(1 \cdot 1) = 1 \cdot X(1) + 1 \cdot X(1) = 2 \cdot X(1),$$

donc $X(1) = 0$. Si maintenant $f \equiv c$, alors $X(f) = X(c) = cX(1) = 0$.

Lemme 3.4.1 *T_pM est un espace vectoriel.*

Preuve Il est facile de vérifier que si X et Y sont des vecteurs tangents et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors $\lambda X + \mu Y$ est un vecteur tangent, par conséquent T_pM est un sous-espace vectoriel du dual de $C^\infty(M)$ (i.e. l'espace des applications linéaires $C^\infty(M) \to \mathbb{R}$). $\square$

Lemme 3.4.2 *Tout $X \in T_pM$ est un opérateur local : si $f = g$ au voisinage de p, alors $X(f) = X(g)$.*

Preuve Soit U un voisinage de p tel que $(f - g)|_U = 0$, et soit $\eta \in C^\infty(M)$ une fonction plateau telle que $\mathrm{supp}(\eta) \subset U$ et $\eta = 1$ dans un ouvert V tel que $p \in V \subset U$.
Alors $(f - g) = (f - g)(1 - \eta)$, on a donc par la règle de Libniz

$$X(f - g) = X\big((f - g)(1 - \eta)\big) = (f - g)(p)X(1 - \eta) + (1 - \eta)(p)X(f - g) = 0$$

car $(f - g)(p) = (1 - \eta)(p) = 0$. Par linéarité de X on conclut que $X(f) = X(g)$. $\square$

Considérons la situation suivante : on se donne une variété différentiable M, un ouvert non vide $W \subset M$ et on fixe un point $p \in W$. La restriction des fonctions définit une application $C^\infty(M) \to C^\infty(W)$, ce qui permet d'associer à tout élément $X \in T_pW$ un élément $\hat{X} \in T_pM$ défini ainsi :

$$\hat{X}(f) = X(f|_W).$$

Proposition 3.4.3 *L'application définie ci-dessus est un isomorphisme entre T_pW et T_pM.*

Preuve Toute fonction $f \in C^\infty(M)$ définit par restriction une fonction $f|_W \in C^\infty(W)$. On obtient ainsi une application

$$T_pW \to T_pM, \qquad X \mapsto \hat{X}$$

où $\hat{X}(f) := X(f|_W)$ pour $f \in C^\infty(M)$. Cette application est clairement linéaire, montrons que c'est un isomorphisme en construisant une application inverse. Pour cela on choisit une fonction plateau $\eta \in C^\infty(M)$ telle que $\mathrm{supp}(\eta) \subset W$ et $\eta = 1$ dans un voisinage $V \subset W$ de p. Pour toute fonction $g \in\in C^\infty(W)$ on associe alors la fonction $\tilde{g} \in C^\infty(M)$ définie par

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} \eta(x)g(x) & \text{si } x \in W \\ 0 & \text{si } x \notin W \end{cases}$$

Pour tout $Y \in T_pM$ on associe un vecteur $\check{Y} \in T_pW$ définit par

$$\check{Y}(g) = Y(\tilde{g}).$$

Nous affirmons que les applications $X \mapsto \hat{X}$ et $Y \mapsto \check{Y}$ sont inverses l'une de l'autre.
1.) Si $X \in T_pW$ et $Y = \hat{X} \in T_pM$, alors $\check{Y} = X$. En effet on a pour tout $g \in C^\infty(W)$

$$\check{Y}(g) = Y(\tilde{g}) = \hat{X}(\tilde{g}) = X(\tilde{g}|_W) = X(g).$$

La dernière égalité découle du lemme précédent puisque $\tilde{g}|_W$ et g sont égales dans un voisinage de p.
2.) Si $Y \in T_pM$ et $X = \check{Y} \in T_pW$, alors $\hat{X} = Y$. En effet on a pour tout $f \in C^\infty(M)$

$$\hat{X}(f) = X(f|_W) = \check{Y}(f|_W) = Y(\tilde{f}) = Y(f).$$

La dernière égalité vient du fait que $\tilde{f}$ et f sont égales dans un voisinage de p.

□

Remarquons que cet isomorphisme ne fait intervenir aucun choix, donc *si W est un ouvert de la variété différentiable M, alors T_pW et T_pM sont canoniquement isomorphes.*

Le théorème suivant nous permet de construire une base naturelle de l'espace vectoriel T_pM à partir de toute carte en p.

Théorème 3.4.4 *Soit $(M, \mathcal{A})$ une variété différentiable de dimension m et p un point de M. Soit $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ une carte au voisinage de p et notons $x^1, \ldots, x^m$ les coordonnées associées. Pour tout $i = 1, \ldots, m$, on note $\partial_i^{\phi,p}$ l'application*

$$\partial_i^{\phi,p} : C^\infty(M) \to \mathbb{R}, \qquad \partial_i^{\phi,p}(f) := \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\phi(p)} f \circ \phi^{-1}.$$

Alors $\partial_1^{\phi,p}, \ldots, \partial_m^{\phi,p}$ est une base de T_pM. En particulier $\dim(T_pM) = \dim(M)$.

Ce théorème entraîne en particulier que la dimension de T_pM est égale à la dimension de M. On note par abus

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \partial_i^{\phi,p}(f),$$

et on dit que $\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x^m}$ est la *base naturelle* de T_pM associée à la carte (U, ϕ) (ou associée au système de coordonnées $x^1, \ldots, x^m$).

Preuve du théorème. Ecrivons pour simplifier $\partial_i = \partial_i^{\phi,p}$ et observons que par le proposition précédente, $T_pU = T_pM$, il suffit donc de prouver que $\partial_1, \ldots, \partial_m$ est une base de T_pU.
Quitte à restreindre le domaine U de la carte ϕ on peut supposer que $\phi(p) = 0$ et que $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ est étoilé en 0. Nous affirmons que toute fonction $f \in C^\infty(U)$ peut s'écrire sous la forme suivante (décomposition de Hadamard)

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^{m} \phi^i(q) g_i(q) \tag{3.1}$$

où ϕ^i est la $i^{\text{ème}}$ composante de ϕ et les g_i sont des fonctions de $C^\infty(U)$ telles que $g_i(p) = \partial_i(f)$.
Prouvons le théorème en admettant cette affirmation. Soit $X \in T_pU$ un vecteur tangent à p en U, alors on a pour tout $f \in C^\infty(U)$:

$$X(f) = X(f(p)) + \sum_{i=1}^{m} \phi^i(p) X(g_i) + \sum_{i=1}^{m} X(\phi^i) g_i(p).$$

Or $f(p)$ est constant, donc $X(f(p)) = 0$ et $\phi^i(p) = 0$ car on a supposé $\phi(p) = 0$, ainsi

$$X(f) = \sum_{i=1}^{m} X(\phi^i) g_i(p) = \sum_{i=1}^{m} X(\phi^i) \partial_i(f).$$

Par conséquent

$$X = \sum_{i=1}^{m} a^i \partial_i$$

avec $a^i = X(\phi^i)$. On a montré que tout $X \in T_pM$ est combinaison linéaire des ∂_i. Pour voir que ces vecteurs tangents sont linéairement indépendants, on observe que

$$\partial_i(\phi^j) = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\phi(p)} \phi^j \circ \phi^{-1} = \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \delta_i^j.$$

$$\partial_i(\phi^j) = \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \delta_i^j.$$

Donc si $\sum_{i=1}^{m} a^i \partial_i = 0 \in T_pU$, alors pour tout $j = 1, \ldots, m$ on a $a^j = \sum_{i=1}^{m} a^i \partial_i(\phi^j) = 0$.
Nous devons encore prouver la décomposition (3.1). Notons $\tilde{f} = f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}$ et $\tilde{q} = \phi(q)$. Alors pour tout $x \in \phi(U)$ on a

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x) &= \tilde{f}(0) + \int_0^1 \frac{d}{dt} \tilde{f}(tx) dt \\
&= \tilde{f}(0) + \int_0^1 \sum_{i=1}^{m} x^i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^i}(tx) dt \\
&= \tilde{f}(0) + \sum_{i=1}^{m} x^i \tilde{g}_i(x)
\end{aligned}$$

avec $\tilde{g}_i(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^i}(tx) dt$.

On applique cette identité à $x = \phi(q)$, alors $\tilde{f}(x) = f(q)$ et $x^i = \phi^i(q)$. On obtient donc (3.1) avec $g_i = \tilde{g}_i \circ \phi$, de plus les fonctions g_i vérifient

$$g_i(p) = \tilde{g}_i(0) = \int_0^1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^i}(0)dt = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^i}(0) = \partial_i f.$$

□

Corollaire 3.4.5 *Si W est un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $p \in W$, alors l'application*

$$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \;\; \mapsto \;\; \partial_{\mathbf{v}} \in T_pW$$

est un isomorphisme canonique d'espaces vectoriels.

Preuve L'application $\mathbf{v} \mapsto \partial_{\mathbf{v}}$ est clairement linéaire et injective. Il s'agit donc d'un isomorphisme puisque $\dim(T_pW) = \dim(\mathbb{R}^m) = m$. L'isomorphisme est canonique car sa construction ne fait pas intervenir le choix d'une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ (ni aucun autre choix).

□

Remarque Dans la base canonique, cet isomorphisme s'écrit ainsi : si $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^m v_i \mathbf{e}_i$ alors

$$\partial_{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

3.4.1 Approche cinématique :

Donnons-nous une courbe $\gamma : (-1,1) \to M$ de classe C^1 sur la variété M et notons $p = \gamma(0) \in M$. On définit une application $X : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ par

$$X(f) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f \circ \gamma.$$

Lemme 3.4.6 *$X \in T_pM$.*

Preuve du lemme : C'est trivial car $\frac{d}{dt}$ est linéaire et vérifie la règle de Leibniz. □

On note $X_{\gamma,0}$ ce vecteur tangent et on dit que c'est *le vecteur tangent associé à la courbe γ* en $t = 0$.

Proposition 3.4.7 *i) Tout élément de T_pM est le vecteur tangent associé à une courbe de M.*

ii) Si $\alpha, \beta : (-1,1) \to M$ sont deux courbes de classe C^1 telles que $\alpha(0) = \beta(0) = p$, alors $p = \gamma(0) \in M$, alors $X_{\alpha,0} = X_{\beta,0}$ si et seulement si

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f \circ \alpha = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f \circ \beta \tag{3.2}$$

pour toute fonction $f \in C^1(M)$.

Preuve (i.) Soit $X \in T_pM$ un vecteur tangent à M en p. Donnons-nous une carte (U, ϕ) au voisinage de p et notons $x^1, \ldots, x^n$ le système de coordonnées associé. Alors on peut écrire $X = \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Notons $\gamma(t) = \phi^{-1}(ta^1, \cdots, ta^n) \in U$. On vérifie que pour tout $f \in C^\infty(M)$ on a

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f \circ \alpha = \sum_i a^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p),$$

par conséquent $X = X_{\dot\gamma(0)}$.

(ii.) La seconde assertion suit immédiatement de la définition de $X_{\dot\alpha(0)}$.

□

Remarque 3.4.2 Notons $\mathcal{P}_pM$ l'ensemble des courbes $\gamma : (-1, 1) \to M$ qui sont C^1 et telles que $\gamma(0) = p$. Alors la proposition précédente dit que *L'espace tangent T_pM s'identifie canoniquement avec le quotient $\mathcal{P}_p(M)/\sim$ où deux courbes $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_p(M)$ sont équivalentes si et seulement si $\frac{d}{dt}\big|_0 f \circ \alpha = \frac{d}{dt}\big|_0 f \circ \beta$ pour tout $f \in C^\infty(M)$.*

On peut donc aussi voir un vecteur tangent en p comme une classe d'équivalence de courbes passant par le point p. La classe d'équivalence de la courbe γ se note $\dot\gamma(0)$. Cette définition est *le point de vue cinématique* sur l'espace tangent.

Remarquons pour finir que la valeur $t = 0$ du paramètre ne joue aucun rôle particulier. Si $\gamma : (a, b) \to M$ est une courbe C^1, alors pour tout $t \in (a, b)$ on a un vecteur tangent $X_{\gamma,t} \in T_{\gamma(t)}M$ définit par

$$X_{\gamma,t}(f) = \frac{d}{dt}\bigg|_t f \circ \gamma.$$

Si la courbe s'écrit $\gamma(t) = \big(x^1(t), \cdots, x^n(t)\big)$ en coordonnées locales, alors

$$X_{\gamma,t} = \sum_{i=1}^n \dot x^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

où $\dot x^i(t) = \dfrac{dx^i}{dt}(t)$. Ainsi la classe d'équivalence $\dot\gamma(t)$ de γ en t est représentée par le n-tuple

$$\big(\dot x^1(t), \cdots, \dot x^n(t)\big).$$

3.5 Différentielle d'une application, rang, sous-variétés

Soit $F : M \to N$ une application différentiable entre deux variétés différentiables. La *différentielle* de F au point $p \in M$ est l'application $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ définie par

$$dF_p(X)(h) = X(h \circ F) = X(F^*h)$$

où $X \in T_pM, h \in C^k(N)$.

Propriétés 3.5.1 *1) dF_p est linéaire ;*

2) Si $M \xrightarrow{F} N \xrightarrow{G} W$, alors $d(G \circ F) = dG_{F(p)} \circ dF_p$;

3) Si $X \in T_pM$ est le vecteur représenté par une courbe γ, i.e. $X = X_{\gamma,0}$, alors $dF_p(X) \in T_{F(p)}N$ est le vecteur représenté par la courbe $F \circ \gamma$:

$$dF_p(\dot\gamma(0)) = (F \circ \gamma)^{\cdot}(0).$$

Preuve Exercice (ce sont des vérifications). $\square$

Proposition 3.5.2 *Supposons que $x^1, \cdots, x^m$ sont des coordonnées au voisinage de p, et $y^1, \cdots, y^n$ sont des coordonnées dans un voisinage de q. Notons $F^j = y^j \circ F$. Alors l'application linéaire dF_p admet pour matrice la matrice jacobienne*

$$dF_p = \left(\frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p)\right).$$

Preuve Posons $Y_i = dF_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \in T_qN$ et développons ce vecteur dans la base $\frac{\partial}{\partial y^j}$:

$$Y_i = \sum_{j=1}^{m} a_i^j \frac{\partial}{\partial y^j},$$

Identifions les composantes a_i^j, on a :

$$a_i^j = Y_i(y^j) = dF_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)(y^j) = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (y^j \circ F) = \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p).$$

On a montré que

$$dF_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}.$$

$\square$

Définition. Soit $F : M^m \to N^n$ une application différentiable. Le *rang de F au point p* est défíni par

$$\operatorname{rang}(F,p) = \operatorname{rang}(dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N) = \dim(\operatorname{Im}(dF_p).$$

La correspondance $p \mapsto \operatorname{rang}(F,p)$ est donc une fonction sur M à valeurs dans $\{0, \cdots, l\}$ où $l = \min(\dim(M), \dim(N))$.

Le théorème du rang constant dans $\mathbb{R}^n$ se généralise au contexte des variétés différentiables. Rappelons que ce théorème dit que toute application de classe C^1 dont le rang est constant au voisinage d'un point peut se linéariser dans un voisinage de ce point :

Théorème 3.5.3 (Théorème du rang constant) *Soit $F : M \to N$ une application de classe $C^k, k \geq 1$. Supposons que F est de rang constant $r = \operatorname{rang}(F, p_0)$ au voisinage U de $p_0 \in M$. Alors il existe des cartes $\phi_0 : U_0 \to V_0 \subset \mathbb{R}^n$ et $\phi_0' : U_0' \to V_0' \subset \mathbb{R}^n$ telles que*
1) $p_0 \in U_0 \subset U \subset M$ et $F(p) \in U_0' \subset N$;
2) L'application $\widetilde{F} = \phi_0' \circ F \circ \phi_0^{-1} : V_0 \to V_0'$ est donnée par

$$\widetilde{F}(x^1, \cdots, x^m) = \left(x^1, \cdots, x^r, 0 \cdots, 0\right).$$

De façon équivalente, $\widetilde{F}$ est donnée par

$$y^j = \begin{cases} x^j & si\ 1 \leq j \leq r \\ 0 & si\ (r+1) \leq j \leq n \end{cases}$$

C'est équivalent à dire que $\tilde{F}$ est linéaire de matrice

$$\begin{pmatrix} Id_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour prouver ce théorème on se ramène au cas d'une application entre ouverts de $\mathbb{R}^n$ par des cartes locales.

3.5.1 Sous-variétés s'une variété différentiable

Soit N une variété différentiable de dimension n.

Définition 3.5.1 Un sous-ensemble $M \subset N$ est une *sous-variété* si pour tout point $p \in M$, il existe une carte $\phi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ telle que $p \in U$ et $\phi(U \cap M) = \mathbb{R}^m \cap V$. De façon équivalente, si $p \in U$, alors $p \in M$ si et seulement si $\phi^j(p) = 0$ pour $j = m+1, m+2, \cdots, n$, où les ϕ^j sont les coordonnées de ϕ dans $\mathbb{R}^n$.

Remarques 3.5.2 1) $\phi^{m+1}(p) = \cdots = \phi^n(p) = 0$ sont des équations locales pour $M \subset N$.
2) Une sous variété est elle-même une variété, dont la dimension vaut m.
3) $k = n - m$ est la *codimension* de M dans N.
4) On peut parler de sous-variété d'une variété à bord N, avec quelques précautions si $M \cap \partial N \neq \emptyset$.
5) Si $k = n - m = 1$, on dit que M est une hypersurface.
6) On considère que ∂N est une hypersurface (donc une hypersurface est une sous-variété de codimension 1).
7) Une carte telle que $\phi(M \cap U) = \mathbb{R}^m \cap V$ se nomme une *carte redressante* pour la sous-variété.

Théorème 3.5.4 *Soit M et N deux variétés différentiables, et $F : M \to N$ une application C^∞. Alors*

1. *Si* $\mathrm{rang}(F) = k$ *au voisinage de $p \in M$, alors il existe un voisinage U de p tel que $F(U)$ est une sous-variété de N, de dimension k.*
2. *Si* $\mathrm{rang}(F) = k$ *dans un voisinage de $S = F^{-1}(q)$, $q \in N$, alors S est une sous-variété de codimension k de M.*

Preuve du théorème : Il faut construire des cartes redressantes. Or ces cartes sont données par le théorème du rang constant.

□

Définition 3.5.3 (i) F est une *submersion* si $\mathrm{rang}(F, p) = n$ pour tout point $p \in M$, c'est-à-dire si dF_p est surjective en tout point. On a alors nécessairement $m \geq n$.
(ii) F est une immersion si $\mathrm{rang}(F, p) = m$ pour tout point $p \in M$, c'est-à-dire si dF_p est injective en tout point. On a alors nécessairement $m \leq n$.
(iii) F est un *plongement* si F est une immersion et F est un homéomorphisme sur son image.

Théorème 3.5.5 *1) Si F est une submersion, alors $F^{-1}(q)$ est une sous-variété de codimension n pour tout $q \in N$* [1]*.*
2) Si F est une immersion, alors "$F(M)$ est localement une sous-variété", i.e. pour tout point dans M, il existe un voisinage U de p tel que $F(U) \subset N$ est une sous-variété.
3) Si F est une immersion et que F est injective et propre, alors $F(M)$ est une sous-variété, et $F : M \to N$ est un difféomorphisme.

Preuve Se déduit du théorème précédent (avec un peu de topologie pour le point (3)). On peut aussi déduire la preuve directement du théorème du rang constant. □

1. Si $q \notin F(M)$, alors cette variété est l'ensemble vide.

3.6 L'espace cotangent

Définition. Soit M une variété différentiable de dimension m et p un point de M. L'espace cotangent à M en p est le dual de l'espace tangent. On le note

$$T_p^*M = \mathrm{Hom}(T_pM, \mathbb{R})$$

Un élément $\theta \in T_p^*M$ s'appelle un *vecteur cotangent* ou un *covecteur* en p.

Exemple. Si f est une fonction C^1 définie au voisinage de p, on définit un covecteur $df_p \in T_p^*M$ par

$$df_p(X) = X(f).$$

Ce covecteur s'appelle la *différentielle* de f en p. On le note parfois d_pf. Observons que si le vecteur $X = X_{\dot\gamma(0)} \in T_pM$ est représenté par la courbe $\gamma : (-1,1) \to M$, alors

$$df_p(v) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\gamma(t)).$$

Remarque. Pour être cohérent avec les définitions du paragraphe précédent, la différentielle d'une fonction $f \in C^1(M)$ devrait être une application linéaire $df_p : T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R}$. Toutefois on a l'identification canonique $T_q\mathbb{R} = \mathbb{R}$ pour tout $q \in \mathbb{R}$, il est donc naturel de regarder la différentiellle d'une fonction comme une application linéaire $df_p : T_pM \to \mathbb{R}$.

Proposition 3.6.1 *Soit M une variété différentiable et p un point de M.*

(a) Si $x^1, x^2, \dots, x^m$ est un système de coordonnées locales au voisinage de p (associé à une carte (U,φ)), alors $dx_p^1, dx_p^2, \dots dx_p^m$ est une base de T_p^*M.

(b) La différentielle d'une fonction $f \in C^1(M)$ en p s'écrit dans cette base sous la forme :

$$df_p = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) dx_p^i \quad \in \; T_p^*M. \tag{3.3}$$

Preuve (a.) Si on se donne une carte (U,ϕ) au voisinage de p, alors les coordonnées associées sont des fonctions différentiables x^i définies sur l'ouvert U (ça n'est rien d'autre qu'une autre notation pour la composante ϕ^i de ϕ). La différentielle en p de x^i est donc un covecteur $dx_p^i \in T_p^*M$. C'est le covecteur défini par

$$dx_p^i(X) = X(x^i).$$

On observe que

$$dx_p^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j, \tag{3.4}$$

cette relation montre que les covecteurs $dx_p^1, dx_p^2, \dots dx_p^m$ sont linéairement indépendants. Il forment donc une base de T_p^*M car $\dim(T_p^*M) = \dim(T_pM) = m$. Cette relation montre aussi que les bases $\{dx_p^i\}$ et $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ sont en dualité.

(b.) Il suffit de vérifier (3.3) sur les vecteurs de base de T_pM. Or on a en effet

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \cdot dx_p^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \cdot \delta^i_j = \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) = df_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right).$$

□

Remarques.

(a) Si le point p, a été fixé, alors on note simplement $dx^i_p = dx^i$.
(b) Si $y^1, \dots y^n$ est un autre système de coordonnées au voisinage de p, alors on a les relations

$$dy^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial y^i} = \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial x^j}, \tag{3.5}$$

où on a utilisé la convention de sommation (on somme de 1 à m sur les indices répétés). Ces formules sont à connaître par coeur, elles font apparaître la matrice jacobienne du changement de coordonnées comme matrice de changement de base sur l'espace tangent.

Corollaire 3.6.2 *Tout élément $\theta \in T^*_p M$ est la différentielle en p d'une fonction $f \in C^\infty$.*

Preuve Soit $\theta \in T^*_p M$. Dans un système de coordonnées x^i sur un voisinage ouvert $U \subset M$ de p on peut écrire $\theta = \sum_{i=1}^m a_i dx^i$. Soit $\eta \in C^\infty(M)$ une fonction plateau à support compact qui vaut 1 au voisinage de p. Alors $f = \eta \cdot \sum_{i=1}^m a_i x^i \in C^\infty(M)$ vérifie $df_p = \theta$. □

3.7 Partitions de l'unité et plongement de Whitney

3.7.1 Partitions de l'Unité

Les partitions de l'unité sont un outil qui permet des recollements sur une variété d'objets initialement construits dans $\mathbb{R}^n$ (dans une carte). Elles permettront par exemple, de définir l'intégrale d'une forme différentielle sur toute variété orientable.

Avant de les définir, faisons un peu de topologie. Soit donc M un espace topologique quelconque.

Définition 3.7.1 a.) Un *recouvrement ouvert* de M est une famille $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ d'ouverts U_α de M dont la réunion recouvre M : $\cup_\alpha U_\alpha = M$.

b.) Le recouvrement $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ est dit plus *fin* que le recouvrement $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in B}$ si pour tout $\beta \in B$, il existe $\alpha \in A$ avec $U_\alpha \subset V_\beta$. On dit aussi que $\mathcal{V}$ est plus *grossier* que $\mathcal{U}$ et on note $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$.

c.) Une collection $\mathcal{F} = \{F_\gamma\}_{\gamma \in C}$ de sous-ensembles de M est *localement finie* si tout point $p \in M$ admet un voisinage W qui intersecte un nombre fini d'éléments de $\mathcal{F}$. En d'autres termes, l'ensemble $\{\gamma \in C \mid F_\gamma \cap W \neq \emptyset\}$ est de cardinal fini.

Commençons par un énoncé simple sur les partitions de l'unité.

Théorème 3.7.1 *Soit $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un recouvrement localement fini de la variété différentiable M. Supposons que $\overline{U}_\alpha$ est compact pour tout $\alpha \in A$, alors il existe une famille $\{\eta_\alpha\}$ de fonctions différentiables sur M telle que*

i.) $\eta_\alpha \in C^\infty$ *et* $0 \leq \eta_\alpha(x) \leq 1$ *pour tout* $x \in M$,

ii.) $\mathrm{supp}(\eta_\alpha) \subset U_\alpha$,

iii.) $\displaystyle\sum_\alpha \eta_\alpha(x) = 1$ *pour tout* $x \in M$.

Preuve Un résultat de topologie nous dit que sous les hypothèses mentionnées, il existe un sous recouvrement $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ tel que $\overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$. Donnons nous de plus pour tout $\alpha \in A$ une fonction plateau non négative $g_\alpha \in C^\infty(M)$ telle que $g_\alpha|_{\overline{V}_\alpha} = 1$ et $\mathrm{supp}(g_\alpha) \subset U_\alpha$. La fonction

$$g(x) = \sum_{\alpha \in A} g_\alpha(x)$$

est bien définie, C^∞ et partout positive, car nous avons supposé que $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ est un recouvrement localement fini de M. Les fonctions η_α définies par

$$\eta_\alpha = \frac{g_\alpha(x)}{g(x)}$$

ont les propriétés voulues. $\square$

3.7.2 Théorème de plongement de Whitney

Théorème 3.7.2 *Toute variété différentiable se plonge de façon différentiable dans un espace euclidien.*

Preuve On fait la preuve dans le cas compact, mais les arguments ne changent pas en substance (dans le cas général, il faut employer un atlas localement fini au lieu d'un atlas fini). Soit donc M une variété différentiable compacte de dimension m et donnons nous un atlas fini $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i=1,\cdots,k}$. Soit $\{\eta_i\}$ une partition de l'unité associée à cet atlas.

Pour tout $i = 1, \cdots, k$, on définit une application $\psi : M \to \mathbb{R}^m$ par

$$\psi(x) = \begin{cases} \eta_i(x)\cdot\phi_i(x) & \text{si } x \in U_i, \\ 0 & \text{si } x \notin U_i. \end{cases}$$

Alors ψ est bien défini et de classe C^∞. On définit ensuite l'application suivante $F : M \to \mathbb{R}^N$ avec $N = k(m+1)$:

$$F(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x), \cdots, \psi_k(x), \eta_1(x), \cdots, \eta_k(x)).$$

Qui est clairement bien définie et C^∞. Montrons que F est injective ; en effet, supposons que $F(x) = F(y)$, alors en particulier, $\eta_j(x) = \eta_j(y)$ pour tout $j = 1, \cdots, k$. Or, il existe j_0 tel que $\eta_{j_0}(x) \neq 0$, donc $\eta_{j_0}(y) \neq 0$ et par conséquent $x, y \in U_{j_0}$. Ainsi

$$\phi_{j_0}(x) = \frac{\psi_{j_0}(x)}{\eta_{j_0}(x)} = \frac{\psi_{j_0}(y)}{\eta_{j_0}(y)} = \phi_{j_0}(y),$$

ce qui implique que $x = y$ puisque ϕ_{j_0} est un homéomorphisme de U_{j_0} sur son image (en particulier ϕ_{j_0} est injectif).

Montrons que F est une immersion. Montrons que pour tout point $x \in M$ et pour tout vecteur $v \in T_xM$, si $dF_x(v) = 0$ alors $v = 0$. Comme $\{\eta_i\}$ une partition de l'unité il existe i tel que $\eta_i(x) \neq 0$, en particulier $x \in U_i$. La condition $dF_x(v) = 0$ entraîne en particulier que

$$d\psi_{i,x}(v) = 0 \in \mathbb{R}^m \quad \text{et} \quad d\eta_{i,x}(v) = 0 \in \mathbb{R}.$$

On a donc

$$0 = d\psi_{i,x}(v) = d(\eta_i(x)\phi_i)_x(v) = \eta_i(x)d\phi_{i,x}(v) + \phi_i(v)d\eta_{i,x}(v) = \eta_i(x)d\phi_{i,x}(v).$$

Donc $d\phi_{i,x}(v) = 0$ car $\eta_i(x) \neq 0$. Comme $\phi_j : U_j \to \mathbb{R}^n$ est une immersion on conclut que $v = 0$. Ainsi, $F : M \to \mathbb{R}^N$ est une immersion injective, c'est donc un plongement par compacité de M. $\square$