

Déroulement de l'examen du cours de variétés différentiables 2014.

Vendredi 26 janvier de 16h15 à 19h15 dans la salle **MAA110**. C'est un examen écrit qui dure 3h.

Voici ce qu'il faut savoir pour cet examen :

1) Calcul différentiel

- (i) Fonctions et applications de classe C^k et C^∞ . Matrice Jacobienne et Jacobien, difféomorphisme et difféomorphisme local, la notion de système de coordonnées. Théorème d'inversion locale.
- (ii) La notion de sous-variété de \mathbb{R}^n
- (iii) Différentiabilité au sens de Frechet, avec propriétés principales.
- (iv) Théorème du rang constant et théorème des fonctions implicites. item L'espace tangent et le fibré tangent à une sous-variété.

2) Variétés topologiques

- (i) Savoir définir précisément ce qu'est une variété topologique (à bord), expliquer le vocabulaire.
- (ii) Donner des exemples.
- (iii) Construction de variétés par "par recollement". Somme connexe.
- (iv) Savoir énoncer le théorème de classification des surfaces (sans la preuve).

3) Variétés différentiables et fonctions différentiables

- (i) Savoir définir précisément ce qu'est une variété différentiable. Maîtriser le vocabulaire.
- (ii) Donner des exemples.
- (iii) Définir les fonctions différentiables. Fonctions plateau (prouver l'existence).
- (iv) Partitions de l'unité (énoncé mais sans la preuve).
- (v) Le lemme de Hadamard (énoncé et preuve).

4) Espaces tangent et cotangent

- (i) Savoir définir les notions de vecteur tangent, faire le lien avec les classe d'équivalence de courbes.
- (ii) Construire une base de l'espace tangent associée à un système de coordonnées (prouver que $\dim T_p M = \dim M$).
- (iii) Définir la différentielle d'une fonction en un point et l'espace cotangent.
- (iv) Savoir écrire les changement de base pour $T_p M$ et $T_p^* M$ associés à deux systèmes de coordonnées.
- (v) Dérivations globales et crochets de Lie. La notion d'algèbre de Lie.

5) Applications différentiables

- (i) Donner deux définitions des applications différentiables $F : M \rightarrow N$ entre deux variétés.
- (ii) Difféomorphisme.
- (iii) Différentielle d'une application. Rang d'une application.
- (iv) Théorème d'inversion locale et théorème des fonctions implicites dans le cadre des variétés.

- (v) immersion, plongement et submersion (savoir définir et donner des exemples).
- 6) Champs de vecteurs et flots
- (i) Définir les notions de champ de vecteurs, de courbe intégrale et de flot.
 - (ii) Lien entre champs de vecteurs et flots.
- 7) Formes différentielle
- (i) Champs de tenseurs covariants et produit tensoriel
 - (ii) Formes différentielles et produit extérieur.
 - (iii) Rappel des formes différentielles par une application, dérivée extérieure, intégration des formes différentielle.
 - (iv) Formule de Stokes, énoncé, preuve, applications.
 - (v) Formes fermées, exactes, cohomologie.