

2.1 Cinématique

2.1.1 But du Chapitre ; Transformations actives et passives

La tâche du robot étant de déplacer des objets, il s'agit de décrire précisément la géométrie de tels déplacements. C'est le sujet de la cinématique, c'est à dire de la science de **la géométrie des mouvements**, sans tenir compte des forces. "Mouvement" est défini dans notre contexte comme **changement de position**. L'étude de l'effet des forces sur les mouvements, décrit par les équations différentielles (**Newton-Euler ou Lagrange**), est le domaine de la dynamique. Ce sont les équations du mouvement (Bewegungs-Differentialgleichungen, equations of motion). La connaissance des solutions de ces équations permettra de mettre au point la commande "optimale" du robot.

Variables Robot – Variables opérationnelles

Tout robot est contrôlé par des consignes angulaires ou linéaires envoyées aux actionneurs (moteurs). Ces variables sont appelées « **variables robot** » ou « **joint variables** » en anglais (« joint » signifiant « articulation »). Ces variables définissent le « **joint space** ». Le nombre n de ces variables correspond au nombre de **degrés de liberté (degrees of freedom)** du robot. Nous utiliserons pour ces variables les notations

$$\{ q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n \} \quad \text{ou} \quad \{ \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i, \dots, \theta_n \}$$

La tâche du robot, elle, se décrit dans d'autres variables, indépendantes du robot utilisé. Par exemple, dans le cas d'un assemblage, il peut s'agir de coordonnées cartésiennes liées à une platine à assembler, donnant la position cible d'une composante à monter.

Ces variables décrivent donc l'opération à effectuer par le robot, on les appelle « **variables opérationnelles** ». En anglais, on parle de « **operational space** » ou, quelque fois aussi, de « **world coordinates** »

Pour définir la position et l'orientation d'un objet (rigide), nous avons besoin en général de ses six coordonnées (trois pour la position d'un point, par ex. du centre de masse, et trois pour définir l'orientation dans l'espace).

La tâche de la cinématique sera, d'établir les liens entre les variables robot et les variables opérationnelles. Par exemple, l'expression des coordonnées opérationnelles en fonction des variables robot est appelée « **Modèle Géométrique Direct** » (« **Forward Kinematics** » en anglais). Il s'agit donc de la position de la « main » ou de l'outil du robot (end-effector) en fonction de ses positions articulaires. La fonction inverse est le « **Modèle Géométrique Indirect** » (**Backward Kinematics**), donc les positions articulaires en fonction de la posture opérationnelle désirée. Le but principal de ce chapitre est d'établir et d'étudier ces deux fonctions multivariées essentielles en robotique.

La cinématique est également nécessaire à l'établissement du **modèle dynamique (équations du mouvement)** utilisé pour le dimensionnement de la mécanique, la conception de l'entraînement et finalement le contrôle du robot.

Parmi toutes ces démarches, la cinématique s'avère souvent la plus difficile. Elle nous occupera donc un temps substantiel. Décrire la cinématique d'un système multi-corps (par ex. d'un robot) peut représenter 80% de l'effort dans l'établissement du modèle dynamique. La cinématique à elle seule pourrait bien nous occuper pendant un semestre entier!

Une des sources de difficulté dans la cinématique est le fait de devoir travailler souvent avec des référentiels (systèmes de coordonnées) multiples, par ex. des **référentiels fixes** et des

référentiels solidaires au corps en mouvement, donc mobiles. Il en découle la nécessité d'étudier des changements de référentiels d'un objet fixe ou, au contraire, des changements de position d'un objet par rapport à un référentiel fixe.

Le premier cas (changement de référentiel) est appelé **transformation passive**, le second cas (mouvement de l'objet réel) **transformation active**, les deux types de transformations étant évidemment étroitement liés mathématiquement. (Gruber p.89)

Dans les trois premières sections, nous nous limitons aux **transformations actives**. Ceci facilite le traitement considérablement, ne serait-ce que par l'omission des indexes multiples qui caractérisent tant de livres sur la robotique. Une fois la compréhension de base acquise, des référentiels multiples adaptés au problème concret seront également introduits et utilisés.

Dans ces mêmes premières sections nous traitons uniquement la géométrie du mouvement, **sans nous préoccuper du temps, donc ni de vitesse, ni d'accélération.**

2.1.2 Translations et rotations 2D autour de l'origine

On distingue **deux types de changement de position** d'un **objet solide** (caractérisé par des distances invariables entre les points le constituant): Translation et rotation.

La **translation** est définie par un seul et même **vecteur \underline{t}** de déplacement valable pour tous les points du solide.

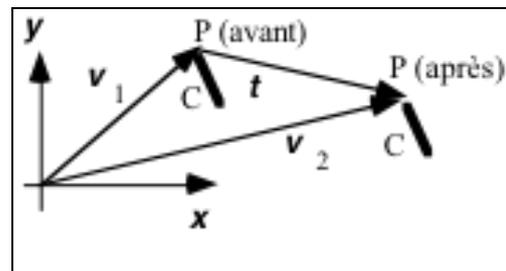
La **rotation** est définie par un **axe fixe** (pas nécessairement lié à l'objet) ainsi qu'un **angle de rotation** autour de cet axe. (Rappel du cours « Statique et Dynamique » : Où se trouve l'axe fixe d'une roue ayant roulé d'une distance d ?)

La description mathématique de ces changements de position se fait de façon suivante: Les points de l'objet sont décrits par des vecteurs de position dans un référentiel fixe. Nous utilisons le plus souvent un référentiel cartésien avec les trois axes x , y , z et l'origine O . Le changement de position d'un point décrit par un vecteur \underline{v}_1 aura pour effet de modifier le vecteur de position. Le vecteur donnant la nouvelle position soit appelé \underline{v}_2 .

La translation est triviale. Les vecteurs de tous les points du corps solide C se transforment par la même formule:

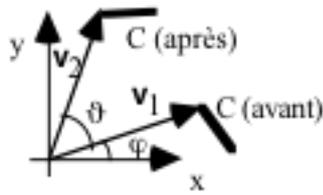
$$\underline{v}_2 = \underline{v}_1 + \underline{t} \quad (1)$$

Fig. 1 Translation du point P de la position \underline{v}_1 à la position \underline{v}_2 . Cette translation est valable pour tous les points de C



Dans le cas de mouvements dans le plan (2D), l'**axe** de rotation est toujours en direction z . Les coordonnées x_c et y_c de cet axe définissent le **centre de rotation** dans le plan. Il nous faut également définir un troisième paramètre, l'angle de rotation ϑ

Une rotation d'un objet autour de l'origine d'un angle ϑ modifiera les vecteurs de position de n'importe quel point fixé à l'objet de la façon suivante:



$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos(\varphi + \vartheta) \\ r \sin(\varphi + \vartheta) \end{bmatrix} \quad (2)$$

Fig. 2 Rotation

En utilisant les coordonnées polaires (r, φ) cette rotation est triviale. Pour passer directement de $[x_1, y_1]$ à $[x_2, y_2]$ en coordonnées cartésiennes, sans devoir calculer (r, φ) à partir de $[x_1, y_1]$, les théorèmes trigonométriques suivants seront utiles:

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \end{aligned} \quad (3)$$

En les appliquant à (2), on obtient les coordonnées de \mathbf{v}_2 exprimées en composants de \mathbf{v}_1 .

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos(\varphi + \vartheta) \\ r \sin(\varphi + \vartheta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \cos \vartheta - r \sin \varphi \sin \vartheta \\ r \cos \varphi \sin \vartheta + r \sin \varphi \cos \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (4)$$

Nous avons donc trouvé une représentation de cette rotation par multiplication matricielle du vecteur \mathbf{v}_1 avec une matrice de rotation \mathbf{R} dépendant uniquement de l'angle de rotation ϑ :

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{R} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \quad (5)$$

Exercices 1:

1a) $\mathbf{R}(\vartheta=0) = ?$

1b) $\mathbf{R}(-\vartheta) = ?$

1c) $\mathbf{R}(\vartheta)^{-1} = ? \quad \mathbf{R}^T$ (6)

1d) $\mathbf{v}_3 = \mathbf{R}(\vartheta_2)\mathbf{v}_2 = \mathbf{R}(\vartheta_2)\mathbf{R}(\vartheta_1)\mathbf{v}_1 = \mathbf{R}(?)\mathbf{v}_1$? (7)

1e) $\mathbf{R}(\vartheta_2)\mathbf{R}(\vartheta_1) = \mathbf{R}(\vartheta_1)\mathbf{R}(\vartheta_2)$?

En transformant les deux vecteurs $[1,0]^T$ et $[0,1]^T$, on constate que les colonnes de \mathbf{R} forment elles-mêmes un repère orthogonal tourné de ϑ par rapport au repère cartésien d'origine. La condition que le volume (ou, dans le cas 2D, la surface) de l'objet transformé reste constante est liée à la valeur du déterminant $\|\mathbf{R}\| = 1$, l'orthogonalité géométrique du nouveau repère est liée à l'orthogonalité des colonnes ($\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$). Ces conditions impliquent $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ (matrices orthogonales).

Les petits exercices illustrent les concepts d'identité, d'inversion, d'orthogonalité, d'enchaînement et de commutativité pour le cas de rotations autour de l'origine. Ces concepts sont nécessaires pour introduire les rotations autour de centres arbitraires. Dans ce but, des mouvements combinés composés de rotations et de translations sont introduits.

2.1.3 Combinaison de rotations et translations 2D; représentation homogène

Un **mouvement général dans le plan** peut être décrit par une combinaison de translations et de rotations autour de l'origine. Un enchaînement de translations et de rotations se heurte au fait que la translation est une addition vectorielle tandis que la rotation est une multiplication matricielle.

Il serait très souhaitable, de pouvoir intégrer rotation et translation dans une seule opération afin de pouvoir les enchaîner. Les **matrices homogènes** permettent cette intégration de la translation à la matrice de transformation. Le prix à payer est d'augmenter l'ordre de la matrice de un. Le vecteur de translation \mathbf{t} s'ajoute à droite et une ligne $[0 \ 0 \ 1]$ en bas :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & t_x \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Ceci est la matrice **homogène** des transformations dans un espace à deux dimensions (un plan), la troisième ligne n'a aucune signification spatiale (pas d'axe z pour le moment!!). Cette matrice agit sur un **vecteur homogène** dans un espace à deux dimensions qui se compose de ses deux coordonnées plus un "**facteur d'échelle**" égale à un :

$$\mathbf{v} = [x, y, 1]^T$$

Pour retrouver les vecteurs familiers, il suffit de supprimer le dernier élément. Les matrices et vecteurs homogènes pour **trois dimensions** contiennent **quatre éléments**.

Exemple d'utilisation: Imaginons un mouvement du point \mathbf{v}_1 en deux phases composé de

- 1.) rotation (toujours autour de l'origine O pour toute cette section 2.1.2) d'un angle ϑ_1
- 2.) translation de \mathbf{t}_1

pour obtenir $\mathbf{v}_2 = \mathbf{R}(\vartheta_1) \mathbf{v}_1 + \mathbf{t}_1$

Appliquons de nouveau un mouvement composé de deux phases ($\mathbf{R}(\vartheta_2), \mathbf{t}_2$) à \mathbf{v}_2 :

- 3.) rotation autour de l'origine O d'un angle ϑ_2
- 4.) translation de \mathbf{t}_2

pour finalement obtenir \mathbf{v}_3 :

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{R}(\vartheta_2) \mathbf{v}_2 + \mathbf{t}_2 = \mathbf{R}(\vartheta_2) \mathbf{R}(\vartheta_1) \mathbf{v}_1 + \mathbf{R}(\vartheta_2) \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 \quad (9)$$

Ces quatre mouvements qui se suivent ($\mathbf{R}(\vartheta_1), \mathbf{t}_1, \mathbf{R}(\vartheta_2), \mathbf{t}_2$) peuvent s'exprimer dans une seule matrice homogène qui se calcule simplement par produit matriciel.

Exercice 2: Effectuer cette opération avec l'aide de deux matrices homogènes. Calculer la matrice homogène de l'opération complète par produit matriciel. Ce résultat contiendra la translation totale et la rotation totale équivalente aux quatre mouvements.

Nous constatons que la **rotation** $\mathbf{R}(\vartheta_2) \mathbf{R}(\vartheta_1)$ est équivalente à $\mathbf{R}(\vartheta_1 + \vartheta_2)$ et la **translation** totale est égale à $\mathbf{R}(\vartheta_2) \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2$:

$$\mathbf{R}(\text{tot}) = \mathbf{R}(\vartheta_1 + \vartheta_2) \quad \text{et} \quad \mathbf{t}(\text{tot}) = \mathbf{R}(\vartheta_2) \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2$$

Exercices 3: Donnez les matrices homogènes des mouvements suivants:

- 3a) Translation pure? Rotation pure? Identité?
- 3b) Translation de \mathbf{t} puis rotation de ϑ ?
- 3c) Opération inverse de 3b), c'est à dire rotation de $-\vartheta$ puis translation de $-\mathbf{t}$?

2.1.4 Rotations 2D autour d'un point arbitraire

Ces préparations nous permettent d'aborder le mouvement général dans le plan, la rotation autour d'un point \mathbf{p} arbitraire. Ceci est simplement réalisé en effectuant

- 1) une translation de \mathbf{p} vers l'origine $\mathbf{t}_1 = -\mathbf{p}$
- 2) une rotation autour de l'origine O comme avant
- 3) une translation ramenant le centre de rotation à \mathbf{p} $\mathbf{t}_2 = \mathbf{p}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -p_x \\ 0 & 1 & -p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p} - \mathbf{R}\mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Cette expression nous montre qu'une rotation autour du point \mathbf{p} est équivalente à une rotation autour de l'origine O suivi d'une translation $\mathbf{p} - \mathbf{R}\mathbf{p}$. A l'inverse, toute combinaison de translation et rotation peut être exprimée en rotation pure autour d'un centre de rotation \mathbf{p} .

Exercices 4:

- 4a) Le paragraphe précédent est-il entièrement correct?
- 4b) Trouver le centre de rotation 1.) par un dessin, 2.) à l'aide de la formule précédente 3.) en cherchant un vecteur propre de la matrice homogène.
- 4c) Trouver la matrice homogène qui décrit une rotation de 60° autour d'O
- 4d) Trouver la matrice homogène qui décrit une translation de un en direction x , puis une rotation de 60° autour d'O
- 4e) Trouver la matrice homogène qui décrit une rotation de 60° autour de $[1,1]^T$.
- 4.f) Un objet avec deux points $\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1$ est déplacé de sorte que ces points se retrouvent aux locations $\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2$.

$$\mathbf{v}_1 = [1,0]^T, \mathbf{w}_1 = [1,1]^T, \quad \mathbf{v}_2 = 0.5 [1-\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}]^T, \mathbf{w}_2 = 0.5 [2-\sqrt{3}, 1]^T$$

Trouver la matrice homogène, ϑ, \mathbf{p} (solution graphique) qui décrit ce déplacement.

2.1.5 Rotations 3D autour de l'origine: Axe de rot., quaternions

Dans trois dimensions, il ne suffit plus d'indiquer un angle et un centre de rotation. Il nous faut également définir la **direction de l'axe** autour de laquelle la rotation est à effectuer. Le pas à franchir entre deux et trois dimensions est considérable, surtout au niveau de l'imagination et du sens géométrique.

Le nombre de paramètres de l'orientation d'un objet dans l'espace est trois: La direction de l'axe est définie par deux paramètres seulement, par exemple longitude et latitude en coordonnées sphérique. Le troisième paramètre est l'angle de rotation autour de l'axe. Si l'axe de rotation est donnée par un vecteur (trois paramètres), la longueur de ce vecteur est redondante. Nous avons donc quatre paramètres, le vecteur de l'axe et l'angle de rotation, et une contrainte, par exemple limitant la longueur du vecteur à 1. Nous retrouvons ainsi les trois paramètres libres de l'orientation spatiale.

Il existe plusieurs façons de choisir ces trois paramètres de l'orientation spatiale. En général, il s'agit d'angles de rotation autour de trois axes définis en fonction de l'application (axes mobiles, tangage, roulis, lacet, angles d'Euler, axes fixes x,y,z , etc.). Nous verrons plusieurs exemples ultérieurement.

Nous avons déjà vu une méthode (redondante) à définir la rotation dans le plan: la matrice de rotation $\mathbf{R}(\vartheta)$ compte quatre éléments, mais seulement un paramètre libre, l'angle ϑ lui-même, puisque l'axe de rotation est toujours la normale au plan. Les éléments de la matrice de rotation sont appelés **cosinus directeurs**. Une matrice de cosinus directeurs tridimensionnelle contient 9 éléments. Nous allons maintenant trouver cette matrice.

Pour faciliter la compréhension, nous commençons avec de simples vecteurs et matrices à trois dimensions et passerons ensuite (section 2.1.6) à la représentation homogène. Cette dernière sera caractérisée par des vecteurs de quatre éléments et des matrices 4 fois 4. Donc, dans cette section-ci (2.1.5), aucun vecteur et aucune matrice n'est en représentation homogène, les trois éléments sont maintenant les trois coordonnées spatiales cartésiennes x , y et z .

Nous connaissons en principe déjà une matrice de rotation spéciale dans l'espace 3D: Celle des rotations autour de l'axe z , $\mathbf{R}(\vartheta, \mathbf{v}_z)$. La coordonnée z reste insensible à une telle rotation. Ceci permet de trouver $\mathbf{R}(\vartheta, \mathbf{v}_z)$. Dans cette notation, l'axe de rotation est donnée par le vecteur $\mathbf{v}_z = [0 \ 0 \ 1]^T$ et l'angle de rotation autour de cet axe est ϑ .

Exercice 5 Trouver les matrices de rotations autour des trois axes x,y,z ; Solutions :

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_y = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & 0 & \sin \vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ces matrices se trouvent en transformant les vecteurs unitaires \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y et \mathbf{e}_z .

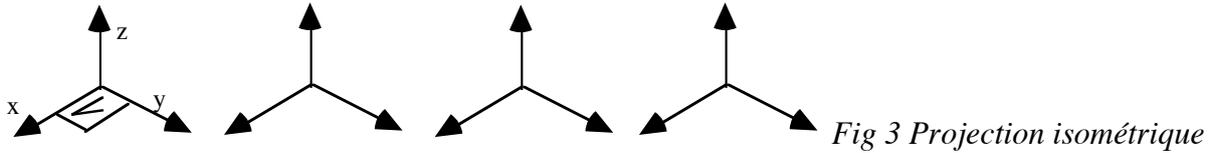
Exercice 6 Les deux séquences suivantes sont-elles équivalentes?

a): rotation de 90° autour de z , puis rotation de 90° autour de y

b): rotation de 90° autour de y , puis rotation de 90° autour de z

Trouver la solution 1.) par essai, 2.) par multiplication matricielle. Donnez les matrices de rotation de 6a) et de 6b):

Exercice 7 Trouvez les axes et les angles de rotation de A et de B de l'exercice 6.) à l'aide du dessin suivant:



Cet exemple illustre que **tout changement d'orientation spatiale** peut être vu de **deux façons équivalentes**:

- 1.) Composé de plusieurs rotations autour de **plusieurs axes spéciaux** (par ex. axes du repère x,y,z ou axes définis par rapport au véhicule: tangage roulis lacet, angles cardaniques, angles d'Euler etc. Dans de tels cas, avec des axes en mouvement, le traitement peut devenir lourd)
- 2.) **Une unique rotation autour d'un seul axe**

Il n'est pas toujours facile de deviner la direction de cet axe. Mathématiquement, on peut trouver cet axe v par exemple par la condition qu'un point sur l'axe ne change pas de position: $Rv = v$ (vecteur propre).

Lequel des trois vecteurs propres faut-il choisir? Exemple de résultat de calcul de MATLAB:

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	<p>La commande <code>[V,d] = eig(A)</code> rends les vecteurs propres dans la matrice V et les valeurs propres sur la diagonale de la matrice d</p>
$V = \begin{bmatrix} -0.05 - 0.57i & -0.05 + 0.57i & 0.57 \\ -0.47 + 0.32i & -0.47 - 0.32i & 0.57 \\ 0.52 + 0.24i & 0.52 - 0.24i & 0.57 \end{bmatrix}$	$d = \begin{bmatrix} -0.50 + 0.86i & 0 & 0 \\ 0 & -0.50 - 0.86i & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$

Exercice 8a) Trouvez la matrice de cosinus directeurs d'une rotation autour d'un axe w d'un angle θ qui se trouve dans le plan $x=0$ et qui est incliné d'un angle ϕ par rapport à l'axe z (Fig 4):

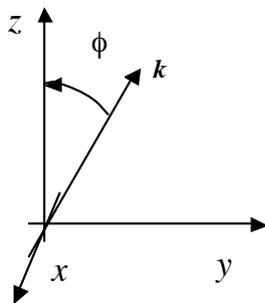


Fig. 4 Trouvez la matrice d'une rotation autour de l'axe w

- Une méthode facilement compréhensible de trouver l'angle de rotation une fois que l'axe est trouvée consiste à
- 1.) construire un vecteur k perpendiculaire à l'axe
 - 2.) transformer ce vecteur $k_2 = Rk$
 - 3.) déterminer l'angle entre k_2 et k .

Les formules (10) et (11) plus complètes pour passer de la représentation (axe/angle) à la matrice de cosinus directeurs et vice et versa sont données dans la littérature, par ex. [J. J Craig, Introduction to Robotics, Addison Wesley 1989, p 52] et dérivées par ex. dans [Dombre & Khalil: Modélisation et commande des robots, Hermès, 1988, pp 53]. Les voici:

Pour une rotation d'un angle ϑ autour de l'axe $[x,y,z]^T$ avec $\|[x,y,z]^T\| = 1$ on obtient la matrice

$$(1 - \cos \vartheta) \begin{bmatrix} xx & xy & xz \\ xy & yy & yz \\ xz & yz & zz \end{bmatrix} + \cos \vartheta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \sin \vartheta \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}$$

La formule suivante nous permet l'inverse, donc de trouver l'axe de rotation et l'angle à partir d'une matrice \mathbf{R} , et ce plus directement que par le vecteur propre:

$$\text{avec } \mathbf{R} = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix} \text{ on obtient l'axe } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2 \sin(\vartheta)} \begin{bmatrix} f - h \\ g - c \\ b - d \end{bmatrix} \text{ et l'angle } \vartheta$$

$$\begin{aligned} \cos(\vartheta) &= \frac{1}{2}(\text{tr}(\mathbf{R}) - 1) \\ \sin(\vartheta) &= \frac{1}{2} \sqrt{(f - h)^2 + (g - c)^2 + (b - d)^2} \end{aligned} \quad (11)$$

Ces expressions sont non-unique: Le signe de la racine peut être positif ou négatif. Pire, pour $\vartheta=0$ l'axe n'est pas défini. Cela pose des problèmes numériques dans la réalisation du contrôle.

Ces deux inconvénients disparaissent de façon élégante en employant les **paramètres d'Euler** ou **quaternions** ou paramètres d'Olinde-Rodriguez. Ces trois expressions sont synonymes dans notre contexte. Les **angles d'Euler** sont d'autres paramètres, ils seront introduit à la section 2.1.8. Les paramètres d'Euler ou quaternions sont employés en robotique industrielle:

Rotations 3D autour de l'origine: Paramètres d'Euler, quaternions, paramètres d'Olinde-Rodriguez

Les quaternions sont une **généralisation des nombres complexes**. Ils ont été découvert par Hamilton après de longs et infructueux essais d'étendre l'interprétation géométrique des nombres complexes dans le plan (Argand, 1768-1822, mathématicien genevois) aux trois dimensions spatiales. L'intuition géniale de Hamilton consiste en deux astuces:

- 1.) Il n'y aura pas deux, mais trois parties imaginaires, en plus de la partie réelle.
- 2.) Il faut abandonner la commutativité de la multiplication.

Ces nouveaux nombres "hypercomplexes", dorénavant appelés quaternions, contiennent une partie réelle scalaire λ_0 et trois parties imaginaires $[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]^T$ qui sont interprétées comme partie vectorielle $\underline{\lambda}$.

le quaternion Q est donc le quadruple

$$Q = \{ \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \} = \{ \lambda_0, \underline{\lambda} \} \quad (11a)$$

La direction de l'axe de rotation $[x, y, z]^T$ est donnée par le vecteur $\underline{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]^T$.

L'angle de rotation ϑ est introduit de la façon suivante dans le quaternion Q:

$$\lambda_0 = \cos(\vartheta/2) \quad \text{et} \quad \underline{\lambda} = \sin(\vartheta/2) [x, y, z]^T, \quad \|x, y, z\|=1 \quad (11b)$$

Les rotations sont donc représentés par des quaternions **unitaires**:

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1 \quad (11c)$$

Les règles de multiplication des quaternions sont une généralisation des règles de multiplication des nombres complexes:

$$Q = \{ \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \} = \lambda_0 + i \lambda_1 + j \lambda_2 + k \lambda_3 \quad (11d)$$

$$\text{avec } i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \quad (11e)$$

$$\text{et } ij = k = -ji \quad jk = i = -kj \quad ki = j = -ik \quad (11f)$$

Notez la **multiplication non-commutative!** (William Rowan Hamilton, Dublin, 1843)

Ces règles mènent au produit

$$Q_M Q_L = \{ \underline{\mu}_0, \underline{\mu} \} \{ \underline{\lambda}_0, \underline{\lambda} \} = \{ \underline{\mu}_0 \underline{\lambda}_0 - \underline{\mu}^T \underline{\lambda}, \quad \underline{\mu}_0 \underline{\lambda} + \underline{\lambda}_0 \underline{\mu} + \underline{\mu} \times \underline{\lambda} \} \quad (11g)$$

Ce produit définit l'enchaînement des rotations Q_L puis Q_M .

Exercice 8b) Trouvez les solutions de l'exercice 7 avec des quaternions.

Le passage du quaternion aux cosinus directeurs et vice-versa est: (11h)

$$R = \begin{bmatrix} 2(\lambda_0^2 + \lambda_1^2) - 1 & 2(\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_0 \lambda_3) & 2(\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_0 \lambda_2) \\ 2(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_0 \lambda_3) & 2(\lambda_0^2 + \lambda_2^2) - 1 & 2(\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_1) \\ 2(\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_2) & 2(\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_0 \lambda_1) & 2(\lambda_0^2 + \lambda_3^2) - 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } \lambda_0 = \frac{1}{2} \sqrt{r_{11} + r_{22} + r_{33} + 1} \quad \underline{\lambda} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \text{sgn}(r_{32} - r_{23}) \sqrt{r_{11} - r_{22} - r_{33} + 1} \\ \text{sgn}(r_{13} - r_{31}) \sqrt{r_{22} - r_{11} - r_{33} + 1} \\ \text{sgn}(r_{21} - r_{12}) \sqrt{r_{33} - r_{22} - r_{11} + 1} \end{bmatrix} \quad (11i)$$

2.1.6 Translations et rotations 3D en représentation homogène

Ce pas est parfaitement analogue au cas 2D. Le vecteur en représentation homogène se compose simplement en ajoutant un facteur d'échelle "1" qui n'a aucune signification de "quatrième dimension" dans le sens géométrique. La matrice de transformation complète se compose de la matrice de rotation \mathbf{R} et du vecteur de translation \mathbf{t} plus une ligne [0 0 0 1]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3 \times 3} & \mathbf{t}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Une transformation combinée (rotation puis translation) se calcule en multipliant un vecteur de départ homogène par cette matrice de transformation pour obtenir le vecteur transformé, exactement comme dans le cas 2D. La transformation puis la rotation se trouve en multipliant les matrices appropriées entre elles, avec toujours la **matrice du premier changement de position à droite**.

Une rotation autour d'un axe ne passant pas par l'origine se compose de la même façon que dans le cas 2D:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{p}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p} - \mathbf{R}\mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

avec le vecteur \mathbf{p} de l'origine O à un point quelconque **sur l'axe de rotation**

Une différence importante avec le cas 2D est à noter: Le mouvement général en 3D est équivalent à une rotation autour d'un axe **plus une translation en direction de cet axe**. Cette combinaison s'appelle une vis (a screw, eine Schraube) pour des raisons évidentes.

Exercice 8c: Trouver la matrice de transformation menant les points

$$A = [1 \ 0 \ 0]^T, B = [0 \ 0 \ 0]^T \text{ et } C = [0 \ 1 \ 0]^T \text{ vers } A' = [1 \ 0 \ 1]^T, B' = [1 \ -1 \ 1]^T \text{ et } C' = [0 \ -1 \ 1]^T$$

Quels sont l'axe, l'angle de rotation, la translation en direction de l'axe? La solution se trouve facilement par un petit dessin. Imaginez les trois points liés à un solide.

2.1.7 Variables robots, modèle géométrique direct

Enfin, nous pouvons passer à l'application de ces transformations. Concrètement, il s'agit de décrire la position et l'orientation d'un objet manipulé par un robot. Le robot est commandé par des **variables articulaires**, c'est à dire en lui envoyant des **consignes angulaires** pour ses moteurs. Pour ces variables importantes nous utiliserons (comme dans plusieurs ouvrages en robotique) le symbole θ (thétha majuscule; Le symbole " q " est également souvent utilisé dans ce contexte.

Le **modèle géométrique direct (MGD)** n'est autre que les formules donnant position et orientation de l'objet manipulé en fonction de ces variables θ . Le nombre de variables θ correspond au nombre de degrés de liberté du robot. Certaines de ces variables peuvent être des **variables linéaires** et non angulaires, selon la construction du robot. Ces mêmes variables sont souvent également appelées **variables robots**.

Comme exemple, nous allons dériver le modèle géométrique direct (MGD) d'un robot industriel extrêmement répandu, le **SCARA** (Selective Compliance Assembly Robot Arm) présenté au chapitre 1. Le modèle géométrique de ce robot est particulièrement simple pour deux raisons:

Premièrement, il ne comprends que quatre degrés de liberté. Judicieusement choisis, ces degrés de liberté permettent de couvrir un très vaste segment des tâches d'assemblage.

Deuxièmement, les trois degrés de liberté angulaires sont tous autour d'un axe vertical, les mouvements hors du plan x-y se limitent à la seule translation verticale.

Ces conditions permettent de traiter la partie difficile, les rotations, du MGD du SCARA dans le plan x-y uniquement.

Le premier pas dans l'établissement de tout MGD consiste dans la **définition**

- des variables articulaires (variables robot) θ_i ,
- de leurs **positions de référence** $\theta_i = 0$ ainsi que
- **des paramètres géométriques du robots.**

Pour le SCARA, nous définissons donc θ_1 comme l'angle à la base du robot, θ_2 comme l'angle entre le premier et le second membre, θ_3 comme **déplacement linéaire** en direction de l'axe verticale z et θ_4 comme l'angle au poignet. Notez bien que les variables articulaires sont définis **entre les membres** et non pas par rapport au référentiel fixe. Ceci est très important en vue de l'utilisation pratique des variables (consignes angulaires des moteurs).

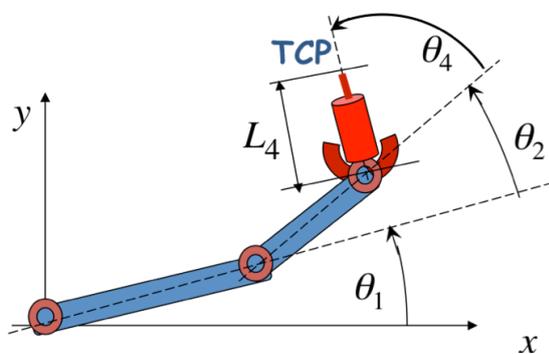


Fig. 8 Définition des variables robot θ_i pour le SCARA.

θ_3 est le déplacement vertical entre le bras L_2 et le préhenseur. Paramètres du robot: L_1 et L_2

Positions de référence: $\theta_i = 0$

TCP = Tool Center Point,

L_4 longueur de l'outil

Cette façon de procéder à partir de la base (qui serait donc membre zéro) est également standard, au moins dans la plupart d'ouvrages théoriques sur la robotique, bien que l'on soit en principe libre de définir ces variables de façon différente.

Le MGD doit décrire position et orientation de l'objet manipulé, donc permettre de trouver la position de n'importe quel point arbitraire p de cet objet en fonction des θ_i . Il consiste donc en la matrice de transformation $K_{MGD}(\theta_i)$ donnant la position de ce point en fonction des variables articulaires θ_i . Le point P sur l'objet (l'outil ou le préhenseur) est lui-même défini en **position de référence** $\theta_i = 0$.

$$P(\theta_i) = K_{MGD}(\theta_i) P(\theta_i = 0) \quad (14)$$

Il existe deux possibilités de définir $K_{MGD}(\theta_i)$: (utilisant $c_1 = \cos\theta_1$, $s_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$ etc.) (15)

Exercice 9:

a.) $K_{MGD}(\theta_i) = (\text{rot } \theta_1 \text{ autour de } [0, 0, 1]^T) \text{ puis } (\text{rot } \theta_2 \text{ autour de } [L_1 c_1, L_1 s_1]^T) \text{ puis } (\text{rot } \theta_4 \text{ autour de } [L_1 c_1 + L_2 c_{12}, \dots]^T)$

b.) $K_{MGD}(\theta_i) = (\text{rot } \theta_4 \text{ autour de } [\dots]^T) \text{ puis } (\text{rot } \theta_2 \text{ autour de } [\dots]^T) \text{ puis } (\text{rot } \theta_1 \text{ autour de } [\dots]^T)$

c.) Calculez $K_{MGD}(\theta_i)$ du SCARA. Quelle méthode, sera plus simple? Où vient la matrice de rotation autour de θ_1 , à gauche ou à droite dans la chaîne de multiplications?

Exercice 10: Un point de travail du poignet se trouve à une distance horizontale L_4 de l'axe de θ_4 avec $P(\theta_i = 0) = [L_1 + L_2 + L_4, 0, 0, 1]^T$. Donnez la position de ce point en fonction des variables robot $P(\theta_i)$.

La matrice ainsi trouvée contient une description complète de la géométrie du SCARA. Les équations définies par cette matrice sont le modèle géométrique direct. On les appelle parfois "équations cinématiques" du robot. Dans le cas du SCARA, elles peuvent immédiatement être obtenues par des simples équations trigonométriques. Mais la méthode appliquée ici nous permet de trouver ces équations de la même façon systématique dans des cas moins évidents comme par exemple le suivant.

Nous appliquons maintenant cette méthode pour trouver le MGD d'un robot industriel très répandu et classique, le **PUMA** (Programmable Universal Manipulator Arm, Stäubli RX) présenté au chapitre 1.

Le **premier pas** consiste donc à définir les **variables robots**, (ϑ ou q_i)

la position de référence et les paramètres du robot.

Ceci doit se faire sur des dessins. Nous traitons directement le PUMA avec un poignet 3R complet à trois degrés de liberté. Ces trois d.d.l. sont à ajouter au trois d.d.l. de base du PUMA qui est par conséquent un robot "complet" à 6 d.d.l.

Les variables robot (ou articulaires) 1–3 se retrouvent sur la figure 9, les variables 4–6 sont celles du poignet qui se retrouvent sur la figure 10 pour mieux voir les détails.

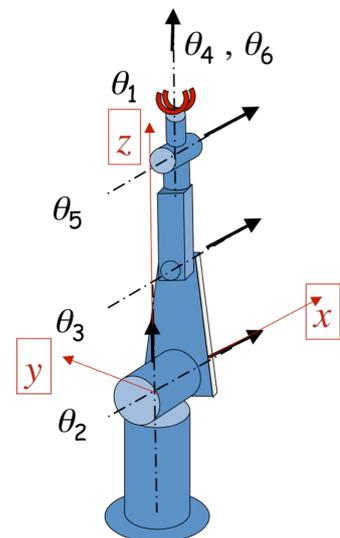


Fig. 9 Le robot PUMA et sa position de référence

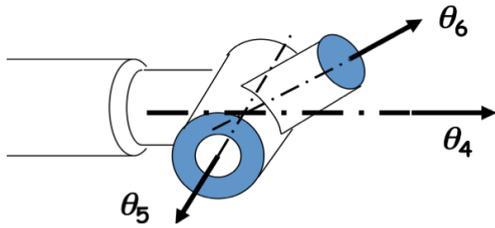


Fig. 10 Poignet à trois axes concurrents

Les paramètres du robot sont la longueur L_2 entre l'axe 2 et l'axe 3 ainsi que les distances D_3 et D_4 . L'utilisation de symboles différents (L ou D en l'occurrence) indique une différence

fondamentale de ces paramètres: Alors que les paramètres " L " désignent une distance **entre deux axes** consécutifs, les paramètres " D " indiquent une distance **sur les axes** eux-mêmes. Les premiers sont appelés "Link Length" en anglais et les seconds "Joint Offset".

"Joint" est le mot anglais pour "articulation", les « Joint Offset » sont chacun lié à une articulation particulière tandis que les "Link Length" font la transition d'une articulation à la prochaine.

Les paramètres "**Link Length**", "**Joint Offset**" ainsi que l'angle α entre deux axes consécutifs ("**twist angle**") **définissent entièrement la géométrie** d'un robot. Ces paramètres sont appelés paramètres de "**Denavit Hartenberg**" d'après une publication qui les introduisit. Ils sont traités en grand détail dans beaucoup d'ouvrages sur la robotique.

Dans le cas de déplacements linéaires (tel par exemple le mouvement vertical du SCARA), le joint offset peut devenir une des variables robot tandis qu'un angle d'articulation (**joint angle**) peut devenir paramètre fixe dans certains cas spéciaux. La définition du twist angle (toujours fixe) pour des axes non-concurrents se fait autour de la droite la plus courte perpendiculaire aux deux axes.

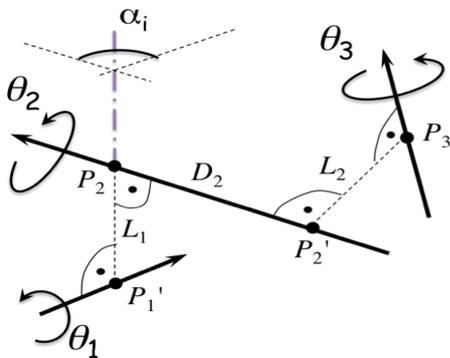


Fig. 11 Les quatre paramètres Denavit-Hartenberg (Link length L , Joint angle θ , Joint offset D , Twist angle α) dans le cas général. Une flèche marquée θ indique une articulation du robot. La variable en est soit l'angle de rotation θ autour de l'axe J soit le déplacement linéaire D le long de l'axe.

Revenons au MGD du PUMA. Le dessin nous indique les matrices de transformation qui entrent en jeu. Comme nous avons vu dans l'exercice 9, il convient

de commencer par la rotation θ_6 et de poursuivre les opérations pour aboutir avec la rotation θ_1 . Par conséquent les matrices s'inscrivent dans l'ordre inverse dans la chaîne de multiplications. Le grand avantage de cette démarche est que les axes de rotation sont ceux de la position de référence. Nous avons donc de gauche à droite:

- 1.) rotation de θ_1 autour de l'axe z .
- 2.) rotation de θ_2 autour de l'axe x
- 3.) rotation de θ_3 autour de l'axe x décalé de L_2 en direction de z .
- 4.) rotation de θ_4 autour de l'axe z décalé de D_3 en direction de x .
- 5.) rotation de θ_5 autour de l'axe x décalé de (L_2+D_4) en direction de z .
- 6.) rotation de θ_6 autour de l'axe z décalé de D_3 en direction de x .

Avec les abréviations $s_1 = \sin \theta_1$, $c_1 = \cos \theta_1$ et $v_1 = \text{versine}(\theta_1) = 1 - \cos \theta_1$ on trouve les matrices suivantes:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p} - \mathbf{Rp} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & D_3 v_6 \\ s_6 & c_6 & 0 & -D_3 s_6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K}_6$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p} - \mathbf{Rp} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_5 & -s_5 & L_{24} s_5 \\ 0 & s_5 & c_5 & L_{24} v_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K}_5$$

... etc .

Le MGD du PUMA est donc $\mathbf{K}_{\text{MGD}}(\theta_i) = \mathbf{K}_1 \mathbf{K}_2 \mathbf{K}_3 \mathbf{K}_4 \mathbf{K}_5 \mathbf{K}_6$

Ces expressions peuvent être calculées analytiquement une fois pour être programmées dans le processeur de la commande du robot. Elles sont en général trop compliquées pour aider à la compréhension concrète du comportement du robot. L'analyse d'une certaine partie du MGD du PUMA nous donnera une idée de cette complexité tout en nous fournissant la description mathématique d'un sous-système robotique important: Il s'agit du poignet.

2.1.8 Poignets de robot, angles d'Euler, tangage, roulis, lacet

La figure 10 représente un poignet de robot typique (poignet sphérique). Il est caractérisé par trois axes concurrents (qui ont une intersection commune). La particularité de ce poignet réside dans la définition des positions de référence des angles $\theta_4 \theta_5 \theta_6$. Ces positions sont telles que les axes de rotation de θ_4 et de θ_6 coïncident pour $\theta_5 = 0$ (position de référence).

Dans cette section, nous discutons uniquement les rotations sans nous préoccuper des translations. Nous déplaçons donc l'origine du référentiel au point d'intersection des axes du poignet. Ces axes forment un référentiel mobile. Les deux façons équivalentes de décrire l'orientation définie par le poignet sont:

- Rotation θ_4 autour de l'axe z , puis rotation θ_5 autour de l'axe x' (formant un angle de θ_4 avec l'axe x) puis rotation θ_6 autour du nouvel axe z' (qui forme un angle de θ_5 avec l'axe z fixe).
- Rotation θ_6 autour de l'axe z , puis rotation θ_5 autour de l'axe x puis rotation θ_4 autour de l'axe z (toujours fixe).

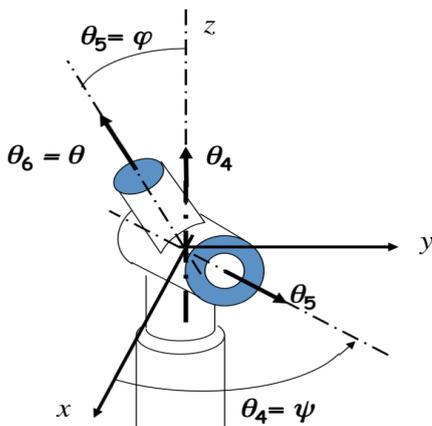


Fig. 12 Angles d'Euler (zxz)

Comme précédemment, la façon b) est de loin plus simple, dans la méthode a) il nous faudrait d'abord calculer les rotations autour des axes avec la formule (10). On obtient donc

$$\mathbf{R}(\text{poignet}) = \mathbf{R}_4 \mathbf{R}_5 \mathbf{R}_6 \quad (15)$$

Ces angles sont appelés angle d'Euler (z,x,z). Ils sont caractérisés par la coïncidence de l'axe de la première et de la dernière rotation en position de

référence. En choisissant une position de référence différente de $\pi/2$ pour le deuxième angle de rotation, on obtient les angles d'un poignet cardanique qui est caractérisé par trois axes mutuellement perpendiculaires en position de référence. Ces angles sont aussi nommés tangage-roulis-lacet (roll pitch yaw) selon le contexte.

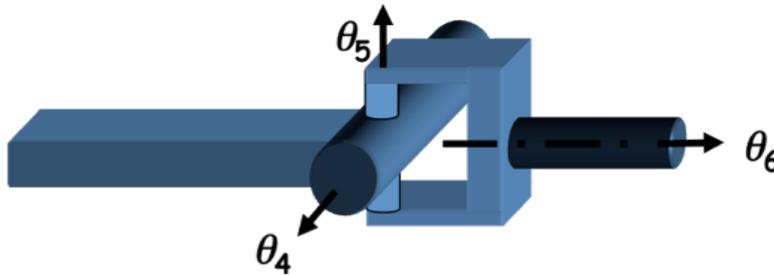
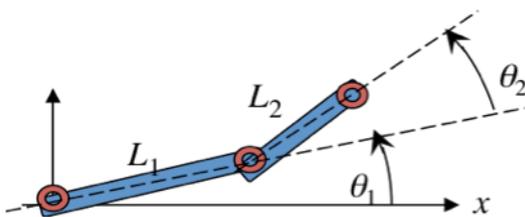


Fig. 13
Poignet sphérique en configuration dite « cardanique »
Tangage (pitch) : Θ_4
Roulis (roll) Θ_6
Lacet (yaw) Θ_5

2.1.9 Modèle géométrique inverse, postures

Le MGD donne la position et l'orientation en fonction des variables robot. En pratique nous sommes confrontés plus souvent au problème inverse, c'est à dire de trouver les variables robot nécessaires pour atteindre une position et une orientation données. Ces équations sont appelées "modèle géométrique inverse" (MGI, inverse kinematics).



Comme premier exemple, nous traitons le manipulateur planaire simple à deux membres. Il s'agit donc de trouver les angles θ_1 et θ_2 à partir d'une position x, y donnée. Le MGD est

$$x = L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y = L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

Pour trouver la solution, nous devons d'abord appliquer les équations trigonométriques (2). Utilisant les symboles $c_1 = \cos \theta_1$ et $s_1 = \sin \theta_1$ etc. , on obtient

$$x = L_1 c_1 + L_2 c_1 c_2 - L_2 s_1 s_2 \quad (a)$$

$$y = L_1 s_1 + L_2 s_1 c_2 + L_2 c_1 s_2 \quad (b)$$

$$c_1^2 + s_1^2 = 1 \quad (c)$$

$$c_2^2 + s_2^2 = 1 \quad (d)$$

S'agissant de quatre équations quadratiques, nous pouvons nous attendre à des solutions multiples. La somme des carrés de (a) et (b) nous donne la relation du cosinus d'un triangle bien connue:

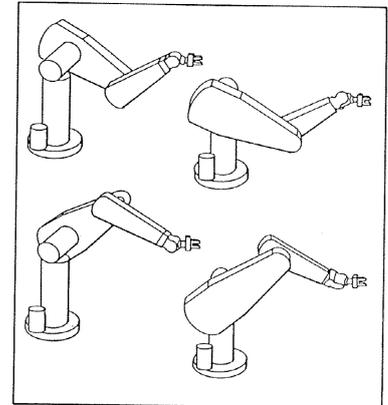
$(x^2 + y^2) = L_1^2 + L_2^2 + 2 L_1 L_2 c_2$, qui nous donne c_2 , et, avec (d), deux solutions pour s_2 . Les inconnues s_1 et c_1 se trouvent avec des sommes pondérées des expressions (a) et (b) :

$$x c_1 + y s_1 \quad \text{et} \quad -x s_1 + y c_1.$$

Dans le cas du robot puma, le MGI des trois premiers d.d.l. consistent en deux chaînes identiques à l'exemple précédent, avec deux solutions pour chaque paire (θ_1, θ_2) et (θ_2, θ_3) . En combinaison, cela donne donc quatre solutions distinctes. Pratiquement, cela signifie que les trois premiers bras de la chaîne cinématique de la base au poignet peuvent atteindre un

point donné de quatre façons différentes (avec, chaque fois, des orientations différentes). On appelle de telles solutions les “ postures ” du robot. (Fig. 14)

Fig. 14 Les quatre postures des premiers trois d.d.l. du PUMA



A cela, il faut ajouter les postures du poignet. (Lesquelles? Combien de solutions du MGI du PUMA?) Le nombre de postures d'un robot général est inconnu.

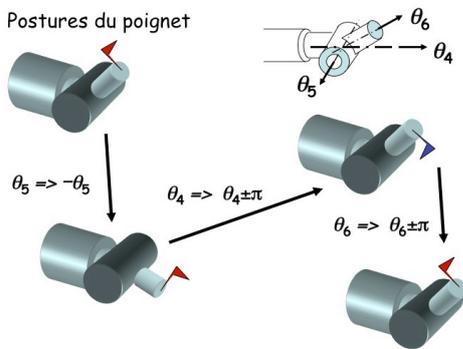


Fig. 15 Postures d'un poignet sphérique

Récapitulons:

Le MGD a une seule solution: Pour des variables articulaires données, la position du robot est définie.

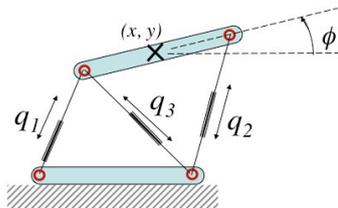
Pour le MGI, il peut y avoir plusieurs solutions (par ex. Fig. 14).

Il se trouve que les exemples choisis sont tous des **robots sériels** (Puma, SCARA). Dans le cas de **robots parallèles**, nous trouvons **juste le contraire!**

Le MGD a plusieurs solutions (appelées "contorsions" du robot), le MGI en a une seule. On peut facilement se convaincre de cela avec un simple robot parallèle à 2 ddl dans le plan :

Fig. 16 : Robot parallèle planaire

Robots parallèles?



MGD: Donnés $q_1, q_2, q_3,$
 Quels sont $(x, y, \phi) ?$

Le MGI du robot parallèle, par contre, n'a qu'une seule solution, comme on peut s'en rendre compte avec la même structure parallèle planaire: Si la position et l'orientation de l'élément terminal sont données, les longueurs des vérins sont déterminées de façon univoque.

Dans les sections suivantes, nous verrons comment ces modèles sont exploités pour l'analyse des robots et la synthèse de contrôles robotiques.