II Bases Théoriques: Cinématique & modélisation

2.1 Cinématique

La cinématique (Kinematics) est la géométrie du mouvement.

Elle occupera les trois prochaines semaines.

Hannes Bleuler
Mohamed Bouri

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
Laboratoire de Systèmes Robotiques.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

2.1 Cinématique

- *Rotations en 2 D*

2.1.1 Transformations actives & passives

2.1.2 Translations & rotations en 2-D autour de l'origine, Matrices de cosinus directeurs

2.1.3 Combinaison rotations & translations: Matrices homogènes

2.1.4 Rotations en 2-D autour d'origine arbitraire

12 Octobre

2.1.5 Rotations dans l'espace 3-D, axe de rotation, quaternions

2.1.6 Matrices homogènes 3-D

19 Octobre

2.1.7 **Modèle géométrique direct**

2.1.8 Poignet, angles d'Euler, tangage, roulis, lacet

2.1.9 Modèle géométrique inverse, postures, contorsions

Cinématique

- Tâche "générique" du robot industriel:
  Déplacer un objet (outil ou pièce)
- Donc: Etude de la cinématique, i.e. géometrie des mouvements
- Forces, statique & dynamique plus tard
- Temps, vitesses, accélérations plus tard

Cinématique

La cinématique peut représenter 80% de l'effort dans l'établissement du modèle d'un robot.

Des livres entiers sont dédiés à la cinématique

Elle seule peut facilement faire l'objet de cours

Ce chapitre 2.1 n’est qu'une introduction se limitant à l'essentiel.

Variables Robot

Tout robot est contrôlé par des consignes angulaires ou linéaires envoyées directement aux actionneurs (moteurs).

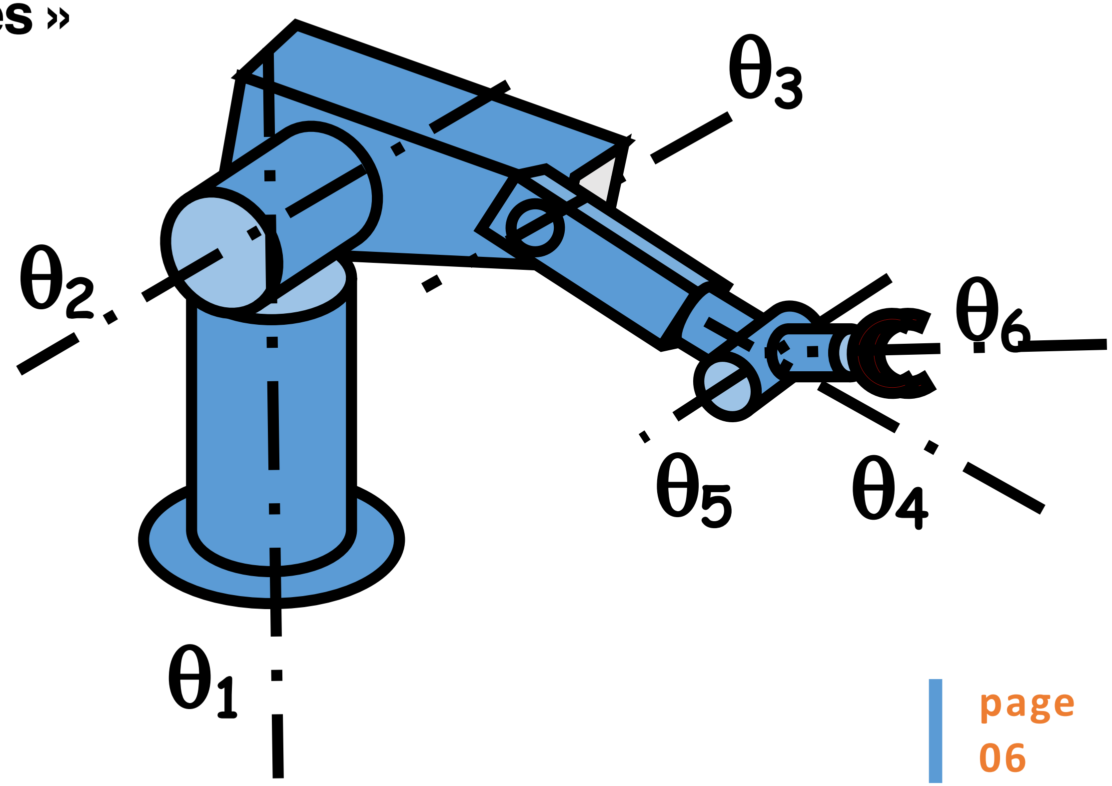
Ces angles ou positions sont les **variables robots**.

Anglais « joint coordinates » ou « joint variables »

$\{ q_1, q_2, \ldots q_i, \ldots. q_n \}$

ou

$\{\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_i, \ldots. \theta_n\}$.

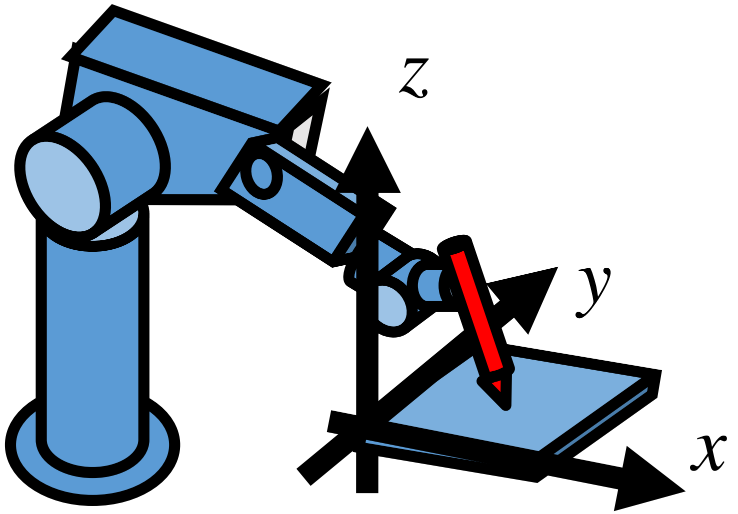


Variables opérationelles

La tâche du robot se décrit dans d'autres termes: **Position et orientation** de l'outil, de l'objet à manipuler.

Pour un corps rigide, il faut spécifier 6 variables, correspondants aux 6 ddl d'un solide dans l'espace.

$\{x,y,z\}$ = position d'un point du solide, p.ex. du centre.

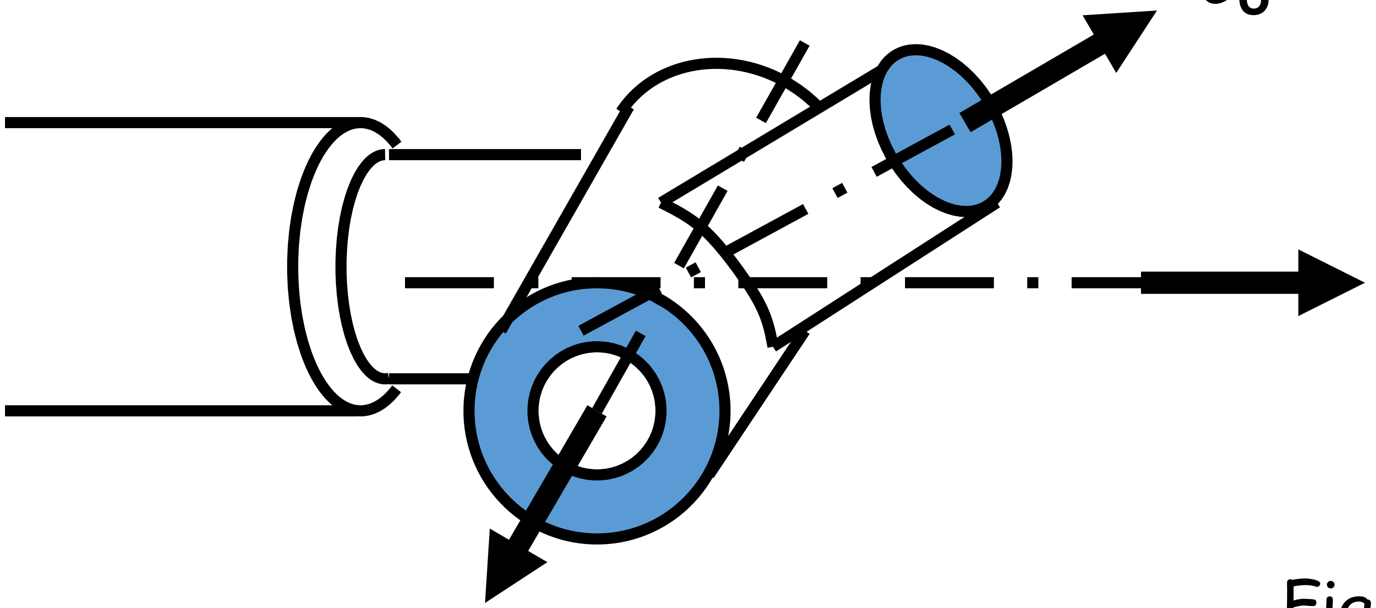


Les trois paramètres restants peuvent être représenté par une grande variété de façons (**angles, matrices, quaternions**).

Exemple: Poignet (wrist) à 3 axes concurrents

Yaw = Lacet

θ_6



θ_4 Roll = Roulis

Fig 10 p. 11 du polycopié

θ_5 Pitch = tangage

Poignet à 3 axes: Angles d'Euler

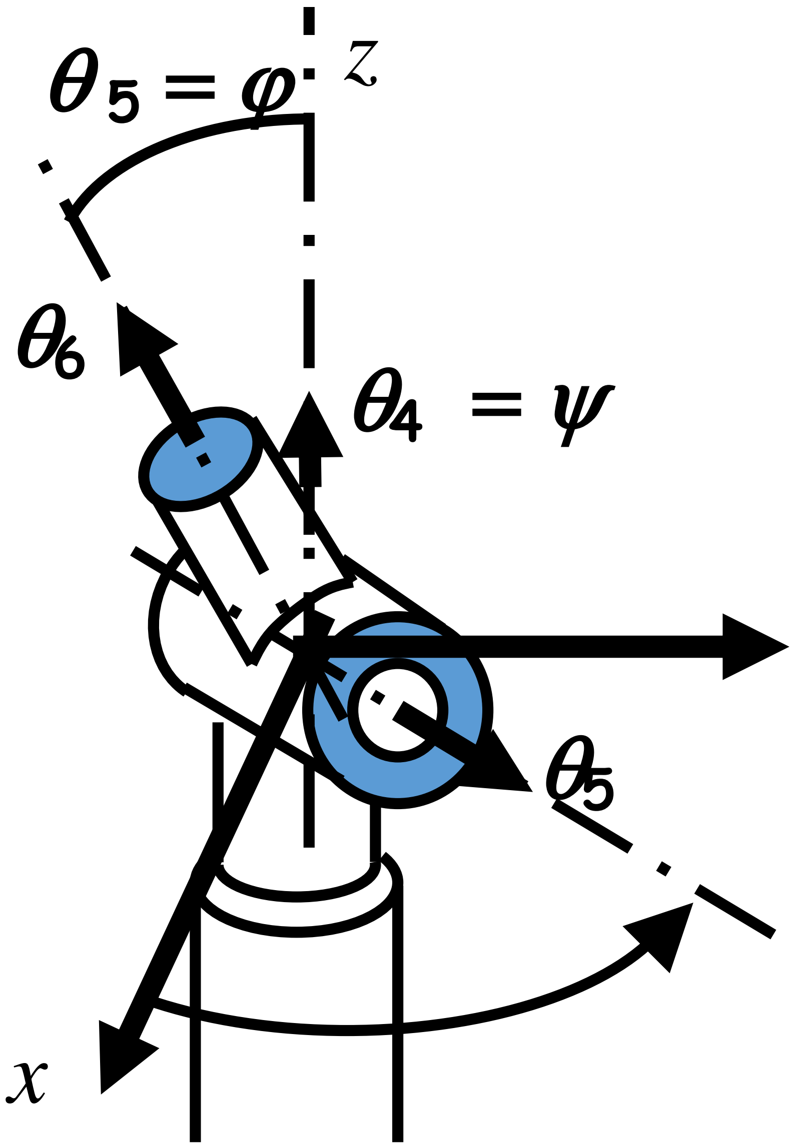
Angles gyroscopiques

$(\ \psi, \varphi, \theta\ )$

Précession

nutation

rotation propre



Modèle géométrique direct

Anglais: Forward kinematics

Exprimer les variables opérationelles

$\{\, x, y, z, \psi, \varphi, \theta \}$

en fonction des variables robots

$\{\, q_1, q_2, \dots\, q_i, \dots.\, q_n \}$

$$\{\, x, y, z, \ \psi, \ \varphi, \ \theta \,\} = f\,(q_i\,)$$

Modèle géométrique indirect

Anglais: Inverse kinematics

Exprimer les variables robot $\{ q_1, q_2, \ldots q_i, \ldots. q_n \}$

en fonction des variables operationelles $\{ x, y, z, \psi, \varphi, \theta \}$

$$\{ q_1, q_2, \ldots q_i, \ldots. q_n \} = \mathbf{g} \, (x, y, z, \psi, \varphi, \theta)$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Défi: Référentiel fixe ou lié au robot?

- **Fixes** (base du robot, table de travail, etc)
- En mouvement, donc **solidaires au corps** (élément du robot, poignet, outil, pièce,...)

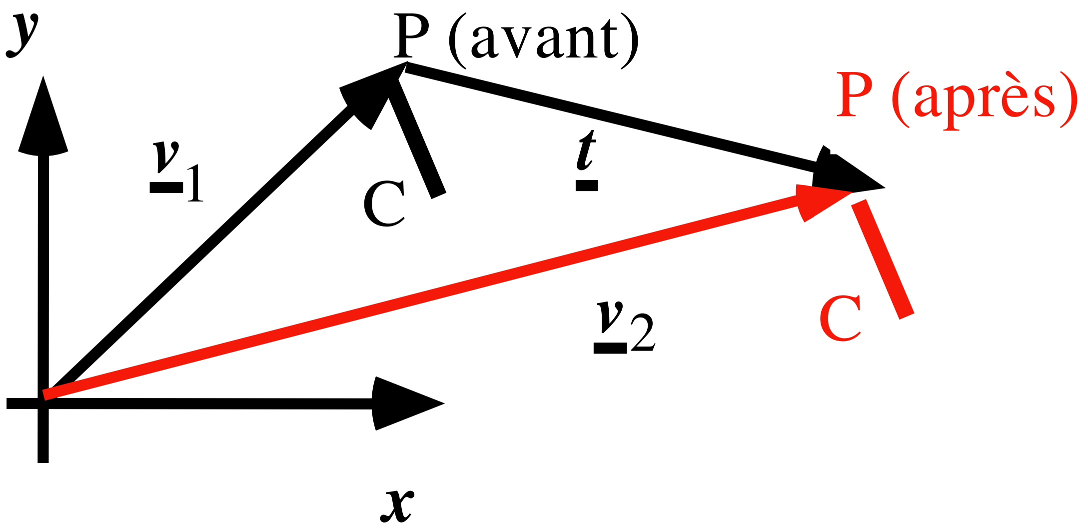
Une base de coordonées peut être défini pour chaque référentiel

Cela mène à **deux types de transformation:**

1. Changement de position d'un objet dans un système de coordonnées donné: **Transformation active**

2. Changement de système de coordonnées d'un objet fixe: **Transformation passive**

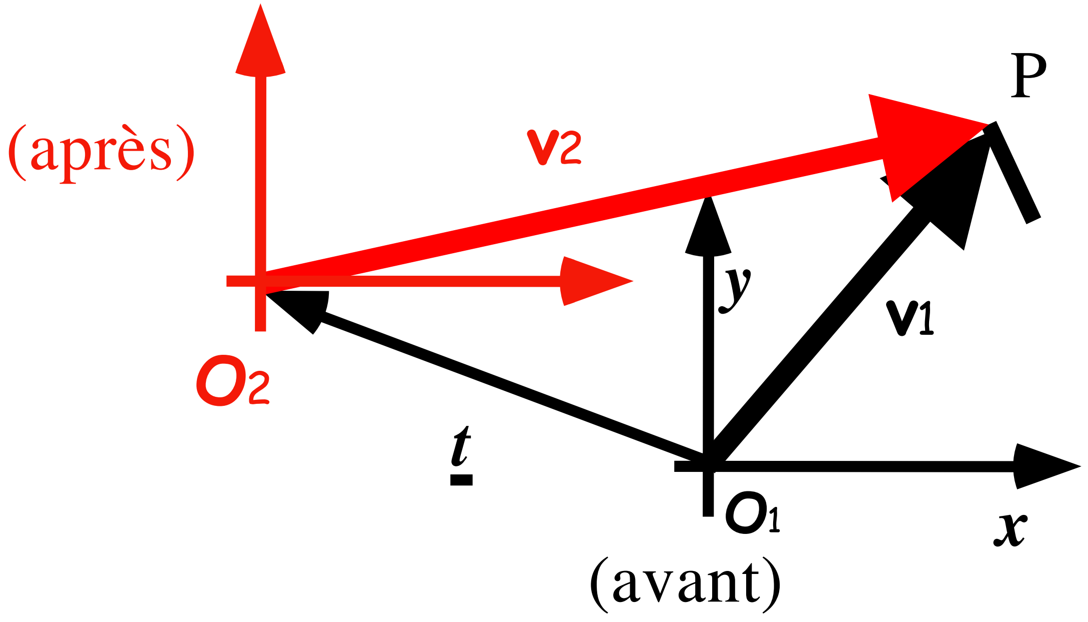
2.1.2 Translation dans le plan (en 2D): Transformation **active**



Translation du point P à la position $\mathbf{v}_1$ vers position $\mathbf{v}_2$

$\underline{\boldsymbol{v}}_2 = \underline{\boldsymbol{v}}_1 + \underline{\boldsymbol{t}}$ avec le même $\underline{\boldsymbol{t}}$ pour tout point du corps rigide C

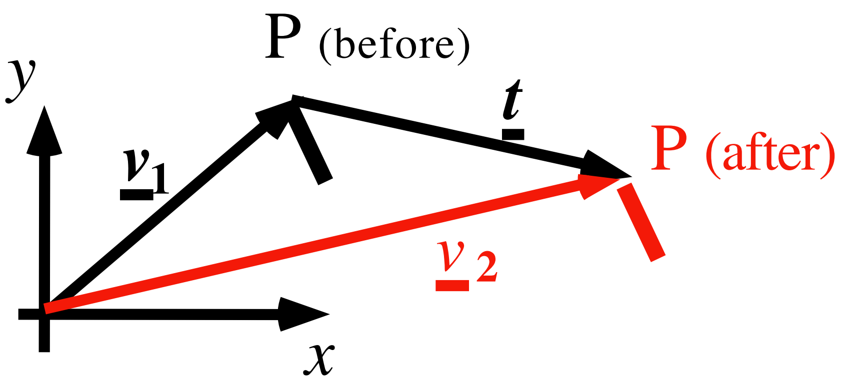
Transformation PASSIVE:

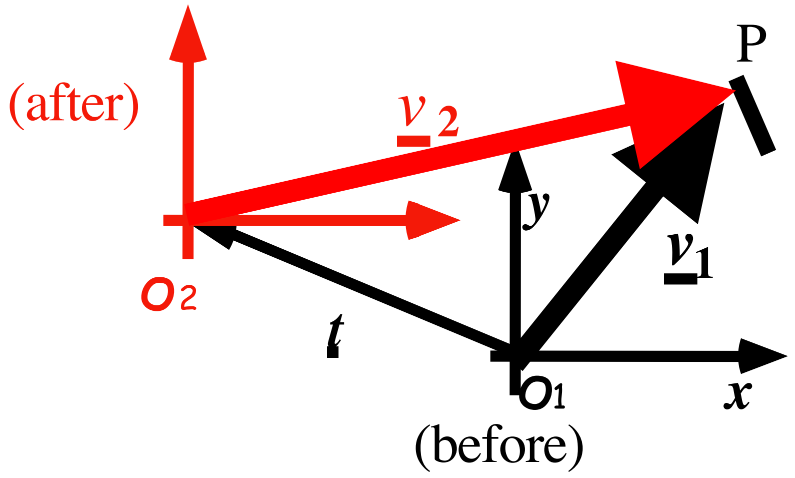


Translation du référentiel O_1 vers O_2

$\underline{v}_2 = \underline{v}_1 - \underline{t}$

La transformation passive est l’inverse de l’active:





Active:

Translation of object C from position 1 to position 2

$$\underline{v}_2 = \underline{v}_1 + \underline{t}$$

Passive:

Translation of frame from O1 to O2

$$\underline{v}_2 = \underline{v}_1 - \underline{t}$$

Translation vs. Rotation

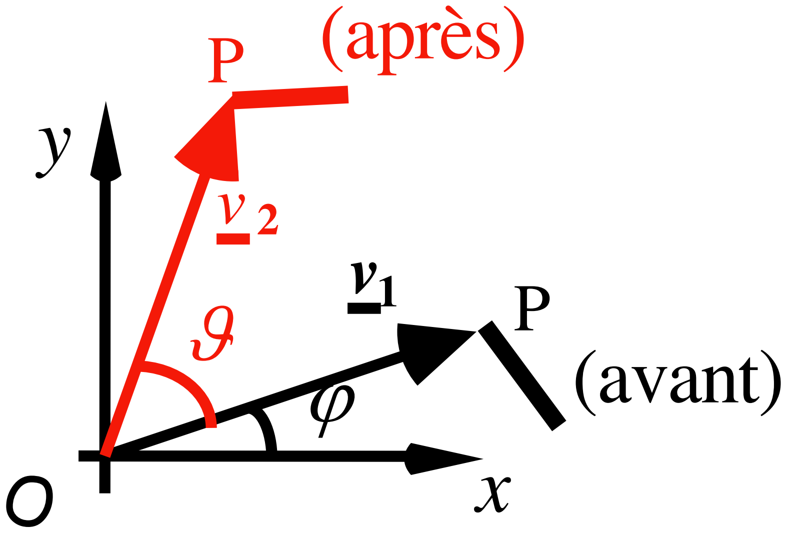
Translation:
Changement de position **sans** changement d'orientation
(**tous les points changent de la même façon**)

Rotation: Changement **d' orientation**,

En 2D il existe un **point fixe** (centre de rotation)

Attention: Mouvement sur une trajectoire circulaire ≠ rotation!

Rotation (active) autour de O dans le plan



$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\varphi+\vartheta) \\ r\sin(\varphi+\vartheta) \end{bmatrix}$$

- Axe (z) : toujours perpendiculaire au plan

En coordonnées polaires (r, φ) cette transformation est triviale.

Pour passer directement de $[x_1, y_1]$ à $[x_2, y_2]$ en cordonnées cartésiennes, sans devoir calculer (r, φ) à partir de $[x_1, y_1]$, les formules trigonométriques sont utiles:

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

L'application à l'expression précédente (2) donne:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\varphi+\vartheta) \\ r\sin(\varphi+\vartheta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\varphi\cos\vartheta - r\sin\varphi\sin\vartheta \\ r\cos\varphi\sin\vartheta + r\sin\varphi\cos\vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \mathbf{R}(\vartheta) \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{R}(\vartheta) = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

En séparant les termes contenant l'angle ϑ de rotation de ceux liés à la position du point P, on défini une **matrice de rotation** $\mathbf{R}$

Exercices 1

1a) $\mathbf{R}(\vartheta = 0) = ?$

1b) $\mathbf{R}(-\vartheta) = ?$

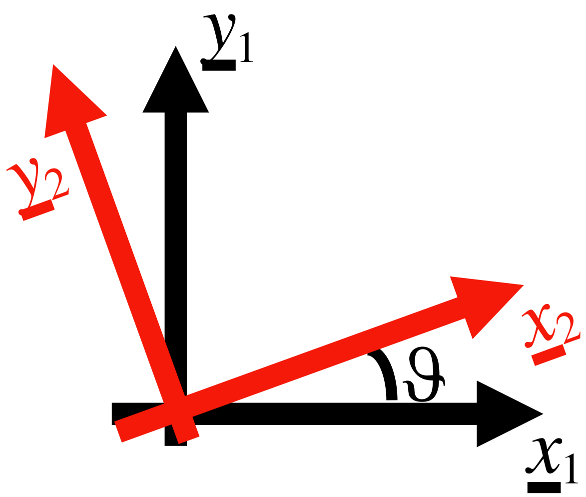
1c) $\mathbf{R}(\vartheta)^{-1} = ?$

1d) $\boldsymbol{v}_3 = \mathbf{R}(\vartheta_2)\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{R}(\vartheta_2)\mathbf{R}(\vartheta_1)\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{R}(?)\boldsymbol{v}_1 \ ?$

1e) $\mathbf{R}(\vartheta_2)\mathbf{R}(\vartheta_1) = \mathbf{R}(\vartheta_1)\mathbf{R}(\vartheta_2) \ ?$

Matrice de rotation

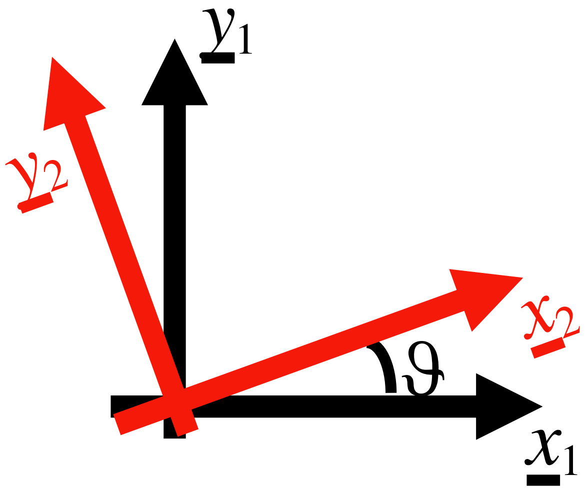
La matrice **R** peut être interprétée comme **base vectorielle** $[x_2, y_2]$ d'un **système de coordonnées** tourné d'un angle ϑ par rapport au système de départ $[x_1, y_1]$:



$$\left[\underline{x}_2, \underline{y}_2\right] = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} = \mathbf{R}(\vartheta)$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Cosinus directeur



$$\left[\underline{x}_2, \underline{y}_2\right] = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{x}_2 \underline{x}_1 & \underline{y}_2 \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \underline{y}_1 & \underline{y}_2 \underline{y}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{R}(\vartheta)$$

La matrice **R** se compose de produits scalaires des vecteurs unitaires $[\underline{x}_2, \underline{y}_2, \underline{x}_1, \underline{y}_1]$, donc des cosinus entre ces vecteurs.

D'où le nom de **Matrice des Cosinus Directeurs**

Matrice R comme repère orthogonal

L'interprétation de **R** comme repère orthogonal tourné de ϑ par rapport au repère d'origine implique les identités suivantes:

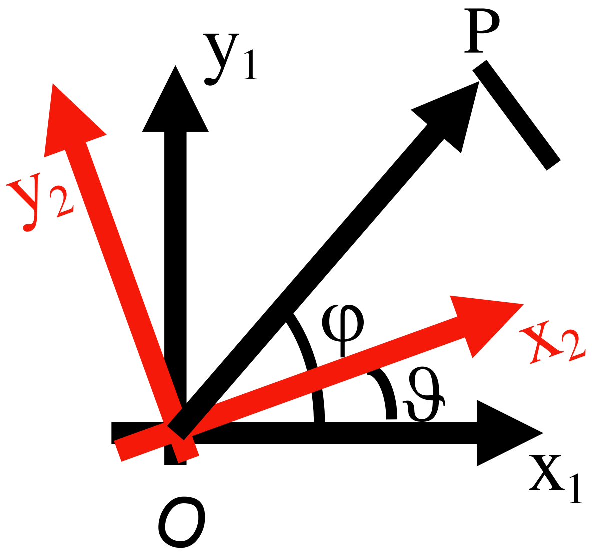
1) $\mathbf{R}^{\mathrm{T}} = \mathbf{R}^{-1}$ (matrice orthogonale)

2) Le déterminant est nécessairement $\|\mathbf{R}\| = 1$ (Quid de $\|\mathbf{R}\| = -1$?)

Donc tout ses vecteurs (lignes et colonnes) sont orthogonaux entre eux et unitaires

Rotation passive autour de O dans le plan

- Axe: toujours perpendiculaire au plan



$$ {}^{2}\underline{v} = \mathbf{R}(-\vartheta)\,{}^{1}\underline{v} $$

$$ = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} {}^{1}\underline{v} $$

${}^{1}\underline{v}$ et ${}^{2}\underline{v}$ sont les représentaions du même vecteur dans les deux bases (1) et (2)

Transformations passives
= inverse des transformations actives

Translation du point P de la position v1 à la position v2

$$\underline{v}_2 = \underline{v}_1 + \underline{t}$$

Translation du Référentiel O1 vers O2 , même position!

$$\underline{v}_2 = \underline{v}_1 - \underline{t}$$

Rotation du point P de la position v1 à la position v2

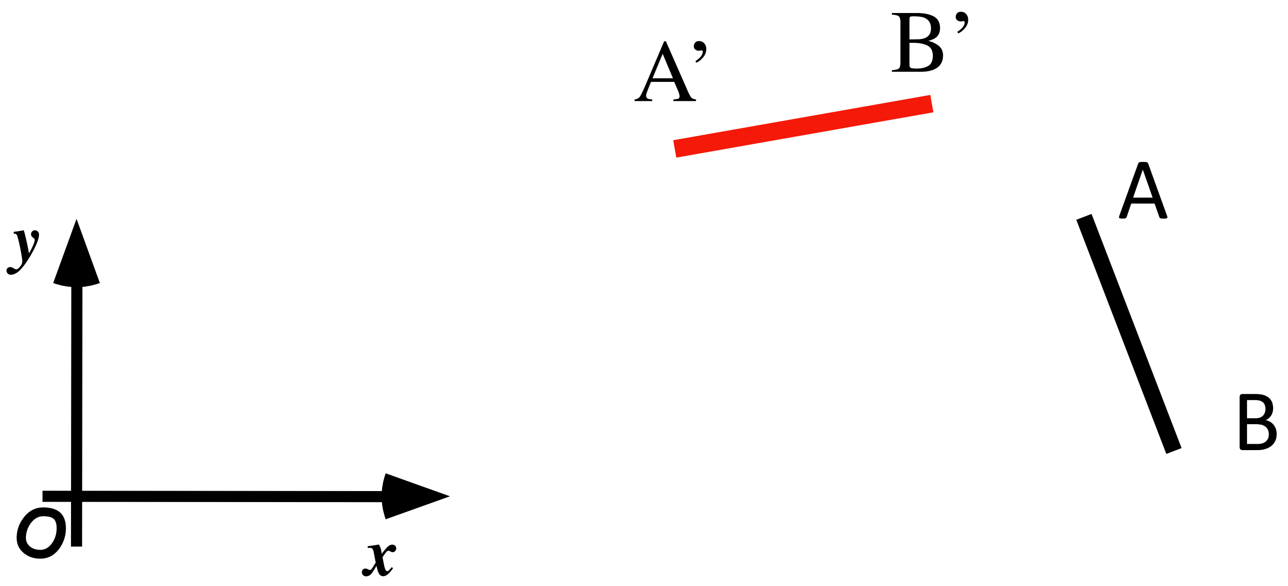
$$\underline{\mathbf{v}}_2 = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} \underline{\mathbf{v}}_1$$

Rotation du référentiel même vecteur!

$$^2\underline{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} {}^1\underline{\mathbf{v}}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

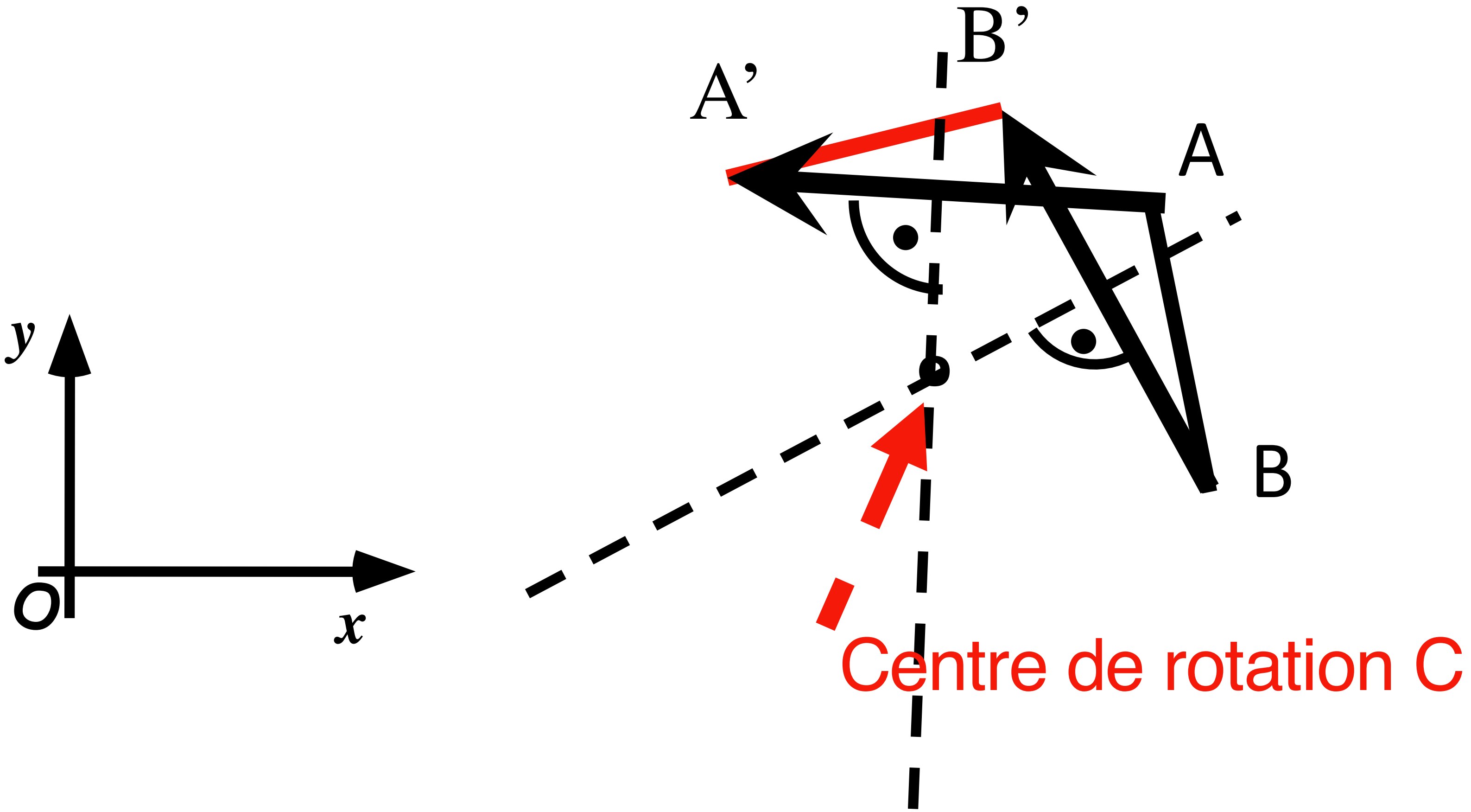
Rotation autour de points arbitraires:



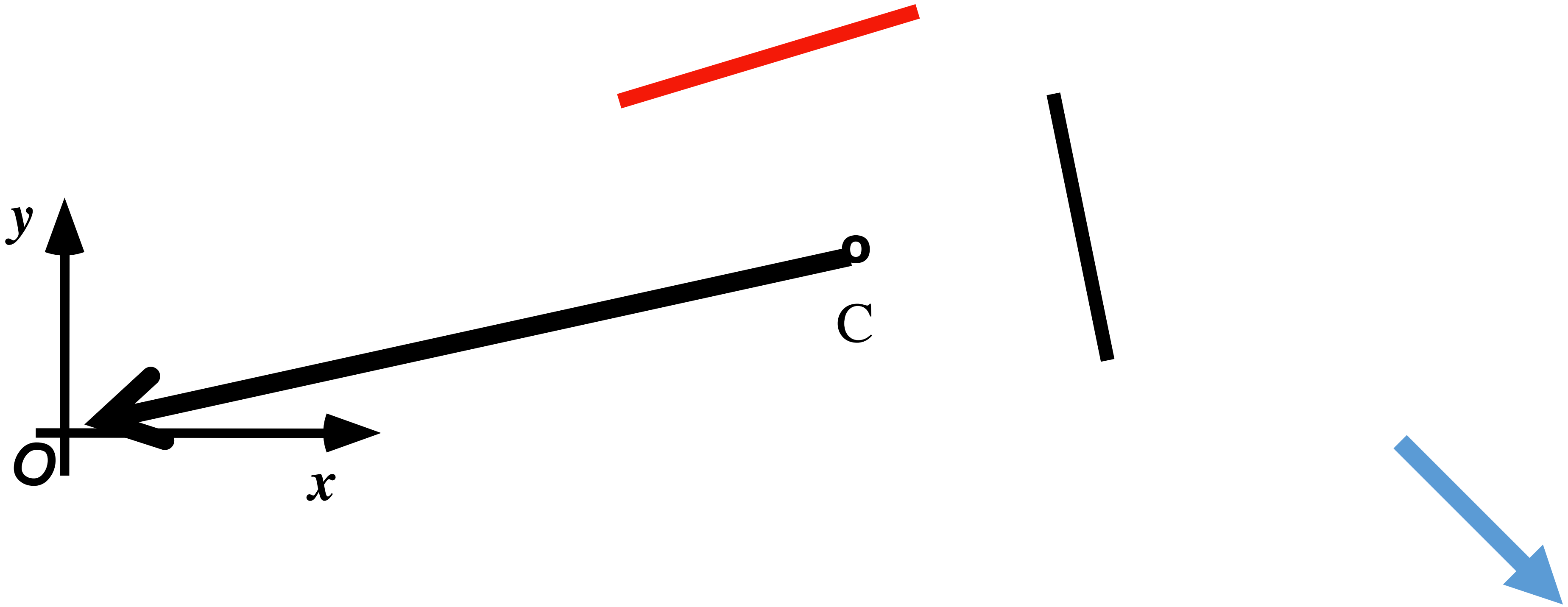
Trouvez le centre de rotation!

Solution:

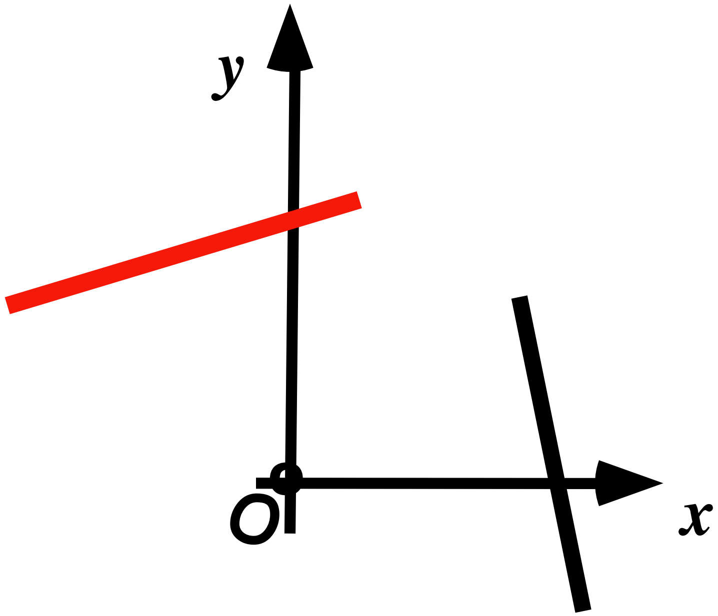
A se déplace vers A’. Le centre de rotation sera donc sur la médiatrice de $\overline{\text{A–A'}}$



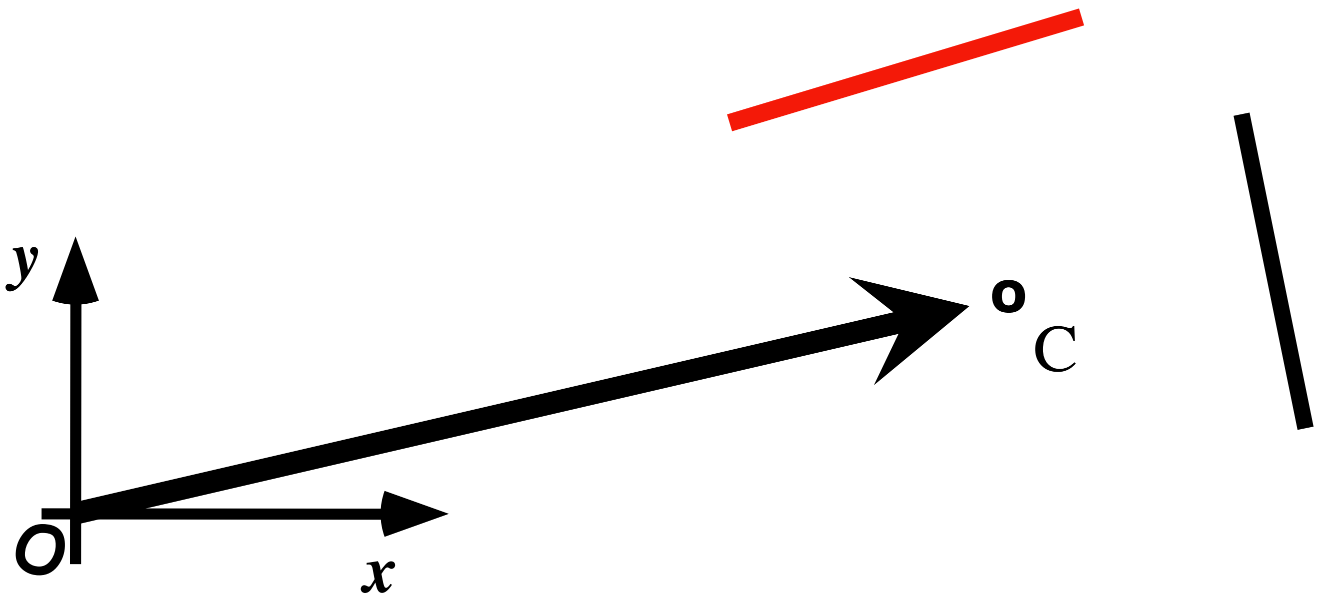
1. Translation de C vers O



2. Rotation autour de l'origine O



3. Translation vers C



Translation: Addition vectorielle
Rotation: Multiplication matricielle

Il serait utile d'avoir une et même opération mathématique pour tout changement de position, que ce soit translation ou rotation

Solution: 2.1.3 Coordonnées homogènes

August Ferdinand Möbius, 1790 - 1868
Leipzig, 1827

Géometrie Projective
Girard Desargue, Lyon, 1591-1661
Jean-Victor Poncelet, Julius Plücker, Jakob Steiner

Les coordonnées homogènes sont largement utilisées en infographie pour la représentation de scènes 3D

Elles sont adaptées à la géométrie projective, utilisée dans logiciels graphiques (OpenGL , Direct3D …)

Comment obtenir addition vectorielle avec une multiplication matricielle?

$$\underline{\boldsymbol{v}}_2 = \underline{\boldsymbol{v}}_1 + \underline{\boldsymbol{t}}$$

$$\underline{\boldsymbol{v}}_2 = \mathbf{T}\,\underline{\boldsymbol{v}}_1$$

$$\mathbf{T}\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + t_x \\ y_1 + t_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Astuce:

1. Ajouter un "facteur d'échelle" 1 à chaque vecteur
2. Introduire le vecteur de translation à droite de **R***)
3. Ajouter la ligne [0 0 1] sous **R**

*) Ici $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ car pas de rotation

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

donc, en général, combinant translation et rotation:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & t_x \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s & t_x \\ s & c & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Question: Est-ce rot-transl **OU** transl-rot?

Réponse: Trouvez vous-même! (Exercice 2)

A retenir:

Les vecteurs en représentation homogène contiennent
un élément de plus que le nombre de dimensions géométriques.

Les matrices en représentation homogène contiennent une ligne et une colonne de plus que le nombre de dimensions géométriques.

Exercice 2

Ex 2a): Rotation pure? Translation pure? Identité?

Ex. 2b) Translation de t, puis rotation de J

Ex. 2c) Rotation, puis translation

Inverse? (Faites le contrôle!)

Exemple: Enchainement de deux transformations

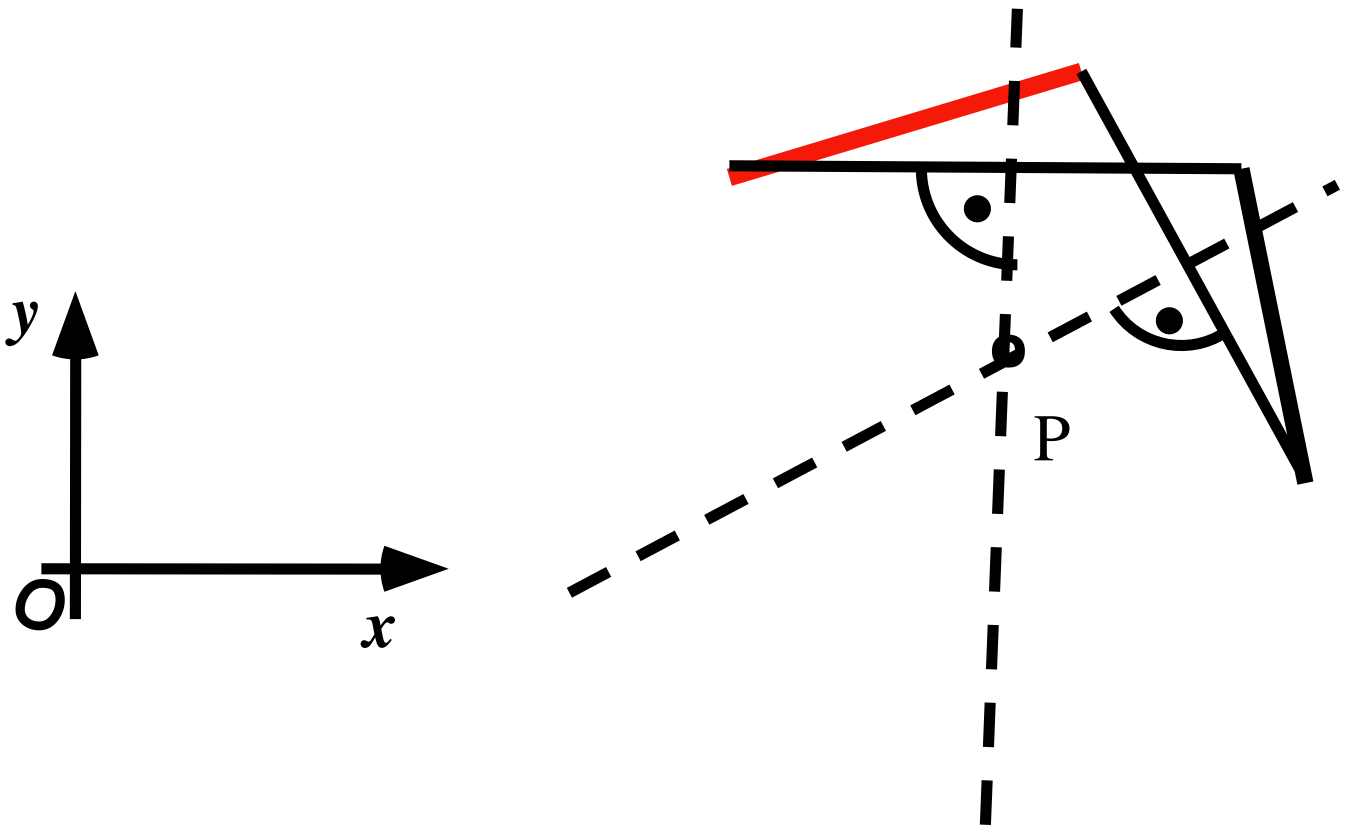
Sans représentation homogène:

$$\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{R}(\vartheta_1)\ \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{t}_1$$

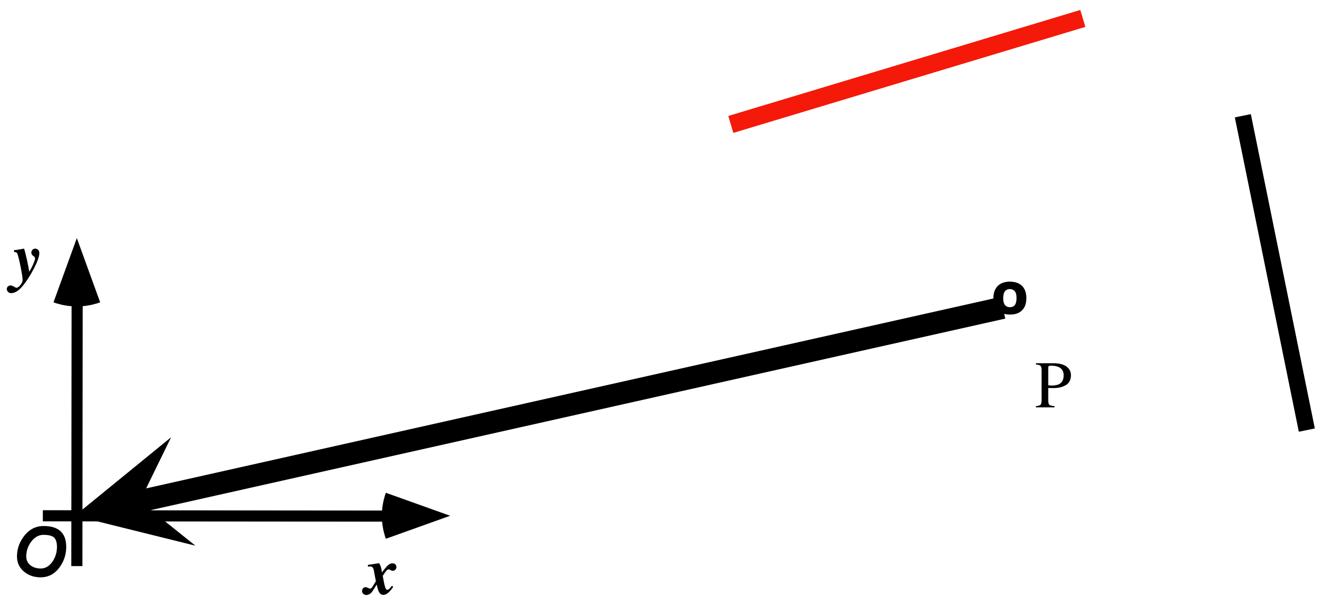
$$\boldsymbol{v}_3 = \mathbf{R}(\vartheta_2)\ \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{t}_2 =$$

Avec représentation homogène: Exercice 3

2.1.4 Rotation 2D autour de points arbitraires:

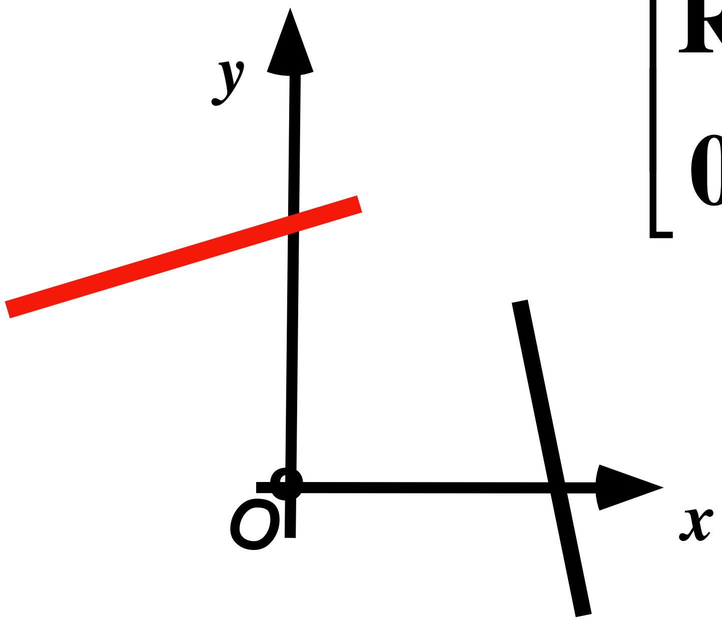


1. Translation de P vers l'origine O



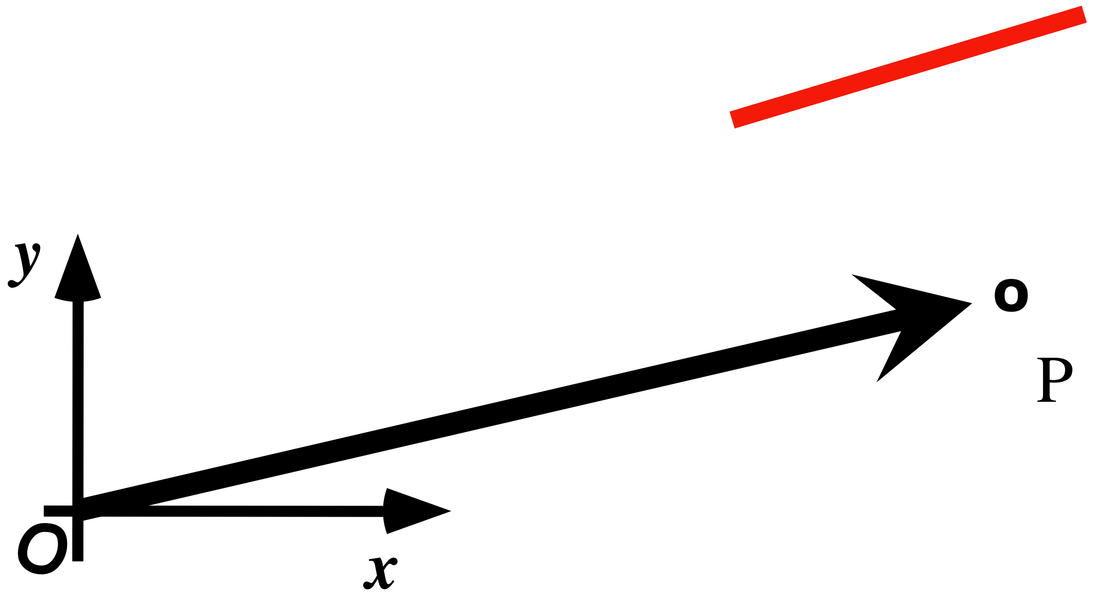
$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\overrightarrow{OP} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

2. Rotation autour de l'origine O



$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{p} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & -\mathbf{Rp} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Translation de O vers le centre de rotation arbitraire P



$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{p} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{p} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p} - \mathbf{R}\mathbf{p} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Interpretation:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p}-\mathbf{R}\mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Cette expression met en évidence qu'une rotation autour de P est équivalente à une rotation autour de O suivie d'une translation $\underline{\boldsymbol{p}}-\underline{\mathbf{R}}\boldsymbol{p}$

A l'inverse, on peut trouver un centre de rotation pour toute combinaison de translation et rotation.

Préparation pour les rotations dans l'espace

Préparation au chapitre suivant (rotations 3-D), à faire pour la semaine prochaine !

Prenez un objet devant vous (par ex. le polycopié de bases de la robotique) ;

Imaginez trois axes (x, y, z) d'un système de coordonnées cartésiennes dans l'espace ;

Effectuez les deux séquences A) et B) de rotations suivantes :

A) : 1.) Rotation de 90° autour de l'axe *z* –

2.) Ensuite rotation de 90° autour de l'axe *y*

B) : 1.) Rotation de 90° autour de l'axe *y* –

2.) Ensuite rotation de 90° autour de l'axe *z*

Que constatez-vous ?