Série 2 – Cinématique

05.10.2018

Exercice 2.1 : Rotations 2D autour de l'origine

a) $R(\vartheta = 0) = ?$
b) $R(-\vartheta) = ?$
c) $R^{-1}(\vartheta) = ?$
d) $v_3 = R(\vartheta_2)v_2 = R(\vartheta_2)R(\vartheta_1)v_1 = R(?)v_1$
e) Est-ce que l'expression suivante est correcte ? : $R(\vartheta_2)R(\vartheta_1) = R(\vartheta_1)R(\vartheta_2)$

Exercice 2.2 : Combinaison translations & rotations : Matrices homogènes

a) Donnez la matrice de translation pure et de rotation pure :

$$Translation\ pure : v_2 = T * v_1 = \begin{pmatrix} cos(\vartheta) & -sin(\vartheta) & t_x \\ sin(\vartheta) & cos(\vartheta) & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$Rotation\ pure : v_3 = T * v_1 = \begin{pmatrix} cos(\vartheta) & -sin(\vartheta) & t_x \\ sin(\vartheta) & cos(\vartheta) & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} =$$

b) Donnez la matrice homogène pour :

$$Translation\ de\ \boldsymbol{t}\ puis\ Rotation\ de\ \vartheta$$

c) Donnez la matrice homogène pour :

$$Rotation\ de\ \vartheta\ puis\ translation\ de\ \boldsymbol{t}$$

d) La matrice homogène $\begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) & t_x \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ correspond-elle à b) ou c) ?

e) Donner la matrice d'opération inverse de c) :

$$Rotation\ de\ -\vartheta\ puis\ translation\ de\ -\boldsymbol{t}$$

Exercice 2.3 : Enchaînement de matrices homogènes

Quelle est la matrice homogène pour la séquence d'opérations suivante ?

$$Rotation\ de\ \vartheta_1\ , Translation\ de\ t_{1,}\ \ Rotation\ de\ \ \vartheta_2\ , Translation\ de\ t_2$$

Conseils : Utilisez ces symboles pour alléger l'écriture :

$$s_1 = \sin(\vartheta_1)\,,\ \ c_1 = \cos(\vartheta_1),\ \ s_{12} = \sin(\vartheta_1\ +\ \vartheta_2)\,, c_{12} = \cos(\vartheta_1 +\ \vartheta_2)$$

Utilisez les formules trigonométriques données dans le cours pour la somme des angles.

Exercice 2.4 : Rotations autour d'un point arbitraire

« Toute combinaison de translations et rotations dans le plan peut être exprimée en rotation pure autour d'un point P appelé « **centre de rotation** »

a) Le paragraphe précédent est-il entièrement correct ?
b) Trouvez le centre de rotation :
   1. Par dessin
   2. À l'aide de la formule pour une rotation autour du point *P* donné par le vecteur ***p***.
   3. En cherchant un vecteur propre de la matrice homogène. Lequel des trois vecteurs propres faut-il utiliser ?
      (Pas de calcul symbolique demandé. Donnez un exemple numérique simple)

c) Donnez la matrice homogène qui décrit une rotation de 60° autour de l'origine.

d) Trouvez la matrice homogène qui décrit une translation de 1 en direction *x*, puis une rotation de 60° autour de l'origine.
e) Donnez la matrice homogène qui décrit une rotation de 60° autour de $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

f) Un objet avec deux points $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}_1$ est déplacé de sorte que ces points se retrouvent aux locations $\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_2$. Donnez la matrice homogène qui décrit cette transformation.

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{w_1} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{2}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-\sqrt{3}\\1-\sqrt{3}\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{w_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2-\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$$