Corrigé 2 – Cinématique

05.10.2018

Solution 2.1 :

a) $R(\vartheta = 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $R(-\vartheta) = \begin{pmatrix} cos(-\vartheta) & -sin(-\vartheta) \\ sin(-\vartheta) & cos(-\vartheta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\vartheta) & sin(\vartheta) \\ -sin(\vartheta) & cos(\vartheta) \end{pmatrix}$

c) $R^{-1}(\vartheta) = R^T$ (Rappel : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{det}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$)

d) $R(\vartheta_2)R(\vartheta_1) = \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 \\ s_2 & c_2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 \\ s_1 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2c_1 - s_2s_1 & -c_2s_1 - s_2c_1 \\ c_2s_1 + s_2c_1 & c_2c_1 - s_2s_1 \end{pmatrix} = R(\vartheta_1 + \vartheta_2)$

e) $R(\vartheta_1)R(\vartheta_2) = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 \\ s_1 & c_1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 \\ s_2 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2c_1 - s_2s_1 & -c_2s_1 - s_2c_1 \\ c_2s_1 + s_2c_1 & c_2c_1 - s_2s_1 \end{pmatrix} = R(\vartheta_2)R(\vartheta_1)$

(La réponse de **d)** montrait déjà que ce produit matriciel est commutatif)

Solution 2.2 :

a) Translation pure : t $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Rotation pure : R $= \begin{pmatrix} cos(\vartheta) & -sin(\vartheta) & 0 \\ sin(\vartheta) & cos(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Translation de **t** puis Rotation de ϑ : $\begin{pmatrix} \boldsymbol{R_{2x2}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \boldsymbol{I_{2x2}} & \boldsymbol{t} \\ 0 \quad 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R_{2x2}} & \boldsymbol{Rt} \\ 0 \quad 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) Rotation de ϑ puis Translation de **t** : $\begin{pmatrix} \boldsymbol{I_{2x2}} & \boldsymbol{t} \\ 0 \quad 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \boldsymbol{R_{2x2}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R_{2x2}} & \boldsymbol{t} \\ 0 \quad 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) Elle correspond à c) c'est à dire rotation puis translation.

e) Rotation de − ϑ puis translation de − t : $\begin{pmatrix} \boldsymbol{I_{2x2}} & -\boldsymbol{t} \\ 0 \quad 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \boldsymbol{R^T} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R^T} & -\boldsymbol{t} \\ 0 \quad 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solution 2.3 :

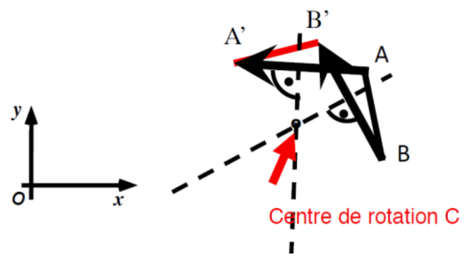
$$\begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & t_{x2} \\ s_2 & c_2 & t_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & t_{x1} \\ s_1 & c_1 & t_{y1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{12} & -s_{12} & c_2t_{x1} - s_2t_{y1} + t_{x2} \\ s_{12} & c_{12} & s_2t_{x1} + c_2t_{y1} + t_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R_1R_2} & \boldsymbol{R_2t_1} + \boldsymbol{t_2} \\ 0 \quad 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution 2.4 :

a) Oui, si on admet le cas spécial de translation pure comme ayant un centre de rotation à l'infini.

b)

1. Solution: A se déplace vers A'. Le centre de rotation sera donc sur la médiatrice de $\overline{A\text{–}A'}$



2. $\boldsymbol{p} - \boldsymbol{Rp} = \binom{a}{b} \mapsto \boldsymbol{p} = \frac{1}{2(1-cos(\vartheta))}\left(\binom{a}{b} - \boldsymbol{R}(-\vartheta)\binom{a}{b}\right)$

   (2 équations avec 2 inconnues **p**)

3. Pour le centre de rotation $\binom{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{1}} = \begin{pmatrix} c & -s & a \\ s & c & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\binom{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{1}}$

   Ce vecteur est donc le vecteur propre de la matrice homogène correspondant à la valeur propre 1.

c) Rot. 60° autour de l'origine : $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) Translation puis rotation : $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 0.5 & -\sqrt{3}/2 & 0.5 \\ \sqrt{3}/2 & 0.5 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e) Rot. 60° autour de **p** = $\binom{1}{1}$ **; Donc p – Rp** correspond aux valeurs de $t_x\ et\ t_y$.

$$\boldsymbol{p} - \boldsymbol{Rp} = \binom{1}{1} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} * \binom{1}{1} = \frac{1}{2}\binom{2-1+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}-1}$$

Matrice homogène : $\begin{pmatrix} 0.5 & -\sqrt{3}/2 & 1.366 \\ \sqrt{3}/2 & 0.5 & -0.366 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

f) $v_2 = R_h v_1$, $w_2 = R_h w_2$ Quatre équations avec quatre inconnues :

$$\begin{pmatrix} c & -s & a \\ s & c & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 - \sqrt{3} \\ 1 - \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} 2c + 2a = 1 - \sqrt{3} \\ 2s + 2b = 1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} c & -s & a \\ s & c & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 - \sqrt{3} \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} 2c - 2s + 2a = 2 - \sqrt{3} \\ 2s + 2c + 2b = 1 \end{cases}$$

Solution : $\begin{cases} c = \sqrt{3}/2 \\ s = -\frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2} - \sqrt{3} \\ b = 1 - \sqrt{3}/2 \end{cases}$, $rotation\ \vartheta = -30°$