Série 3

(les exercices à rendre sont marqués avec *)

Exercice 1*

Pour chacune des suites suivantes, trouver un $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $|a_n - \ell| < \epsilon$ pour tout $n \geq N$.

a) $a_n = \frac{n}{n+1}$, $\ell = 1$, $\epsilon = \frac{1}{10}$

b) $a_n = \frac{n}{n+1}$, $\ell = 1$, $\epsilon = \frac{1}{100}$

c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $\ell = 0$, $\epsilon = \frac{1}{100}$

d) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$, $\ell = 0$, $\epsilon = \frac{1}{4}$

Solution. On a que

a) Il s'agit de montrer que pour tous les n à partir d'un certain N, l'inégalité

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \frac{1}{10}$$

est toujours vraie. Or celle-ci est équivalente à $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{10}$. Son ensemble de solutions est donc l'ensemble des entiers $n \geq 10$. On peut alors prendre $N = 10$ (ou n'importe quel nombre plus grand que 10).

b) On résout

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \frac{1}{100},$$

dont la solution est $n \geq 100$, et on peut prendre $N = 100$.

c) Ici,

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \frac{1}{100},$$

Donc la solution est $n \geq 101$, donc on peut prendre $N = 101$.

d) Ici,

$$\left|\frac{n}{n^2+1} - 0\right| < \frac{1}{4},$$

qui est équivalente à $n^2 - 4n + 1 > 0$. Dans $\mathbb{R}$, l'inégalité $x^2 - 4x + 1 > 0$ a pour solution $]-\infty, 2-\sqrt{3}[\cup]2+\sqrt{3}, +\infty[$. Comme $2+\sqrt{3} \simeq 3.73$, on peut prendre par exemple $N = 4$.

Exercice 2*

Montrer que la définition du cours :

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : |x_n - \ell| < \epsilon \qquad (D1)$$

est équivalente à :

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n > N : |x_n - \ell| \leq \epsilon \qquad (D2)$$

Solution. On commence a démontrer que $(D1)$ implique $(D2)$. Alors soit $\varepsilon > 0$, par hypothèse

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq N_0 : |x_n - \ell| < \epsilon$$

Maintenant on pose $N = N_0$ et alors $\forall n > N = N_0$ on a que $|x_n - \ell| < \epsilon$ et donc $|x_n - \ell| \leq \epsilon$.

Montrons maintenant que $(D2)$ implique $(D1)$. Soit $\varepsilon > 0$, donc par hypothèse

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} \forall n > N_0 : \quad |x_n - \ell| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

On pose $N = N_0 + 1$ et on a donce que

$$\forall n \geq N = N_0 + 1 > N_0 : \quad |x_n - \ell| \leq \frac{\epsilon}{2} < \varepsilon.$$

Exercice 3

Soit $a_n = \frac{3n}{n+2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{a_n}{3} + \frac{3}{a_n})$

Solution. On remarque tout d'abord que la suite (a_n) est bornée, car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$|a_n| = \frac{3n}{n+2} \leq \frac{3n}{n} = 3,$$

et que elle est croissante, car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{3n(n+3)}{(n+2)(3n+3)} = \frac{3n^2+9}{3n^2+9n+6} \leq 1.$$

Donc on a que

a) La suite est croissante et bornée et on a donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n+2} = \mathrm{Sup}_{n\in\mathbb{N}^*}\{a_1, a_2, \ldots\} = \mathrm{Sup}_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{3n}{n+2} = 3$$

On peut aussi calculer cette limite en utilisant les propriétés algébriques de la limite :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{1+\frac{2}{n}} = \frac{3}{1+2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = \frac{3}{1+2\cdot 0} = 3\,.$$

b) Puisque $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \frac{1}{3}$$

c) En utilisant les propriétés algébriques de la limite on a que

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{a_n}{3} + \frac{3}{a_n}) = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty} a_n + \frac{3}{\lim_{n\to\infty} a_n} = \frac{1}{3}\cdot 3 + \frac{3}{3} = 2\,.$$

Exercice 4 (Vrai ou Faux)

Soit (a_n) une suite réelle.

a) Si (a_n) est croissante, alors (a_n^2) est croissante.

b) Si (a_n) est bornée, alors (a_n) converge.

c) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, alors $|a_n| \leq \epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ si et seulement si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

e) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, alors $\lim_{n\to\infty} \big(a_n \sin(n)\big) = 0$.

f) Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, alors (a_n) diverge.

g) Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, alors (a_n) converge.

h) Si (a_n) converge, il existe $M > 0$ tel que $|a_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

i) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, alors il existe $M > 0$ tel que $|a_n - a| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

j) Si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = M > 0$, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = +M$ ou $\lim_{n\to\infty} a_n = -M$.

k) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$, alors $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\ell|$.

l) Si $a_n \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et si $\lim_{n\to\infty} b_n = L$, alors $a_n \leq L$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution.

a) FAUX. Par exemple, $a_n = -\frac{1}{n}$ est croissante, mais $a_n^2 = \frac{1}{n^2}$ est décroissante. On a par contre le résultat suivant : si (a_n) est croissante *et si tous ses termes sont* $a_n \geq 0$, alors (a_n^2) est aussi croissante. (La preuve c'est un exercice.)

b) FAUX. Prendre par exemple $a_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors les termes de a_n alternent entre -1 et 1, ce qui fait que (a_n) est bornée mais ne converge pas.

c) FAUX. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, alors pour tout $\epsilon > 0$, on a $|a_n| \leq \epsilon$ pour tous les n *suffisamment grands*, dans le sens suivant : il existe un entier N (qui dépend de ϵ) tel que $|a_n| \leq \epsilon$ pour tous les $n \geq N$. Par contre, on ne sait pas si $|a_n| \leq \epsilon$ pour les $n < N$.

d) VRAI. En effet, si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe N tel que $|a_n - 0| = |a_n| \leq \epsilon$ pour tout $n \geq N$. Ceci est équivalent à dire que la suite $(|a_n|)_n$ tend vers zéro. Inversément, si $(|a_n|)_n$ tend vers zéro, comme on peut toujours écrire que

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|\,,$$

le Théorème des deux gendarmes implique $(a_n)_n$ tend aussi vers zéro.

e) VRAI. Comme $|\sin(n)| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leq |a_n \sin(n)| = |a_n| \cdot |\sin(n)| \leq |a_n|\,,$$

ou

$$-|a_n| \leq a_n \sin(n) \leq |a_n|\,.$$

Puisque (a_n) converge vers zéro, $(|a_n|)$ converge aussi vers zéro (point précédent). On conclut alors que $\lim_{n\to\infty} \big(a_n \sin(n)\big) = 0$.

f) FAUX. Prendre par exemple $a_n = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|1 - \frac{1}{n+1}\right| = 1$$

mais $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

g) FAUX. Prendre $a_n = (-1)^n$, qui ne converge pas, mais pour qui $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$.

h) VRAI. Comme (a_n) converge, elle est bornée. (Vu au cours.)

i) VRAI. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, alors $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - a) = 0$. Ainsi la suite (b_n) définie par $b_n = a_n - a$ est bornée. En appliquant le raisonnement de la question précédente à la suite (b_n), on a le résultat voulu.

j) FAUX. En effet, si $\lim_{n\to\infty}|a_n|$ existe et vaut $M > 0$, cela n'implique même pas l'existence de $\lim_{n\to\infty} a_n$. Par exemple, avec $a_n = (-1)^n$, on a que $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 1$, alors que a_n n'a pas de limite.

k) VRAI. En effet, on peut utiliser l'inégalité triangulaire inverse et écrire que

$$\big||a_n| - |a|\big| \leq |a_n - a|\,.$$

Comme $|a_n - \ell|$ tend vers zéro, $\big||a_n| - |\ell|\big|$ tend aussi vers zéro, et donc $|a_n|$ tend bien vers $|\ell|$.

l) FAUX. Comme contre-exemple, prenons $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = \frac{1}{n}$. On a bien $a_n \leq b_n$ pour tout $n \geq 1$, mais $b_n \to 0$, alors que $a_n > 0$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 5

Déterminer, si elle existe, la limite $\lim_{n\to\infty} a_n$ des suites suivantes :

a) $a_n = \dfrac{5n^2 - 3n + 2}{3n^2 + 7}$ b) $a_n = (-1)^n \dfrac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n}}$ c) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2 + 2}}{2n}$

Hint. Pour c), on pourra utiliser (après l'avoir démontrée) l'inégalité suivante :

$$1 \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \tfrac{x}{2} \qquad \forall x \geq 0$$

Solution.

a) En utilisant les propriétés élémentaires de la limite,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2 - 3n + 2}{3n^2 + 7} = \lim_{n\to\infty} \frac{5 - 3\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{3 + \frac{7}{n^2}} = \frac{5 - 3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} + 2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{3 + 7\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = \frac{5}{3}\,.$$

b) On a

$$\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^n \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n}}\right| = \lim_{n\to\infty} n^{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{12}}} = 0\,,$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n}} = 0\,.$$

c) Remarquons d'abord que pour tout $x \geq 0$,

$$1 = \sqrt{1} \leq \sqrt{1+x} = \sqrt{1 + 2\frac{x}{2}} \leq \sqrt{1 + 2\frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{x}{2}\right)^2} = 1 + \frac{x}{2}\,.$$

On a alors, puisque $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$,

$$1 \leq \sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} \leq 1 + \frac{1}{n^2} \quad \overset{\text{Thm2G}}{\Longrightarrow} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} = 1\,,$$

où *"Thm2G"* signifie “par le théorème des deux gendarmes”. Par conséquent,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2}}{2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2}\,.$$

Exercice 6

Soit $k, n \in \mathbb{N}$, avec $0 \leq k \leq n$. On définit le coefficient binomial par

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \ .$$

Remarque : parfois, $\binom{n}{k}$ s'écrit aussi C_n^k.

a) Vérifier que pour tout $n \geq k \geq 1$:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \ .$$

b) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a la *formule du binôme de Newton*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \ .$$

c) En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \ .$$

Solution.

a) Par un calcul direct on a

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \left(\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k} \right) \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \, \frac{k+n-k+1}{(n-k+1)k} \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \, \frac{n+1}{(n-k+1)k} \\
&= \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k} \ .
\end{aligned}$$

b) On démontre la formule du binôme de Newton par récurrence. Soit $n = 1$ et on a que

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^k y^{1-k} = \binom{1}{0} x^0 y^1 + \binom{1}{1} x^1 y^0 = x + y \ .$$

Supposons maintenant que la formule c'est vrai pour $n \in \mathbb{N}_{>1}$ et on veut démontrer que elle est vrai pour $n+1$. On calcule que

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \\
&= (x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^k y^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}x^k y^{n-k+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k+1} + \binom{n}{n}x^{n+1} + \binom{n}{0}y^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)x^k y^{n-k+1} + y^{n+1} + x^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^k y^{n-k+1} + \binom{n+1}{0}x^0 y^{n-0+1} + x^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}x^k y^{n-k+1} + x^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}x^k y^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1}x^{n+1}y^0 \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k y^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

c) Finalement, si on pose $x=y=1$ on trouve

$$2^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\ .$$

Exercice 7

À partir uniquement de la limite $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ (que vous pouvez admettre), calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$

Remarque : ici e c'est le nombre d'Euler, c.-à-d. $e = 2,71828182845904...$.
Solution. On a que

a) Un calcule direct montre que

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{2}{n}\Big)^n &= \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{n+2}{n}\Big)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{n+2}{n}\Big)^n\Big(\frac{n+1}{n+1}\Big)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{n+1}{n}\frac{n+2}{n+1}\Big)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^n\Big(\frac{n+2}{n+1}\Big)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} a_n\Big(1+\frac{1}{n+1}\Big)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} a_n\Big(1+\frac{1}{n+1}\Big)^{n+1}\Big(1+\frac{1}{n+1}\Big)^{-1} \\
&= \lim_{n\to\infty} a_n\Big(1+\frac{1}{n+1}\Big)^{n+1}\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} a_n a_{n+1}\frac{n+1}{n+2} == e\cdot e\cdot 1 = e^2.
\end{aligned}
$$

b) Des réarrangements semblables mènent à

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^n &= \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{n-1}{n}\Big)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{n-1}{n}\Big)^n\Big(\frac{1+\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n-1}}\Big)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{n-1}{n}\Big)^n\Big(\frac{n-1+1}{n-1}\Big)^n\Big(\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}\Big)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}(1+\frac{1}{n-1})^{-1}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}}\frac{n}{n-1} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-1} = \frac{1}{e} = e^{-1}
\end{aligned}
$$

c) En utilisant les points a) et b) on peut vite calculer que

$$
\lim_{n\to\infty}\Big(1-\tfrac{1}{n^2}\Big)^n = \lim_{n\to\infty}(1-\tfrac{1}{n})^n\cdot(1+\tfrac{1}{n})^n = e^{-1}\cdot e = 1\,.
$$

Exercice 8

Considérer la suite (a_n) définie par $a_1 := \frac{5}{2}$ et, pour $n\geq 1$,

$$
a_{n+1} := \frac{a_n^2+6}{5}.
$$

a) Montrer que $2\leq a_n\leq 3$ pour tout pour tout $n\geq 1$,

b) Montrer que (a_n) est décroissante,

c) Conclure que (a_n) converge et calculer sa limite.

Solution. On a que

a) On procède par récurrence. Soit $n = 1$, on a donc que $2 \leq a_1 = \frac{5}{2} \leq 3$. Supposons alors que $2 \leq a_n \leq 3$. On a d'une part que

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 6}{5} \leq \frac{3^2 + 6}{5} = 3\,,$$

et d'autre part que

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 6}{5} \geq \frac{2^2 + 6}{5} = 2\,,$$

ce qui montre bien que $2 \leq a_{n+1} \leq 3$.

b) On calcule

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2 + 6}{5} - a_n = \tfrac{1}{5}(a_n^2 - 5a_n + 6) = \tfrac{1}{5}\underbrace{(a_n - 3)}_{\leq 0}\underbrace{(a_n - 2)}_{\geq 0} \leq 0\,,$$

donc (a_n) est décroissante.

c) Étant minorée (par 2) et décroissante, (a_n) converge : $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$. La valeur de ℓ peut être trouvée en prenant $n \to \infty$ des deux côtés de l'identité $a_{n+1} = \frac{a_n^2+6}{5}$. Comme $a_{n+1} \to \ell$ et $a_n^2 \to \ell^2$, ℓ doit satisfaire

$$\ell = \frac{\ell^2 + 6}{5}\,.$$

Cette dernière a pour solutions $\ell_1 = 2$ et $\ell_2 = 3$. Comme la suite est décroissante, on doit avoir $\ell \leq a_1 = \frac{5}{2}$, la limite est donc $\ell = \ell_1 = 2$.