Série 4

(les exercices à rendre sont marqués avec *)

Exercice 1

Démontrer les assertions suivantes.

a) Montrer que la suite (x_n) donnée par $x_0 = 0$ et $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ quand $n > 0$, est de Cauchy.

b) Montrer que la suite (x_n) donnée par $x_n = (-1)^n$ n'est pas de Cauchy.

c) Montrer que la suite (x_n) donnée récursivement par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \frac{x_n+1}{x_n+2}$ quand $n > 0$ est de Cauchy et calculer sa limite.

d) On considère la suite donnée par 8, 8.8, 8.88, 8.888, 8.8888, ... Est-ce que cette suite converge et, si oui, quelle est sa limite ?
Indication : utiliser le fait que $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q}$ si $|q| < 1$.

Exercice 2 (Vrai ou Faux)

Soit (a_n) une suite réelle.

a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ alors $a_n > 0$ pour tout n.

b) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ alors (a_n) est croissante.

c) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ et si b_n est bornée, alors $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = +\infty$.

d) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = 0$.

e) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, alors $a_n + b_n$ est bornée.

f) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

g) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$

Exercice 3*

Montrer que (a_n) est une suite de Cauchy à partir de la définition.

a) $a_1 := 2$, puis $a_n = \frac{2}{3}a_{n-1} + 2$ pour $n \geq 2$.

b) $a_1 := 0$, puis $a_n = \frac{\sin(a_{n-1})+1}{2}$ pour $n \geq 2$.

Indication : $\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ (se démontre à l'aide des formules classiques appliquées au terme de droite).

Exercice 4 (Vrai au Faux)

Soient (a_n) et (b_n) des suites réelles.

a) Si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = a$, alors $\limsup_{n\to\infty} a_n = a$ et $\liminf_{n\to\infty} a_n = -a$.

b) Si $\limsup_{n\to\infty} |a_n| = 0$, alors (a_n) converge vers zéro.

c) Si $\limsup_{n\to\infty} a_n = 0$, alors $a_n \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) Si $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} b_n = 0$, alors $\limsup_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$.

e) $\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf\{M_1, M_2, \ldots\}$, où $M_k = \sup\{a_k, a_{k+1}, \ldots\}$.

f) Si $a_n = (-1)^n + \sin(n\frac{\pi}{2})$, alors $\limsup_{n\to\infty} a_n = 2$, et $\liminf_{n\to\infty} a_n = -2$.

Exercice 5

Soit (a_n) la suite

$$a_n := \sqrt{\alpha n^2 + \beta n} - \sqrt{\delta n^2 + \gamma n}\,,$$

où $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ sont des paramètres positifs ou nuls. Discuter le comportement a_n lorsque $n \to \infty$, en fonction des paramètres.

Exercice 6

Soit (x_n) une suite bornée. Montrer que (x_n) converge si et seulement si $\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n$.