Série 4

(les exercices à rendre sont marqués avec *)

Exercice 1

Démontrer les assertions suivantes.

a) Montrer que la suite (x_n) donnée par $x_0 = 0$ et $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ quand $n > 0$, est de Cauchy.

b) Montrer que la suite (x_n) donnée par $x_n = (-1)^n$ n'est pas de Cauchy.

c) Montrer que la suite (x_n) donnée récursivement par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \frac{x_n+1}{x_n+2}$ quand $n > 0$ est de Cauchy et calculer sa limite.

d) On considère la suite donnée par 8, 8.8, 8.88, 8.888, 8.8888, ... Est-ce que cette suite converge et, si oui, quelle est sa limite ?
Indication : utiliser le fait que $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q}$ si $|q| < 1$.

Solution. On a que

a) On a pour $n, m \geq 1$:

$$|x_{n+m} - x_n| = \Big|\frac{(-1)^{n+m}}{n+m} - \frac{(-1)^n}{n}\Big| = \Big|(-1)^n\Big(\frac{(-1)^m}{n+m} - \frac{1}{n}\Big)\Big| = \Big|\frac{(-1)^m}{n+m} - \frac{1}{n}\Big| = \Big|\frac{n(-1)^m - (n+m)}{(n+m)n}\Big|$$

et donc

$$|x_{n+m} - x_n| \leq \frac{m+2n}{(n+m)n} = \frac{1}{n + \frac{n^2}{m}} + \frac{2}{n+m} \leq \frac{3}{n},$$

ce qui montre que la suite est de Cauchy. En fait, pour $\varepsilon > 0$ donné, on choisit un entier N tel que $N > \frac{3}{\varepsilon}$ et on vérifie que $|x_p - x_q| < \varepsilon$ si $p, q > N$.

b) On dois montrer que

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall N \in \mathbb{N}, \exists m, n \geq N \text{ tel que } |x_n - x_m| > \varepsilon.$$

Il suffit de prendre $\varepsilon = 1$ et $n = N$, $m = N+1$ pour avoir $|x_m - x_n| = 2 > 1$.

c) Pour $n > 0$, on a, puisque $x_n > 0\ \forall n$, que

$$\begin{aligned}
|x_{n+1} - x_n| &= \Big|\frac{x_n+1}{x_n+2} - \frac{x_{n-1}+1}{x_{n-1}+2}\Big| \\
&= \Big|\frac{(x_n+1)(x_{n-1}+2) - (x_{n-1}+1)(x_n+2)}{(x_n+2)(x_{n-1}+2)}\Big| \\
&= \Big|\frac{x_n - x_{n-1}}{(x_n+2)(x_{n-1}+2)}\Big|
\end{aligned}$$

et donc

$$|x_{n+1} - x_n| < \frac{1}{2}|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1}{2^n}|x_1 - x_0|.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}|x_{n+m}-x_n| &= |x_{n+m}-x_{n+m-1}+x_{n+m-1}-...-x_{n+1}+x_{n+1}-x_n| \\ &\le \frac{1}{2^n}|x_1-x_0|\Big(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2^{m-1}}\Big) \\ &\le \frac{1}{2^{n-1}}|x_1-x_0|,\end{aligned}$$

ce qui montre que la suite est de Cauchy. Sa limite x vérifie $x=\frac{x+1}{x+2}$ ou encore $x^2+x-1=0$ et donc $x=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$.

d) On considère la suite donnée par

$$1,\ 1.1,\ 1.11,\ 1.111,\ 1.1111,\ ...$$

dont le terme général est $x_n=\sum_{k=0}^{n}\big(\frac{1}{10}\big)^k$ et qui converge vers $\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{10}{9}$ (utiliser l'indication). On en déduit que la suite donnée converge vers $\frac{80}{9}$.

Exercice 2 (Vrai ou Faux)

Soit (a_n) une suite réelle.

a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$ alors $a_n>0$ pour tout n.

b) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$ alors (a_n) est croissante.

c) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$ et si b_n est bornée, alors $\lim\limits_{n\to\infty} a_n+b_n=+\infty$.

d) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=-\infty$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} a_n+b_n=0$.

e) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=-\infty$, alors a_n+b_n est bornée.

f) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n=0$.

g) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}=1$

Solutions. On a que

a) FAUX. Contre-exemple, $a_n=n^2-100n$ tend vers $+\infty$, mais $a_n\le 0$ pour tous les $0\le n\le 100$. Ce que l'on peut garantir, c'est que si une suite tend vers l'infini, alors elle devient (et reste) strictement positive à partir d'un certain rang. En effet, en prenant par exemple $M=1$ on sait qu'il existe N tel que $a_n\ge M>0$ pour tout $n\ge N$.

b) FAUX. Contre-exemple, la suite $a_n=n-10(-1)^n$ tend vers $+\infty$, mais n'est pas croissante puisque $a_{2n-1}>a_{2n}$ pour tout n.

c) VRAI. Si $|b_n|\le C$ alors en particulier $b_n\ge -C$, et donc $a_n+b_n\ge a_n-C$. Comme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n-C=+\infty$, on a aussi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n+b_n=+\infty$.

d) FAUX. Dans ce cas, la limite de a_n+b_n est une *indétermination du type* "$\infty-\infty$" ; la limite dépend des cas. Par exemple avec $a_n=n^2$, $b_n=-n$, qui satifsont $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=-\infty$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n+b_n=+\infty$. Ou alors avec $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2+2n}=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty} -n=-\infty$, pour lesquelles on a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n+b_n=1$. Ou encore, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} n+(-1)^n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty} -n$, pour lesquelles $\lim\limits_{n\to\infty} a_n+b_n=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ et donc diverge (n'a pas de limite).

e) FAUX. Contre-exemple, $a_n = n^2$, $b_n = -n$.

f) FAUX. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ et $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, alors la limite $\lim_{n\to\infty} a_n b_n$ est un *indétermination du type* "$\infty \cdot 0$". On peut alors avoir tous les cas de figures. Voyons quelques exemples :

- Avec $a_n = n^2, b_n = \frac{1}{n}$, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty$,
- avec $a_n = n, b_n = \frac{1}{n}$, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 1$,
- avec $a_n = n, b_n = \frac{1}{n^2}$, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$,
- avec $a_n = n, b_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $a_n b_n$ n'a pas de limite.

g) FAUX. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ et $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, alors $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ est également une *forme indéterminée du type* "$\frac{\infty}{\infty}$".

Exercice 3*

Montrer que (a_n) est une suite de Cauchy à partir de la définition.

a) $a_1 := 2$, puis $a_n = \frac{2}{3}a_{n-1} + 2$ pour $n \geq 2$.

b) $a_1 := 0$, puis $a_n = \frac{\sin(a_{n-1})+1}{2}$ pour $n \geq 2$.

Indication : $\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ (se démontre à l'aide des formules classiques appliquées au terme de droite).

Solution. On a que

a) Pour $n = 2, 3, 4, \ldots$, on a

$$a_n = \frac{2}{3}a_{n-1} + 2$$
$$a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + 2$$

et ainsi

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2}{3}\left(a_n - a_{n-1}\right).$$

En itérant cette égalité $n-1$ fois, il suit que

$$|a_{n+1} - a_n| = \frac{2}{3}|a_n - a_{n-1}| = \left(\frac{2}{3}\right)^2 |a_{n-1} - a_{n-2}| = \ldots = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} |a_2 - a_1| = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

car $a_2 - a_1 = \frac{4}{3}$.

Soient maintenant $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $n > m$. Par l'inégalité triangulaire on a

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a_{n-1}| + |a_{n-1} - a_{n-2}| + \cdots + |a_{m+1} - a_m| = \sum_{k=m}^{n-1} |a_{k+1} - a_k|$$

et donc

$$\begin{aligned}
|a_n - a_m| \leq 2\sum_{k=m}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k &= 2\left(\frac{2}{3}\right)^m \left(\sum_{k=0}^{n-m-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k\right) \\
&= 2\left(\frac{2}{3}\right)^m \cdot \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-m}}{1-\frac{2}{3}} = 6\left(\frac{2}{3}\right)^m \underbrace{\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-m}\right)}_{\leq 1} \leq 6\left(\frac{2}{3}\right)^m.
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Pour avoir $|a_n - a_m| < \varepsilon$, il suffit donc que

$$\left(\frac{2}{3}\right)^m < \frac{\varepsilon}{6} \qquad \Leftrightarrow \qquad m \operatorname{Log}\left(\frac{2}{3}\right) < \operatorname{Log}\left(\frac{\varepsilon}{6}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad m > \frac{\operatorname{Log}\left(\frac{\varepsilon}{6}\right)}{\operatorname{Log}\left(\frac{2}{3}\right)} \,.$$

Ainsi, en choisissant $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$n_0 > \frac{\operatorname{Log}\left(\frac{\varepsilon}{6}\right)}{\operatorname{Log}\left(\frac{2}{3}\right)} \,,$$

on a que $|a_n - a_m| < \varepsilon$ pour tout $n, m \geq n_0$. Comme on peut trouver un tel n_0 pour tout $\varepsilon > 0$, la suite (a_n) est bien une suite de Cauchy.

b) On a pour tout entier $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
|a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{2}\big|\sin(a_n) - \sin(a_{n-1})\big| &= \frac{1}{2}\left|2\sin\left(\frac{a_n - a_{n-1}}{2}\right)\underbrace{\cos\left(\frac{a_n + a_{n-1}}{2}\right)}_{\leq 1}\right| \\
&\leq \left|\sin\left(\frac{a_n - a_{n-1}}{2}\right)\right| \leq \frac{|a_n - a_{n-1}|}{2} \,,
\end{aligned}$$

où on a utilisé à la dernière étape que $|\sin(x)| \leq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
En itérant cette inégalité $n-1$ fois, on obtient

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{|a_2 - a_1|}{2^{n-1}} = \frac{\left|\frac{1}{2} - 0\right|}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n} \,.$$

Pour tout couple d'entiers $n > m \geq 2$, on obtient en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$|a_n - a_m| \leq \sum_{k=m}^{n-1} |a_{k+1} - a_k| \,,$$

donc

$$\begin{aligned}
|a_n - a_m| &\leq |a_n - a_{n-1}| + |a_{n-1} - a_{n-2}| + \cdots + |a_{m+1} - a_m| \\
&\leq \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{2^k} \\
&= \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{n-m-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \frac{1}{2^m} \, \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{m-1}}\Bigg(\underbrace{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}}_{\leq 1}\Bigg) \leq \frac{1}{2^{m-1}} \,.
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Pour avoir $|a_n - a_m| < \varepsilon$, il faut donc que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2^{m-1}} < \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad -(m-1)\operatorname{Log}(2) < \operatorname{Log}(\varepsilon) \\
&\qquad \Leftrightarrow \qquad (m-1)\operatorname{Log}(2) > -\operatorname{Log}(\varepsilon) \qquad \Leftrightarrow \qquad m > \frac{\operatorname{Log}(2) - \operatorname{Log}(\varepsilon)}{\operatorname{Log}(2)} = \frac{\operatorname{Log}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}{\operatorname{Log}(2)} \,.
\end{aligned}$$

Ainsi, en choisissant $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$n_0 > \frac{\mathrm{Log}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}{\mathrm{Log}(2)} ,$$

on a $|a_n - a_m| < \varepsilon$ pour tout $n, m \geq n_0$. Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on a donc démontré que la suite (a_n) est une suite de Cauchy.

Remarque : Montrer qu'une suite (réelle) est de Cauchy est un moyen de montrer qu'elle converge, sans encore connaître sa limite.

Exercice 4 (Vrai au Faux)

Soient (a_n) et (b_n) des suites réelles.

a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = a$, alors $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = a$ et $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -a$.

b) Si $\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, alors (a_n) converge vers zéro.

c) Si $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, alors $a_n \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) Si $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, alors $\limsup\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$.

e) $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{M_1, M_2, \ldots\}$, où $M_k = \sup\{a_k, a_{k+1}, \ldots\}$.

f) Si $a_n = (-1)^n + \sin(n\frac{\pi}{2})$, alors $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 2$, et $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -2$.

Solution. On a que

a) FAUX. Prendre par exemple la suite constante $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $1 = \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

b) VRAI. Comme $0 \leq \liminf\limits_{n\to\infty} |a_n| \leq \limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|$, on a $\liminf\limits_{n\to\infty} |a_n| = \limsup\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$. Ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ et donc (a_n) converge vers zéro aussi.

c) FAUX. Prendre par exemple $a_n = \frac{1}{n} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\sup A_n = \sup\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots\right\} = \frac{1}{n}$ (cf. cours pour les détails), d'où $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

d) FAUX. Prendre par exemple $a_n = (-1)^n - 1$ et $b_n = (-1)^n + 1$. Alors $\sup A_n = \sup\{0, -2\} = 0$ et $\inf B_n = \inf\{2, 0\} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais $a_n - b_n = -2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

e) VRAI. En effet, par définition, $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{k\to\infty} M_k$. Or $M_{k+1} \leq M_k$ est décroissante. Le théorème fondamental montré au cours montre qu'une suite décroissante et minorée converge, et que sa limite est en fait son infimum : $\lim\limits_{k\to\infty} M_k = \inf\{M_1, M_1, \ldots\}$.

f) La première affirmation est FAUSSE, la deuxième est VRAIE. En effet, calculons quelques-uns des premiers termes de la suite :

$$a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_3 = -2,\ a_4 = 1,\ a_5 = 0,\ a_6 = 1,\ a_7 = -2,\ a_8 = 1,\ a_9 = 0\ \ldots$$

Donc $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, et $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -2$.

Exercice 5

Soit (a_n) la suite

$$a_n := \sqrt{\alpha n^2 + \beta n} - \sqrt{\delta n^2 + \gamma n}\,,$$

où $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ sont des paramètres positifs ou nuls. Discuter le comportement a_n lorsque $n \to \infty$, en fonction des paramètres.

Solution. Remarquons d'abord que a_n est toujours bien définie parce que on a toujours une nombre positif sous la racine.

Maintenant il faut faire seulement tous les cases possible.

- Si $\alpha = \beta = \delta = \gamma = 0$ alors on a que $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Si $\alpha \neq 0$ et $\beta = \delta = \gamma = 0$ alors $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (égal pour le cas où $\beta \neq 0$ et $\alpha = \delta = \gamma = 0$ et le cas $\alpha, \beta \neq 0$ et $\gamma = \delta = 0$).
- Si $\delta \neq 0$ et $\gamma = \alpha = \beta = 0$ alors on a que $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ (égal pour la cas $\gamma \neq 0$ et $\delta = \alpha = \beta = 0$ et le cas $\gamma, \delta \neq 0$ et $\alpha = \beta = 0$).
- Si $\alpha, \delta \neq 0$ et $\beta = \gamma = 0$ alors on a que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\alpha n^2} - \sqrt{\delta n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} n(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\delta})\end{aligned}$$

  donc la limite c'est $+\infty$ si $\sqrt{\alpha} - \sqrt{\delta} > 0$, $-\infty$ si $\sqrt{\alpha} - \sqrt{\delta} < 0$ et 0 si $\sqrt{\alpha} - \sqrt{\delta} = 0$.

Les autres cases sont traités en manière similaire.

Exercice 6

Soit (x_n) une suite bornée. Montrer que (x_n) converge si et seulement si $\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n$.

Solution. Vous pouvez trouver la preuve dans le livre *"Calcul différentiel et intégral"* de Jacques Douchet et Bruno Zwahlen, section `"Limite supérieure et limite inférieure d'une suite bornée"`.