Série 5

(les exercices à rendre sont marqués avec *)

Exercice 1*

Trouver le module et l'argument des nombres complexes suivants.

a) $2+2i$ b) $-1+i\sqrt{3}$ c) $-1+i\,\mathrm{tg}(3)$ d) $\frac{8i^{21}-2i^{11}}{1-i}$ e) 2^i

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$, puis représenter les solutions dans le plan complexe.

a) $z^5=1$ b) $z^2=-3+4i$ c) $z^4=-2i$ d) $z^3=-\sqrt{3}+i$

Exercice 3*

Trouver la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument de tous les nombres complexes z solutions de l'équation

$$z^2=(1+\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{2}})^8.$$

Exercice 4

Étudier la convergence des séries suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{3n+2}{4n+5}\Big)^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{3^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n-2}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\cos(\tfrac{1}{n})$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\tfrac{1}{n}-\tfrac{n-1}{n^2})$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^2+7}-n)$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos(\tfrac{\pi}{n+1}))$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\big(1-\tfrac{2}{n}\big)^{n^2}$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+4)(n-3)}{7n^3+n+2}$

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+4}-\sqrt{n}}{n}$

l) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^{100}}{e^{3(\log n)^2}}$

Exercice 5 (Vrai ou faux)

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite numérique.

a) Si $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge, alors $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

b) Si $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, alors $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ converge.

c) Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolument, alors $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.

d) Si $(a_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante, alors $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.

e) Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ converge.

f) Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolument, alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ converge.

g) La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ converge.

h) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

i) Soit $a_n = 5^n$ pour $n = 1, \ldots, 1000$, et $a_n := \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ si $n > 1000$. Alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Exercice 6

Soit (a_n) une suite de nombres réels. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$$

est une série convergente si et seulement si la suite (a_n) est convergente.