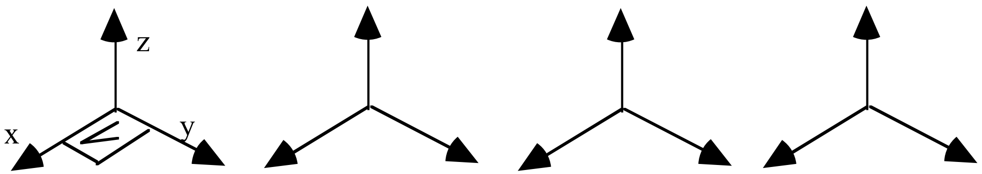
Rotations 3D et Quaternions

Mohamed Bouri
Hannes Bleuler

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
Laboratoire de Systèmes Robotiques.



Objectifs
de la séance de cours

- *Rotations*
  - *Matrices des cosinus directeurs*
  - *Formule de Rodrigues*
  - *Passage de la matrice de rotation à l'axes et l'angle de rotation*
  - *Quaternions*

- *Transformation homogène*

2.1.5 - Rotations en 3D:
Axe de rotation

- 2D:
- Angle
- Centre de rotation

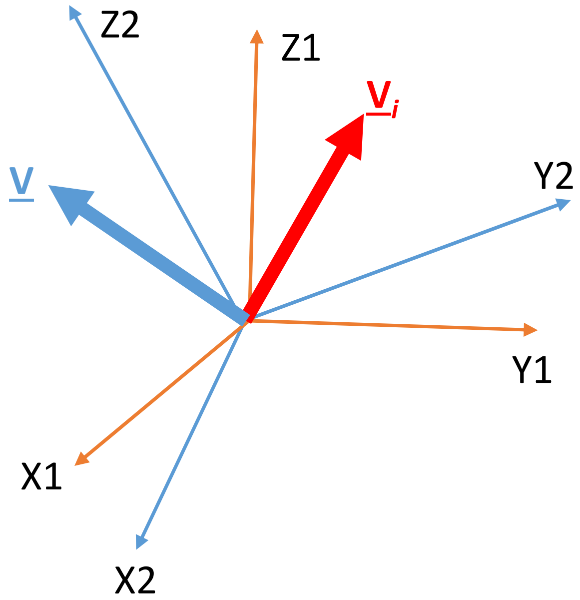
3D:

- Angle
- **Axe de Rotation**

En 3 dimensions, nous avons besoin de spécifier l'angle **et** l'axe de rotation

Comment trouver la matrice de rotation généralisée?

Matrice de rotation **généralisée**



Soit un vecteur $\underline{V}$ exprimé dans le repère de base {1} comme suit :

$\underline{\mathbf{V}} = V_{x1}.\underline{x}_1 + V_{y1}.\underline{y}_1 + V_{z1}.\underline{z}_1$

$\underline{\mathbf{V}} = V_{x2}.\underline{x}_2 + V_{y2}.\underline{y}_2 + V_{z2}.\underline{z}_2$

Nous pouvons écrire :

$\underline{\mathbf{V}} = V_{x1}.\underline{x}_1 + V_{y1}.\underline{y}_1 + V_{z1}.\underline{z}_1 = V_{x2}.\underline{x}_2 + V_{y2}.\underline{y}_2 + V_{z2}.\underline{z}_2$

$$V_{x1}.\underline{x}_1 + V_{y1}.\underline{y}_1 + V_{z1}.\underline{z}_1 = V_{x2}.\underline{x}_2 + V_{y2}.\underline{y}_2 + V_{z2}.\underline{z}_2$$

$$V_{x1}.\underline{x}_1.\,\underline{x}_1 + V_{y1}.\cancel{\underline{y}_1.\,\underline{x}_1} + V_{z1}.\cancel{\underline{z}_1.\,\underline{x}_1} = V_{x2}.\underline{x}_2.\,\underline{x}_1 + V_{y2}.\underline{y}_2\,.\,\underline{x}_1 + V_{z2}.\underline{z}_2\,.\,\underline{x}_1$$

$$\mathbf{V_{x1} = V_{x2}.\underline{x}_2.\,\underline{x}_1 + V_{y2}.\underline{y}_2\,.\,\underline{x}_1 + V_{z2}.\underline{z}_2\,.\,\underline{x}_1}$$

$$V_{x1}.\underline{x}_1.\underline{y}_1 + V_{y1}.\underline{y}_1.\underline{y}_1 + V_{z1}.\underline{z}_1.\underline{y}_1 = V_{x2}.\underline{x}_2.\underline{y}_1 + V_{y2}.\underline{y}_2.\underline{y}_1 + V_{z2}.\underline{z}_2.\underline{y}_1$$

$$V_{x1}.\cancel{\underline{x}_1.\underline{y}_1} + V_{y1}.\underline{y}_1.\underline{y}_1 + V_{z1}.\cancel{\underline{z}_1.\underline{y}_1} = V_{x2}.\underline{x}_2.\underline{y}_1 + V_{y2}.\underline{y}_2.\underline{y}_1 + V_{z2}.\underline{z}_2.\underline{y}_1$$

$$\mathbf{V_{y1} = V_{x2}.\underline{x}_2.\underline{y}_1 + V_{y2}.\underline{y}_2.\underline{y}_1 + V_{z2}.\underline{z}_2.\underline{y}_1}$$

$$\mathbf{V_{z1} = V_{x2}.\underline{x}_2.\underline{z}_1\ V_{y2}.\underline{y}_2.\underline{z}_1 + V_{z2}.\underline{z}_2.\ .\underline{z}_1}$$

Considération de la **transformation active** des vecteurs de base.

Matrice de rotation

Matrice des Cosinus directeurs

$V_{x1} = V_{x2}.\underline{x}_2 . \underline{x}_1 + V_{y2}.\underline{y}_2 . \underline{x}_1 + V_{z2}.\underline{z}_2 . \underline{x}_1$

$V_{y1} = V_{x2}.\underline{x}_2 . \underline{y}_1 + V_{y2}.\underline{y}_2 . \underline{y}_1 + V_{z2}.\underline{z}_2 . \underline{y}_1$

$V_{z1} = V_{x2}.\underline{x}_2 . \underline{z}_1 + V_{y2}.\underline{y}_2 . \underline{z}_1 + V_{z2}.\underline{z}_2 . \underline{z}_1$

$$\begin{bmatrix} V_{x1} \\ V_{y1} \\ V_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{x}2.\underline{x}1 & \underline{y}2.\underline{x}1 & \underline{z}2.\underline{x}1 \\ \underline{x}2.\underline{y}1 & \underline{y}2.\underline{y}1 & \underline{z}2.\underline{y}1 \\ \underline{x}2.\underline{z}1 & \underline{y}2.\underline{z}1 & \underline{z}2.\underline{z}1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{x2} \\ V_{y2} \\ V_{z2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \underline{x}2.\underline{x}1 & \underline{y}2.\underline{x}1 & \underline{z}2.\underline{x}1 \\ \underline{x}2.\underline{y}1 & \underline{y}2.\underline{y}1 & \underline{z}2.\underline{y}1 \\ \underline{x}2.\underline{z}1 & \underline{y}2.\underline{z}1 & \underline{z}2.\underline{z}1 \end{bmatrix}$$

Matrice de rotation

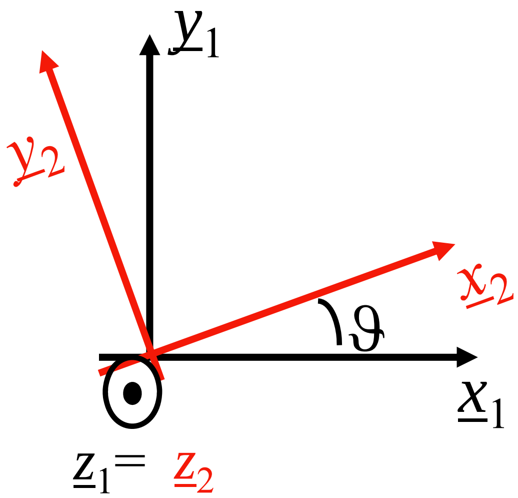
Matrice des Cosinus directeurs

Transformation passive

$$\begin{bmatrix} V_{x2} \\ V_{y2} \\ V_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{x}_1\underline{x}_2 & \underline{x}_1\underline{y}_2 & \underline{x}_1\underline{z}_2 \\ \underline{y}_1\underline{x}_2 & \underline{y}_1\underline{y}_2 & \underline{y}_1\underline{z}_2 \\ \underline{z}_1\underline{x}_2 & \underline{z}_1\underline{y}_2 & \underline{z}_1\underline{z}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{x1} \\ V_{y1} \\ V_{z1} \end{bmatrix}$$

$$R_p = \begin{bmatrix} \underline{x}_1\underline{x}_2 & \underline{x}_1\underline{y}_2 & \underline{x}_1\underline{z}_2 \\ \underline{y}_1\underline{x}_2 & \underline{y}_1\underline{y}_2 & \underline{y}_1\underline{z}_2 \\ \underline{z}_1\underline{x}_2 & \underline{z}_1\underline{y}_2 & \underline{z}_1\underline{z}_2 \end{bmatrix}$$

Calcul de la matrice de rotation
autour de l'axe Z



$$
\boldsymbol{R_z} = \begin{bmatrix} \underline{x2}.\underline{x1} & \underline{y2}.\underline{x1} & \underline{z2}.\underline{x1} \\ \underline{x2}.\underline{y1} & \underline{y2}.\underline{y1} & \underline{z2}.\underline{y1} \\ \underline{x2}.\underline{z1} & \underline{y2}.\underline{z1} & \underline{z2}.\underline{z1} \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} cos(\vartheta) & -sin(\vartheta) & 0 \\ sin(\vartheta) & cos(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}
$$

<u>Rappel</u>

$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|.\cos(\vec{u},\vec{v})$

Rotations around x,y,z

Exercice 3.1

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

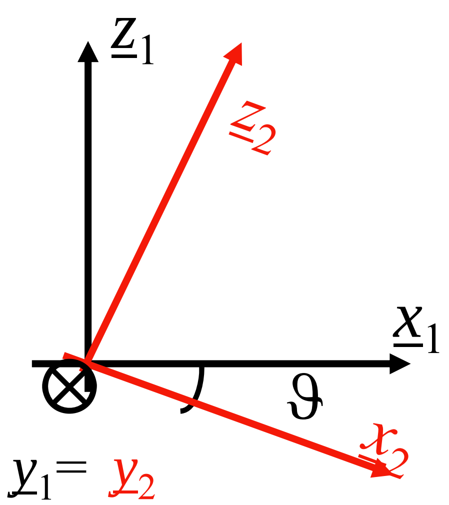
A démontrer

Matrice de rotation

Matrice des cosinus directeurs

Exercice 3.1

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \underline{x}2.\,\underline{x}1 & \underline{y}2.\,\underline{x}1 & \underline{z}2.\,\underline{x}1 \\ \underline{x}2.\,\underline{y}1 & \underline{y}2.\,\underline{y}1 & \underline{z}2.\,\underline{y}1 \\ \underline{x}2.\,\underline{z}1 & \underline{y}2.\,\underline{z}1 & \underline{z}2.\,\underline{z}1 \end{bmatrix}$$

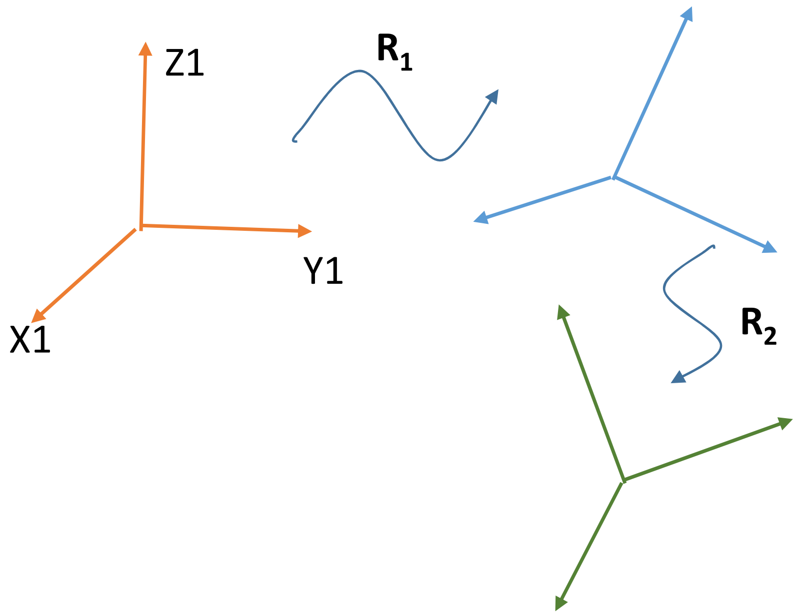


$$\mathbf{R}_y = [?]$$

Rotations successives

Règle :

La matrice de rotation combinée de plusieurs rotations est le produit des matrices de rotation correspondantes **en commençant toujours par celle associée à la dernière rotation.**



$$R = R_n \cdot R_{n-1} \cdot R_{n-2} \cdot \dots \cdot R_1$$

La rotation d'ordre n correspond à la dernière opération effectuée.

La matrice de rotation R1 est associée à la première rotation effectuée.

Exercice 3.2

Deduce the rotation matrix obtained in the following cases :

a) rotation by 90° around z, then rotation by 90° around y

b) rotation by 90° around y, then rotation by 90° around z

Exercice 3.3

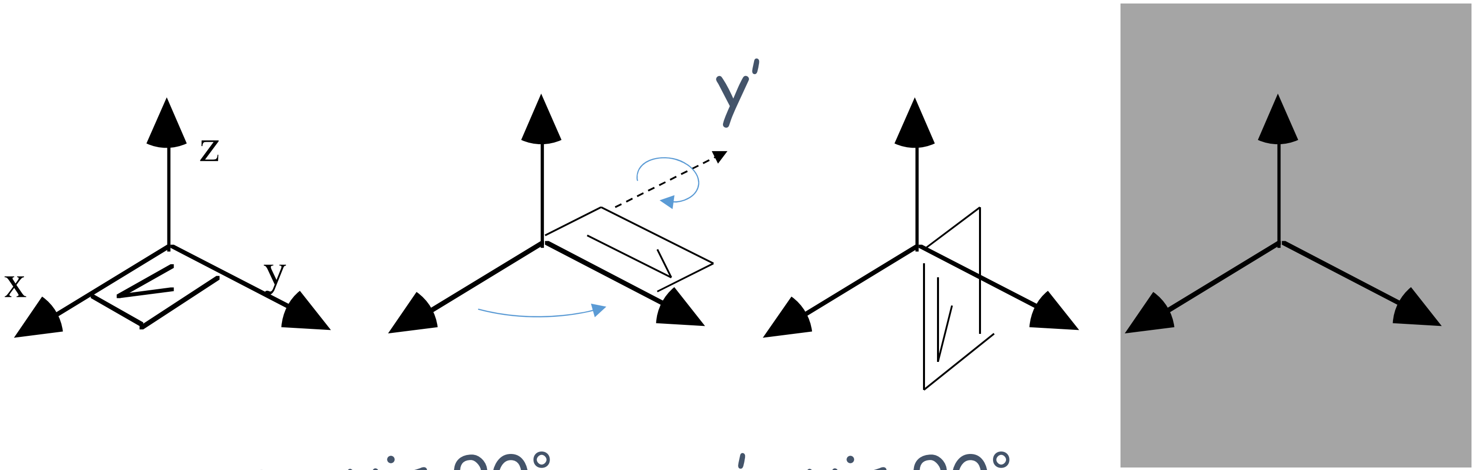
Solution par dessins isometriques :

Rappel:

- *Une **rotation horaire** possède une amplitude **négative***
- *Une **rotation anti-horaire** possède une amplitude **positive***

Rotation autour d'axes liés au corps

Cas a

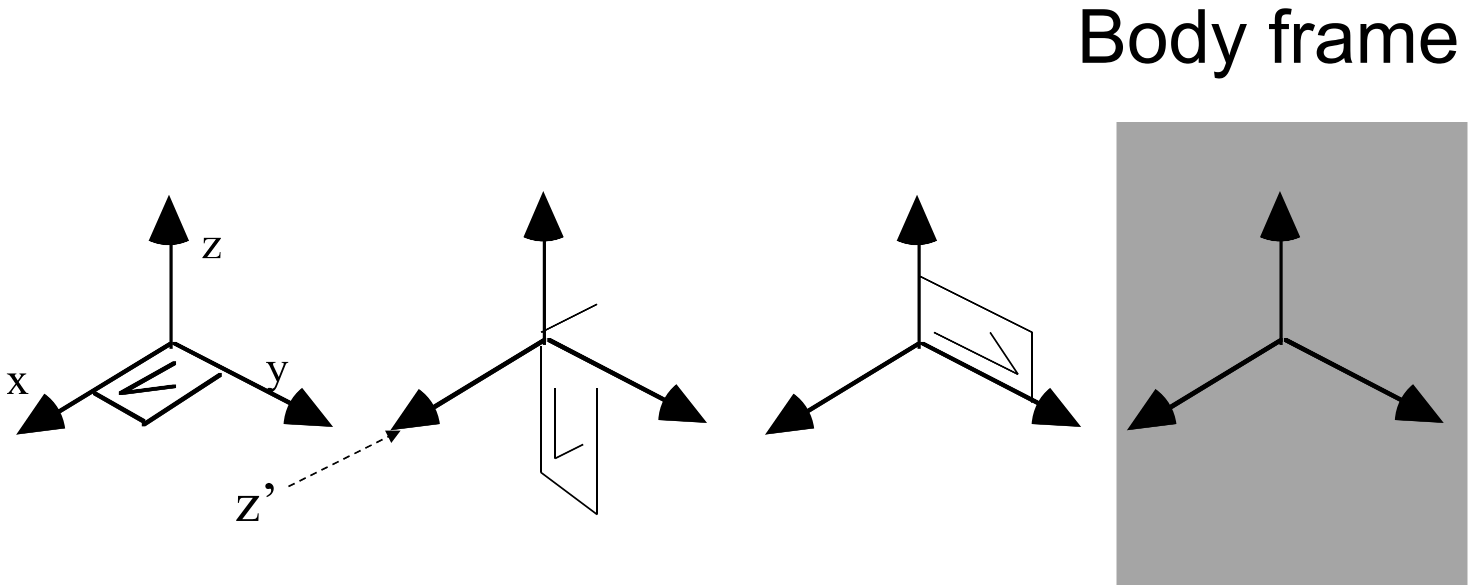


z axis 90°   y' axis 90°

« Body frame »

Rotation autour d'axes liés au corps

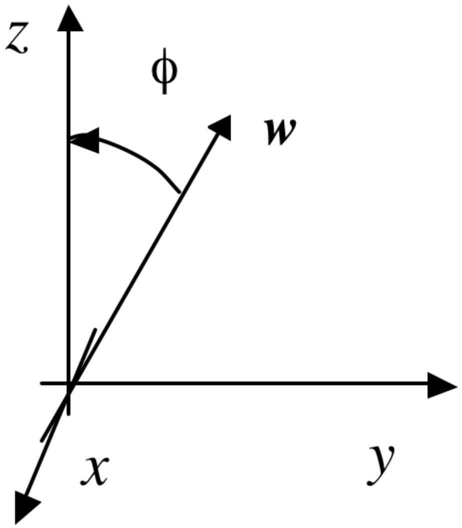
Cas b



y axis 90°   z' axis 90°

Exercice 3.4

Rotation d'un angle ϑ autour de l'axe *w*



$$R = R_x(-\phi)\,.\,R_z(\theta)\,.\,R_x(\phi)$$

Passage Axe/Angle => Matrice de cos. dir.

Rotation d'un angle ϑ autour d'un axe $[x, y, z]^T$ avec $\| [x, y, z]^T \| = 1$

$$\mathbf{R} = (1-\cos\vartheta)\begin{bmatrix} xx & xy & xz \\ xy & yy & yz \\ xz & yz & zz \end{bmatrix} + \cos\vartheta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \sin\vartheta \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Benjamin Olinde Rodrigues
1795 – 1851

Passage Matrice de cos. dir. => Axe/Angle

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$$

axis direction vector:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sin(\vartheta)} \begin{bmatrix} f-h \\ g-c \\ b-d \end{bmatrix}$$

$$\cos(\vartheta) = \frac{1}{2}(tr(\mathbf{R})-1)$$

$$\sin(\vartheta) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(f-h)^2+(g-c)^2+(b-d)^2} \qquad (11)$$

Exercice

Application de (11) à l'ex. 3.2

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sin(\vartheta)} \begin{bmatrix} f-h \\ g-c \\ b-d \end{bmatrix}$$

Utilisation de la relation (11)
Limitations

L'expression axe/angle de l'équation (11) présente **deux défauts majeurs** pour le traitement à l'ordinateur:

1.) La solution n'est pas unique (racine pos. ou neg.)

2.) sin(ϑ)=0 mène à une singularité (axe non-défini)

En pratique, il y aura une mauvaise condition numérique pour tout angle proche de 0 ou de 180°
et un blocage des algorithme pour ces deux cas!
« Blocage de Cardan »

Solution: Quaternions!

Ces deux inconvénients disparaissent de façon élégante en employant les **paramètres d'Euler*)** ou paramètres de Rodrigues.

Les quaternions sont employés en robotique industrielle.

*) A ne pas confondre avec les **angles d'Euler**

Les quaternions sont une généralisation des nombres complexes.

Après de longs et infructueux essais d'étendre l'interprétation géométrique des nb. Complexes dans le plan (**Argand**, **1768-1822**, mathématicien genevois) aux 3 dimensions, **Hamilton** (**1843**) a trouvé les deux astuces nécessaires:

1. Il n'y aura pas deux, mais trois parties imaginaires, en plus de la partie réelle.
2. Il faut abandonner la commutativité de la multiplication.

Partie réelle, parties imaginaires

Ces nouveaux nombres "hypercomplexes", contiennent

- une partie réelle scalaire λ_0
- trois parties imaginaires $[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]^T$ qui sont

.....interprétées **comme partie vectorielle** $\underline{\lambda}$.

le quaternion Q est donc le quadruple

$$Q = \{ \lambda_0 , \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} = \{ \boldsymbol{\lambda_0} , \underline{\boldsymbol{\lambda}}\} \qquad (11a)$$

Parties imaginaires:
Généralisation de i = √(–1)

$$Q = \{ \lambda_0 , \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} = \lambda_0 + i\,\lambda_1 + j\,\lambda_2 + k\,\lambda_3 \qquad (11d)$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \qquad (11e)$$

$$ij = k = -ji$$

Non-Commutativité!

$$jk = i = -kj$$

$$ki = j = -ik \qquad (11f)$$

Comment la rotation est-elle exprimée dans le quaternion?

- L'axe de rotation est donnée par la partie vectorielle $\underline{\lambda}$

$$\underline{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]^T$$

$$Q = \{ \lambda_0 , \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} = \{ \lambda_0 , \underline{\lambda}\}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Angle de rotation ϑ :

$$\lambda_0 = \cos(\vartheta/2)$$
$$|\underline{\lambda}| = \sin(\vartheta/2) \quad (11b)$$

L'axe de rotation disparaît pour les angles de rotation 0° , 360° , 720° …

L'angle de rotation J est introduit de la façon suivante dans le quaternion Q:

$$\lambda_0 = \cos(\vartheta/2) \quad \text{et} \quad \underline{\lambda} = \sin(\vartheta/2)\, [x, y, z]^T, \quad ||x, y, z||=1 \quad (11b')$$

Angle et quaternions:

$$\boxed{\begin{aligned}\lambda_0 &= \cos(\vartheta/2)\\ |\underline{\lambda}| &= \sin(\vartheta/2)\end{aligned}} \qquad (11b)$$

Donc, tous les quaternions de rotation sont unitaires:

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1 \qquad (11c)$$

Aussi connus comme les paramètres d'Euler ou paramètres de Rodrigues

Rotations combinées

Rappel des règles:

$$\left\{\begin{array}{l} i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ ij = k = -ji \\ jk = i = -kj \\ ki = j = -ik \end{array}\right\}$$

mènent au produit

$$Q_M Q_L = \{\mu_0, \underline{\mu}\}\{\lambda_0, \underline{\lambda}\} =$$

$$\{\mu_0\lambda_0 - \underline{\mu}^T\underline{\lambda} \ , \ \mu_0\underline{\lambda} + \lambda_0\underline{\mu} + \underline{\mu} \times \underline{\lambda}\} \qquad (11g)$$

Ce produit définit **l'enchaînement des rotations Q_L puis Q_M**

Exercice 3.5: Exercice 3.4 avec des quaternions.

Passage entre quaternions et matrice des cosinus directeurs

$$R=\begin{bmatrix} 2(\lambda_0^2+\lambda_1^2)-1 & 2(\lambda_1\lambda_2-\lambda_0\lambda_3) & 2(\lambda_1\lambda_3+\lambda_0\lambda_2) \\ 2(\lambda_1\lambda_2+\lambda_0\lambda_3) & 2(\lambda_0^2+\lambda_2^2)-1 & 2(\lambda_2\lambda_3-\lambda_0\lambda_1) \\ 2(\lambda_1\lambda_3-\lambda_0\lambda_2) & 2(\lambda_2\lambda_3+\lambda_0\lambda_1) & 2(\lambda_0^2+\lambda_3^2)-1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \qquad \underline{\lambda}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \operatorname{sgn}(r_{32}-r_{23})\sqrt{r_{11}-r_{22}-r_{33}+1} \\ \operatorname{sgn}(r_{13}-r_{31})\sqrt{r_{22}-r_{11}-r_{33}+1} \\ \operatorname{sgn}(r_{21}-r_{12})\sqrt{r_{33}-r_{22}-r_{11}+1} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_0=\frac{1}{2}\sqrt{r_{11}+r_{22}+r_{33}+1} \qquad =\cos(\vartheta/2)\geq 0$$

Effort de calcul
Composition de rotations

	Mul.	Add. & soustr.	total
Matrices de rot.	27	18	45
Quaternions	16	12	28

Pour la rotation de vecteurs, il faut utiliser les matrices

Matrices homogènes 3D

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3\times 3} & \mathbf{t}_{3\times 1} \\ \mathbf{0}_{1\times 3} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \qquad (12)$$

Une rotation autour d'un axe ne passant pas par l'origine se compose de la même façon que dans le cas 2D:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3\times 3} & \mathbf{p}_{3\times 1} \\ \mathbf{0}_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p}-\mathbf{R}\mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \qquad (13)$$

avec le vecteur $\boldsymbol{p}$ de l'origine O à un point quelconque sur l'axe de rotation

Rappel: Mouvement général 3D: Vis (screw, Schraube)

Recall from earlier lecture: The most general motion in 3D is a screw

Différence avec le cas 2D:

Le mouvement général en 3D est équivalent à une rotation autour d'un axe **plus une translation en direction de cet axe**.

Torseur cinématique

Torseur statique

Torseur: Paire de vecteurs, un polaire et un axial

Polar and Axial Vectors

(why not discussed in geometry & lin. algebr.?)

Polar vectors are **independent of the coordinate system**
Examples:
Force, velocity, acceleration, momentum ($\underline{\boldsymbol{p}}=m\underline{\mathbf{v}}$),
Electric field, poynting vector

Axial vectors **depend on the handedness** of the coordinates
Examples:
Moment, rotational speed $\underline{\boldsymbol{\omega}}$,
moment of momentum ($\underline{\boldsymbol{L}}=\mathbf{I}\underline{\boldsymbol{\omega}}$),
magnetic flux density, spin …