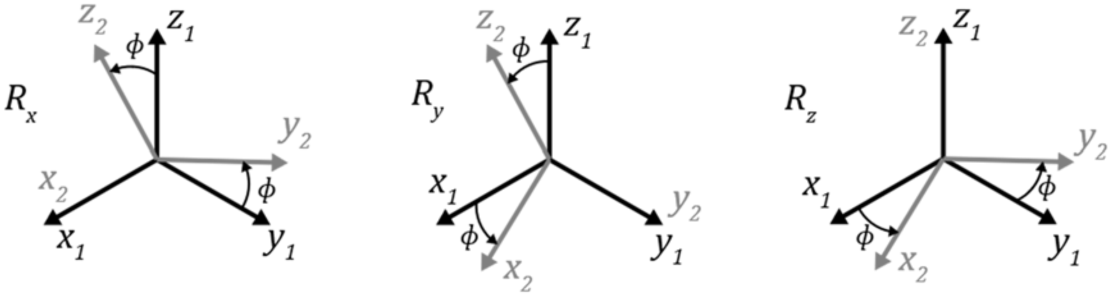
Corrigé 3 – Cinématique 2

12.10.2018

Solution 3.1 :

Rotations autour des axes x, y, z



$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \underline{x}2.\underline{x}1 & \underline{y}2.\underline{x}1 & \underline{z}2.\underline{x}1 \\ \underline{x}2.\underline{y}1 & \underline{y}2.\underline{y}1 & \underline{z}2.\underline{y}1 \\ \underline{x}2.\underline{z}1 & \underline{y}2.\underline{z}1 & \underline{z}2.\underline{z}1 \end{bmatrix}$$

En calculant chaque produit scalaire, on obtient :

$$\boldsymbol{R_x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\phi) & -sin(\phi) \\ 0 & sin(\phi) & cos(\phi) \end{bmatrix} \boldsymbol{R_y} = \begin{bmatrix} cos(\phi) & 0 & sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin(\phi) & 0 & cos(\phi) \end{bmatrix} \boldsymbol{R_z} = \begin{bmatrix} cos(\phi) & -sin(\phi) & 0 \\ sin(\phi) & cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solution 3.2 :

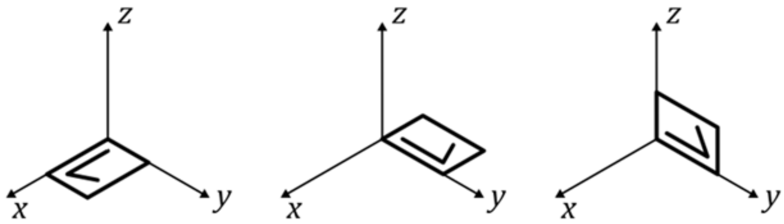
$$R_A = R_y(90°)R_z(90°) = \begin{bmatrix} cos(90°) & 0 & sin(90°) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin(90°) & 0 & cos(90°) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos(90°) & -sin(90°) & 0 \\ sin(90°) & cos(90°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$R_B = R_Z(90°)R_Y(90°) = \begin{bmatrix} cos(90°) & -sin(90°) & 0 \\ sin(90°) & cos(90°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos(90°) & 0 & sin(90°) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin(90°) & 0 & cos(90°) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

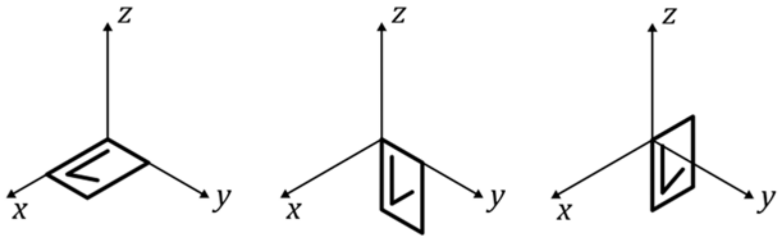
<u>**Ces deux séquences ne sont donc pas équivalentes.**</u>

Solution 3.3 : (!) ces rotations ne sont pas liées au body frame

A :



B :



En inspectant les dessins ci-dessus, on remarque que l'objet a le même « aspect » (forme du rectangle après projection à plat) avant et après la transformation. Ceci est une raison nécessaire pour que l'axe de rotation soit orthogonal au plan de la feuille.

En revanche, ce n'est pas une raison suffisante. En effet, pour la transformation B, l'axe de rotation n'est pas [1 ; 1 ; 1] (voir ex. 3.5), et pourtant l'objet garde bien le même « aspect » une fois projeté.

Cette méthode ne permet donc pas de déduire l'axe de rotation dans le cas général.

Solution 3.4 :

L'idée est d'effectuer une première rotation autour de **x** afin d'aligner **k** avec **z**, puis de tourner autour de **z**, puis de tourner autour de **x** dans le sens opposé.

$$
\begin{aligned}
R &= R_x(-\Phi)R_z(\theta)R_x(\Phi) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\phi) & -\sin(-\phi) \\ 0 & \sin(-\phi) & \cos(-\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin\theta & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\theta)\cos(\phi) & \sin(\theta)\sin(\phi) \\ \sin(\theta)\cos(\phi) & \cos^2(\phi)\cos(\theta) + \sin^2(\phi) & \cos(\phi)\sin(\phi)(1-\cos(\theta)) \\ -\sin(\theta)\sin(\phi) & \cos(\phi)\sin(\phi)(1-\cos(\theta)) & \sin^2(\phi)\cos(\theta) + \cos^2(\theta) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Solution 3.5 :

Formule à utiliser : (11b) du cours cinématique /p8 ou slide 26

$\lambda_0 = \cos(\vartheta/2)$ et $\underline{\lambda} = \sin(\vartheta/2)\,[x, y, z]^T$, $||x, y, z||=1$

Attention,

Il faut rendre la représentation normalisée du vecteur de rotation, soit $||x, y, z||=1$

Rotation de 90° autour de y : $Q_y = \left\{\cos(\frac{90°}{2}), \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\sin(\frac{90°}{2})\right\} = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \begin{bmatrix}0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{bmatrix}\right\}$

Rotation de 90° autour de z : $Q_z = \left\{cos(\frac{90°}{2}), \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}sin(\frac{90°}{2})\right\} = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \begin{bmatrix}0\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\right\}$

Rotation A :

$$Q_A = Q_y Q_z = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \begin{bmatrix}0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{bmatrix}\right\}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \begin{bmatrix}0\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\right\}$$

$$= \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \begin{bmatrix}0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}0\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}0\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \begin{bmatrix}1/2\\1/2\\1/2\end{bmatrix}\right\}$$

Axe et angle de rotation correspondants :

$$\theta = 2\,\mathrm{acos}(\lambda_0) = 2\,\mathrm{acos}\left(\frac{1}{2}\right) = 120° \qquad k = \frac{\lambda}{\sin(\frac{\theta}{2})} = \frac{1}{\sin(60°)}\begin{bmatrix}1/2\\1/2\\1/2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

Rotation B :

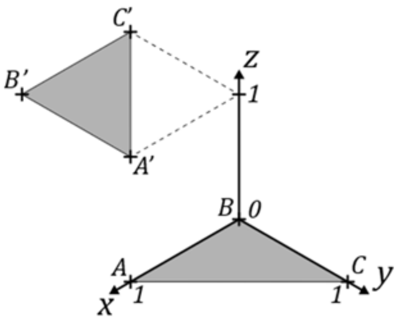
$$Q_B = Q_z Q_y = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \begin{bmatrix}0\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\right\}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \begin{bmatrix}0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{bmatrix}\right\}$$

$$= \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{bmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{bmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}0\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{bmatrix}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \begin{bmatrix}-1/2\\1/2\\1/2\end{bmatrix}\right\}$$

Axe et angle de rotation correspondants :

$$\theta = 2\,\mathrm{acos}(\lambda_0) = 2\,\mathrm{acos}\left(\frac{1}{2}\right) = 120° \qquad k = \frac{\lambda}{\sin(\frac{\theta}{2})} = \frac{1}{\sin(60°)}\begin{bmatrix}-1/2\\1/2\\1/2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

Solution 3.6 :



En faisant un dessin, on remarque que A, B et C sont sur un plan horizontal (z=0), tout comme A', B' et C'(z=1). Il faut donc une rotation autour d'un axe vertical, suivie d'une translation de 1 selon l'axe z.
Aussi, les points A et A' ont les même coordonnées x et y, on en déduit donc que l'axe de rotation passe par A.
On trouve que l'angle de rotation est de 90°.

Il n'existe pas de méthode calculatoire simple pour retrouver l'axe de rotation à partir de plusieurs points transformés. En revanche, il est possible de vérifier par le calcul l'axe, l'angle et le décalage trouvés par le dessin.

Pour cela, on calcule d'abord la matrice de rotation autour de l'axe passant par A, puis on construit la matrice homogène de transformation.

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_z(90°) = \begin{bmatrix} \cos(90°) & -\sin(90°) & 0 \\ \sin(90°) & \cos(90°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p} - \boldsymbol{Rp} = \boldsymbol{p_A} - \boldsymbol{R_z}(90°)\boldsymbol{p_A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En utilisant la formule (13) du cours :

$$\boldsymbol{M}_{z,A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{p} - \boldsymbol{Rp} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cette matrice de transformation réalise la rotation autour de l'axe parallèle à z passant par A, mais il manque encore la translation selon l'axe z, qui peut être ajoutée facilement :

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On peut maintenant vérifier cette transformation :

A : $M \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ B : $M \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

C : $M \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$