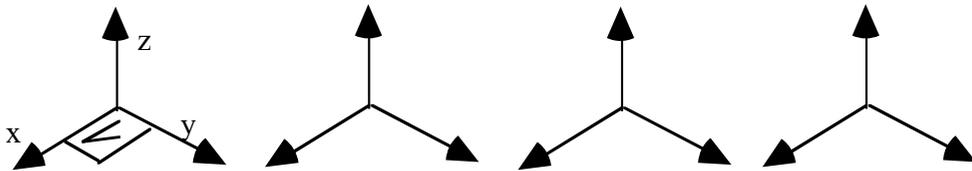


Modélisation géométrique directe et inverse

Hannes Bleuler
Mohamed Bouri

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
Laboratoire de Systèmes Robotiques.



2.1.7 Modèle Géométrique Direct MGD (Forward Kinematics)

Le MGD donne les *coordonnées opérationnelles*
en fonction des variables articulaire (variables robot)

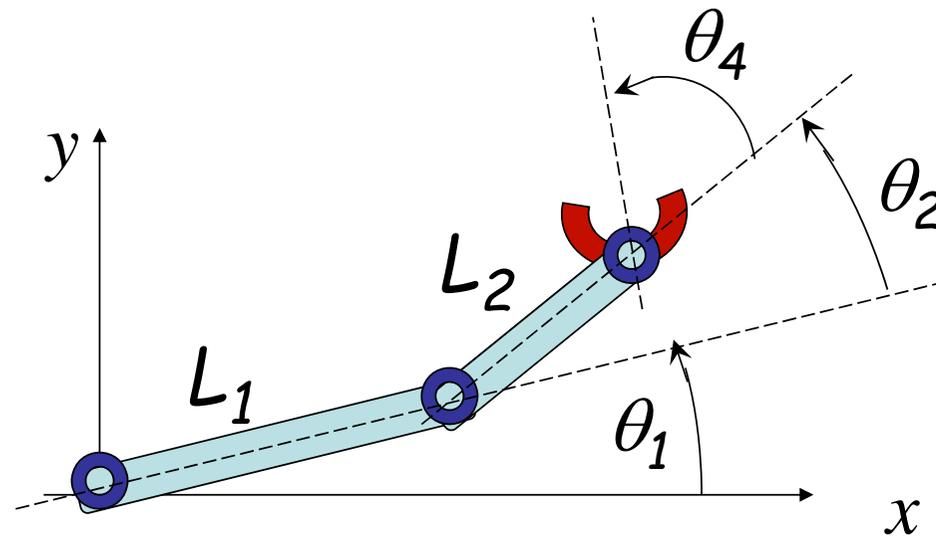
$$\begin{aligned} \bullet \quad \{x, y, z, Q\} &= \underline{F} (q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n) \\ &= \underline{F} (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i, \dots, \theta_n) \end{aligned}$$

*Position d'un point (Tool Center Point TCP)
et orientation (par ex. par un quaternion)*

Fig. 8 SCARA

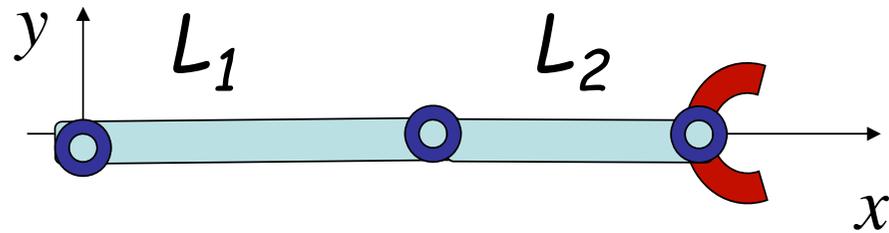
vu du dessus

($\theta_3 = \text{coordonnée verticale} = z$)

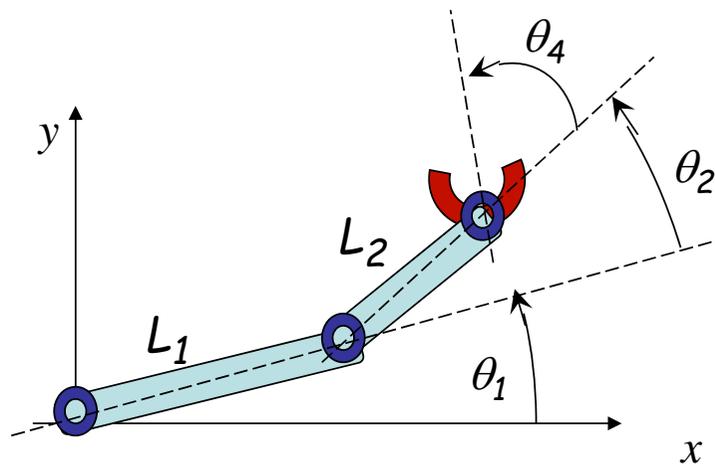


1. **Définition des variables articulaires** θ_i
2. **Définir les positions de référence** $\theta_i = 0$
(Notez bien la définition de $\theta_2 = 0$ par rapport au bras L_1 et non par rapport à x)
3. **Définir les paramètres du robot** L_i

Position de référence $\theta_i = 0$



Le MGD donne orientation et position de la main



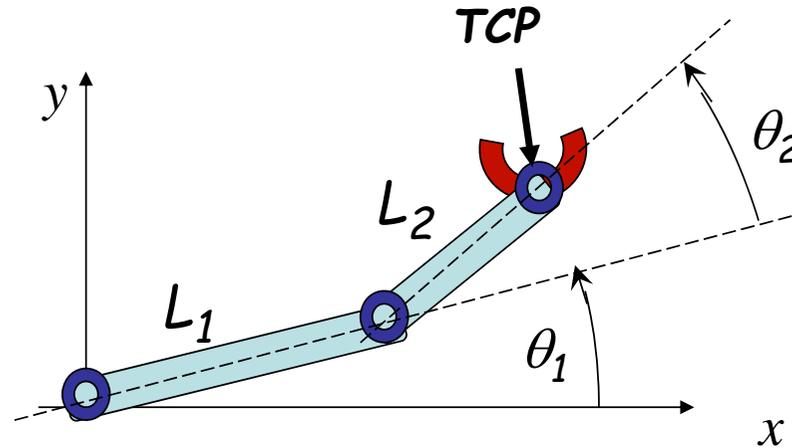
$$x = \dots ?$$

$$y = \dots ?$$

$$z = \theta_3 \quad (\textit{position verticale})$$

$$\varphi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_4$$

Position du centre de la main (tool center point TCP) & orientation de la main 5



$$x = L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) = L_1 c_1 + L_2 c_{12}$$

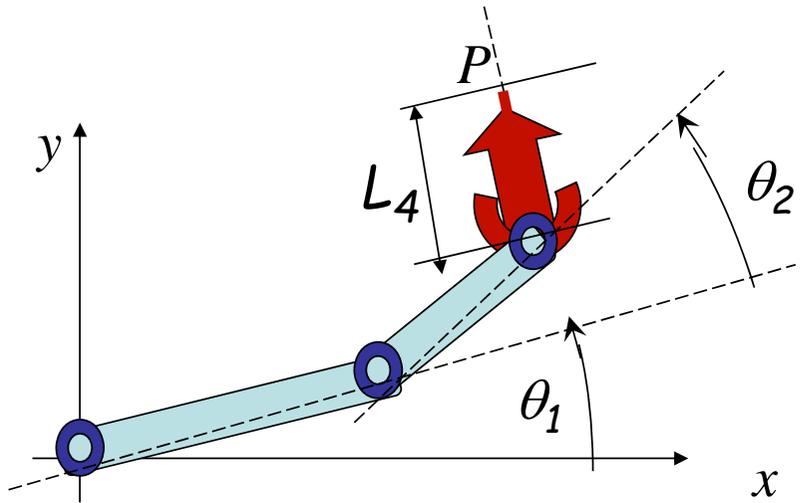
$$y = L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) = L_1 s_1 + L_2 s_{12}$$

$$z = \theta_3$$

$$\varphi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_4$$

Position & orientation d'un point P quelconque de l'outil

6



$$x = L_1 c_1 + L_2 c_{12} + L_4 c_{124}$$

$$y = L_1 s_1 + L_2 s_{12} + L_4 s_{124}$$

$$z = \theta_3$$

$$\varphi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_4$$

(L_4 n'est pas un paramètre du robot)

La même démarche pour un robot à 6 ddl devient très difficile => utiliser les matrices homogènes!

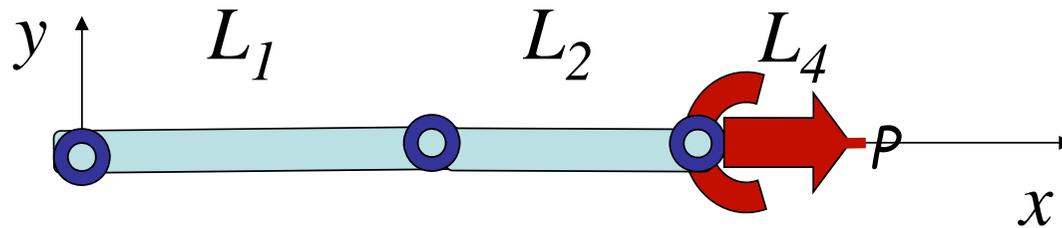
Appliquons les acquis des deux derniers cours au SCARA de l'exemple précédent:

Pour cet exemple , il suffit de considérer le problème en deux dimension.

Nous utilisons donc les **matrices homogènes 2D**, en ajoutant le facteur d'échelle 1 aux vecteurs.

Position de référence d'un point P quelconque de l'outil

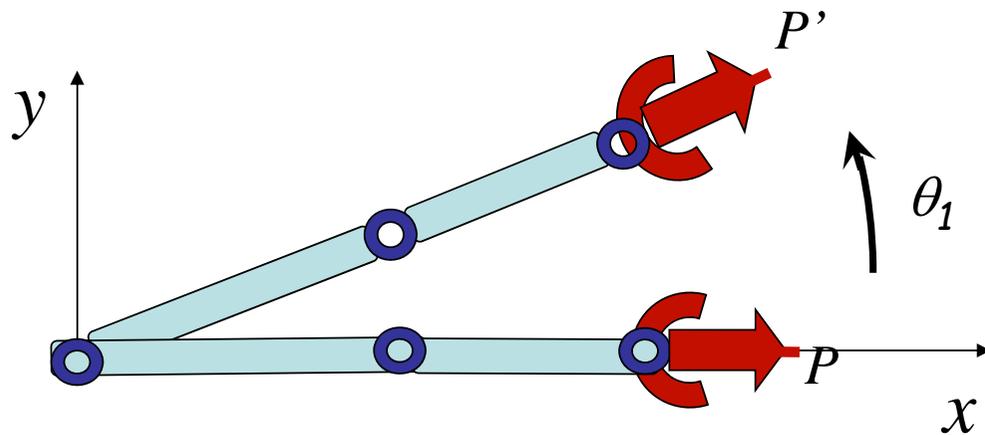
8



$$L_{124} = L_1 + L_2 + L_4$$

*(L_4 n'est pas
un paramètre du robot)*

1.) Rotation de θ_1 autour de l'origine



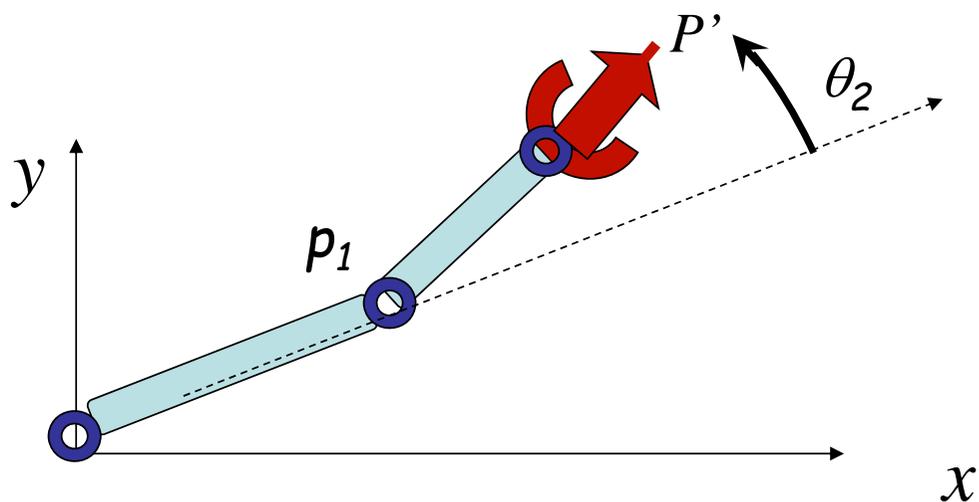
$$P' = P(\theta_1, \theta_2 = \theta_4 = 0) = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{124} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{0}' \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$L_{124} = L_1 + L_2 + L_4$$

2.) Rotation de θ_2 autour de p_1

Centre de rotation

$$\underline{p}_1 = \begin{bmatrix} L_1 c_1 \\ L_1 s_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$P(\theta_1, \theta_2) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_2 & p_1 - \mathbf{R}_2 p_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{124} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P(\theta_1, \theta_2) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_2 & \rho_1 - \mathbf{R}_2 \rho_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{12} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{\rho}(\theta_j = 0) = \begin{bmatrix} L_1 + L_2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

résultat intermédiaire: $\mathbf{R}_2 \rho_1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 \\ s_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ s_1 \end{bmatrix} L_1 = \begin{bmatrix} c_2 c_1 - s_2 s_1 \\ c_1 s_2 + c_2 s_1 \end{bmatrix} L_1 = \begin{bmatrix} c_{12} \\ s_{12} \end{bmatrix} L_1$

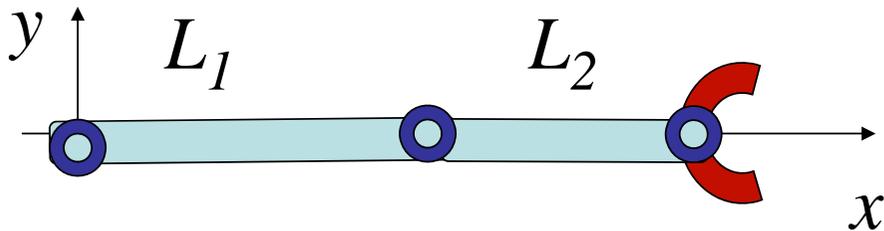
$$P(\theta_1, \theta_2) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{12} & \begin{bmatrix} (c_1 - c_{12})L_1 \\ (s_1 - s_{12})L_1 \end{bmatrix} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{12} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{12}L_{12} + (c_1 - c_{12})L_1 \\ s_{12}L_{12} + (s_1 - s_{12})L_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 L_1 + c_{12} L_2 \\ s_1 L_1 + s_{12} L_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Problème: Centres de rotations!

Solution: Effectuer les rotations dans l'ordre inverse:

θ_4 puis θ_3 puis θ_2 puis θ_1

$$MGD = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_2 & \mathbf{p}_1 - \mathbf{R}_2 \mathbf{p}_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_4 & \mathbf{p}_2 - \mathbf{R}_4 \mathbf{p}_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



avec $\mathbf{p}_1 = [L_1, 0]'$
et $\mathbf{p}_2 = [L_{12}, 0]'$

1. Rot. de θ_4 de autour de $[L_1 + L_2, 0]^T$
2. Rot. de θ_2 de autour de $[L_1, 0]^T$
3. Rot. de θ_1 de autour de $[0, 0]^T$

$$1.) \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p} - \mathbf{R}\mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & ? \\ s_4 & c_4 & ? \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Rot. de θ_4 de autour de $[L_1 + L_2, 0]^T$

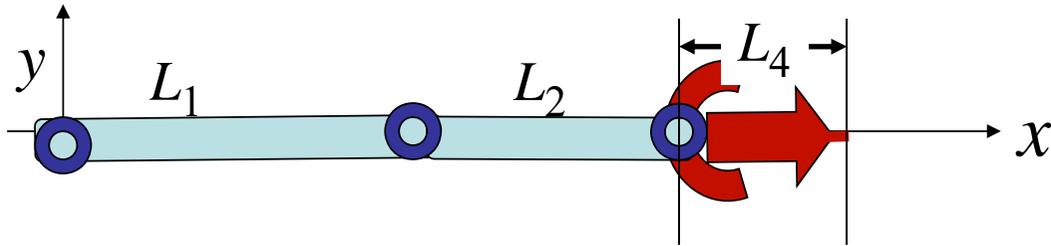
$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p} - \mathbf{R}\mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & L_{12}v_4 \\ s_4 & c_4 & -L_{12}s_4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

avec les définitions $\text{versine}(\theta) = 1 - \cos\theta$

donc $v_4 = 1 - \cos\theta_4$

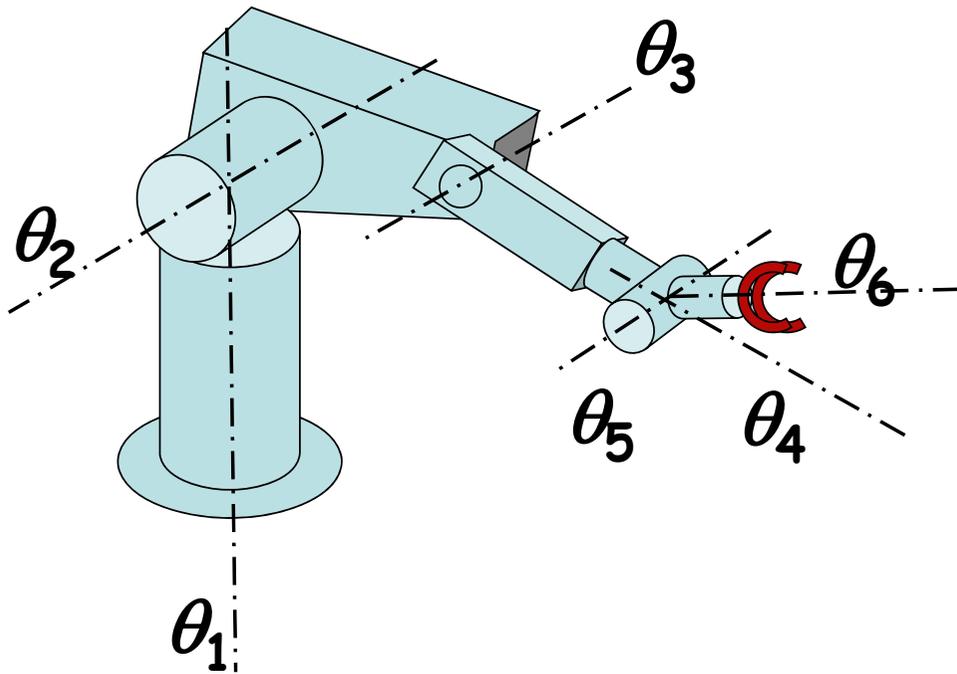
et $L_{12} = L_1 + L_2$

Résultat: Etablissement du MGD en 4 pas



1. Définir les variables robots
2. Définir leurs positions de référence
3. Définir les paramètres du robot
4. Enchaîner les mouvements successifs (multiplication de matrices homogènes) en allant de l'extrémité vers la base

1. Variables robot



Convention:
Partir de la
base vers la main

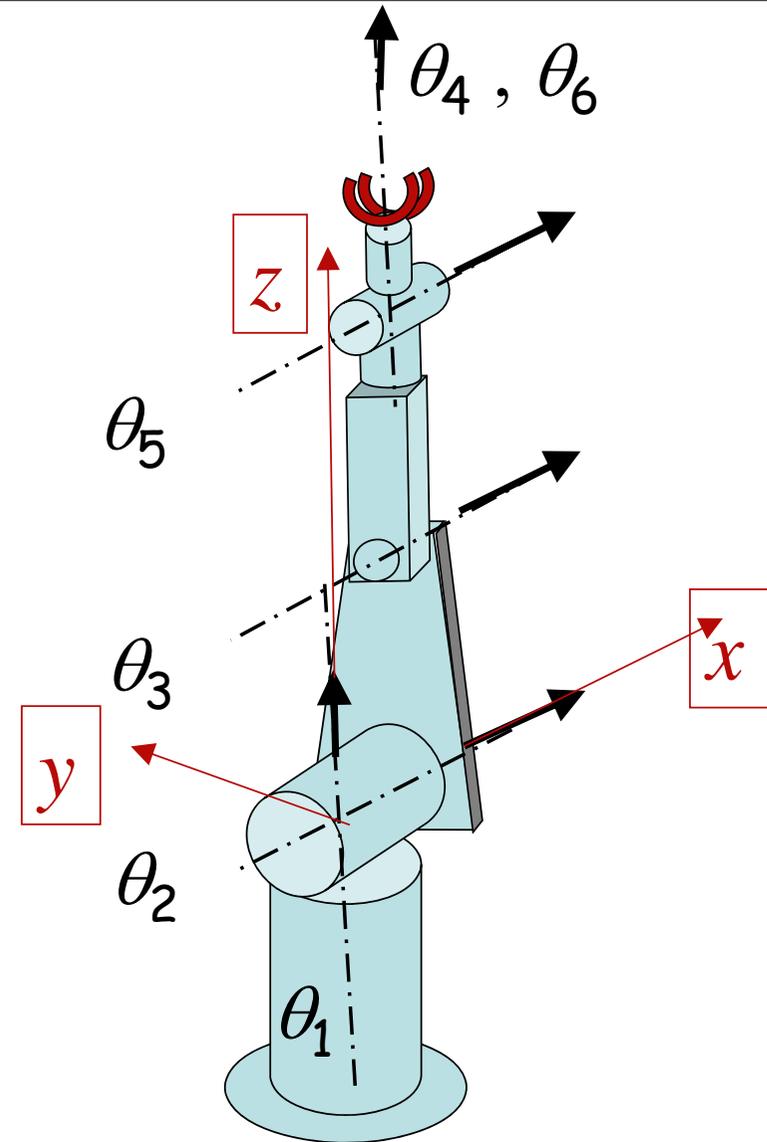
2. Position de référence

17

$$\theta_i = 0$$

Les flèches indiquent
le sens de rotation positif

Le référentiel (x,y,z) est fixe
(coordonnées opérationnelles)



3. Paramètres du robot

Les axes q_1 et q_2 se croisent $\Rightarrow L_1=0$

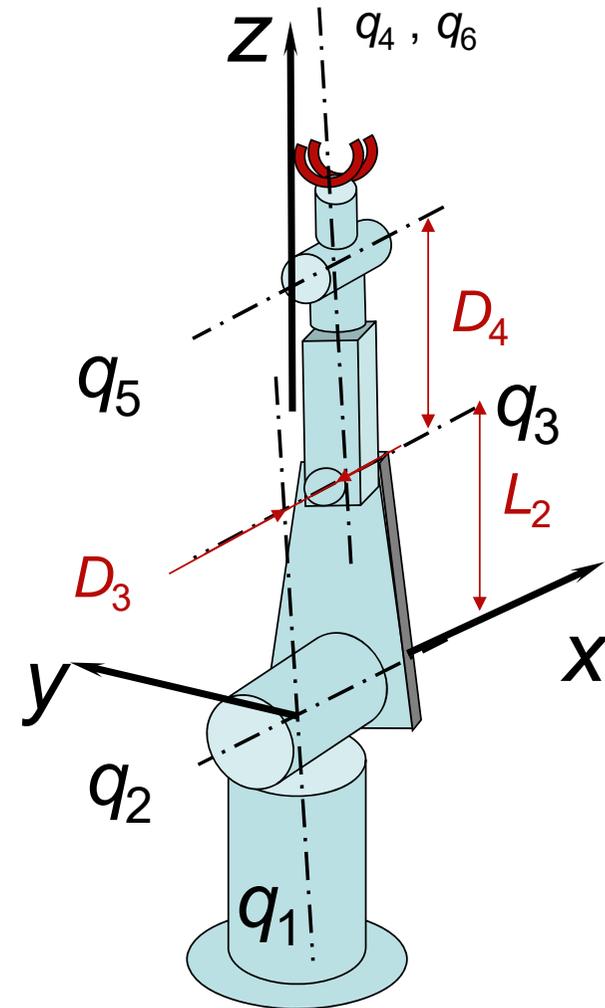
Les axes q_2 et q_3 sont parallèles, dist. L_2

Les axes q_3 et q_4 se croisent $\Rightarrow L_3=0$

Les axes q_1 et q_4 sont décalés sur l'axe q_3 d'une distance D_3

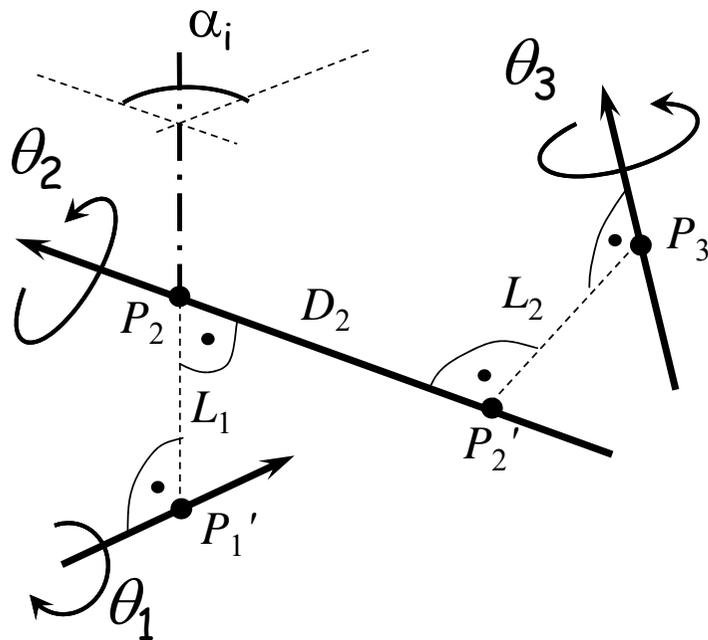
Les axes q_4 et q_5 se croisent $\Rightarrow L_4=0$

Les axes q_3 et q_5 sont décalés sur l'axe q_4 d'une distance D_4



Généralisation de la paramétrisation: Paramètres Denavit-Hartenberg

Les axes de rotation successifs θ_i sont reliés par les perpendiculaires communes, définissant ainsi des points de repère P_i



Passage de l'axe 1 à l'axe 2:
Déplacement de L_1 ,
Angle fixe de α_1 autour de L_1

L_i : Link length
 α_i : Twist angle
Distance de P_i à P_i' :
Joint offset D_i

Articulation linéaire: Variable D , angle α fixe.

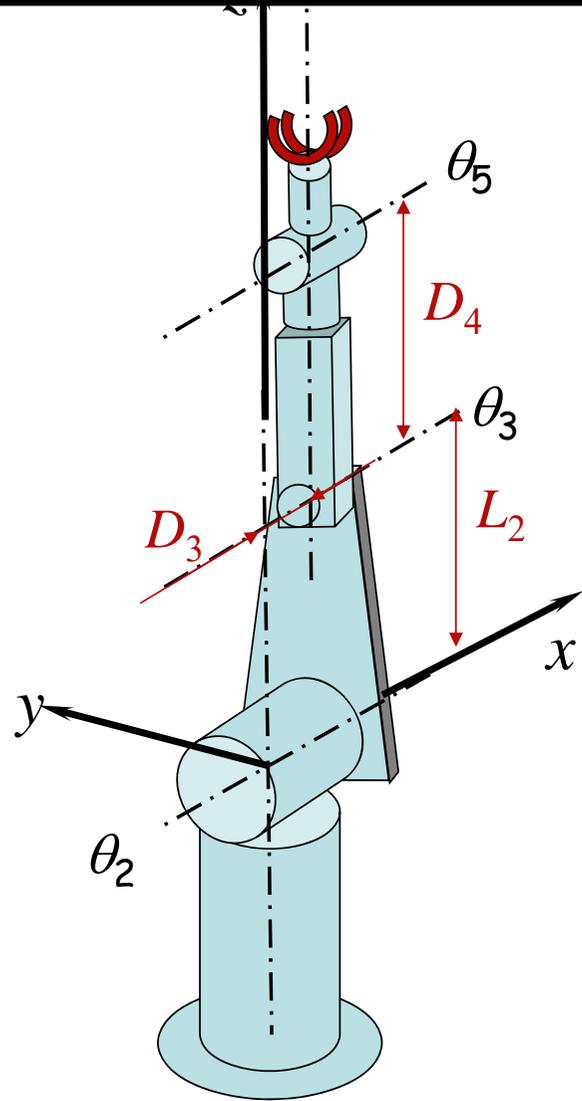
4. Enchaînement des mouvements

1. Rot. de q_6 autour de l'axe z ,
décalée de $\mathbf{p} = [D_3, 0, 0]'$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{p}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p} - \mathbf{R}\mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p} - \mathbf{R}\mathbf{p} = \begin{bmatrix} D_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_3 v_6 \\ -D_3 s_6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p} - \mathbf{R}\mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & D_3 v_6 \\ s_6 & c_6 & 0 & -D_3 s_6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K}_6$$



4. Enchaînement des mouvements

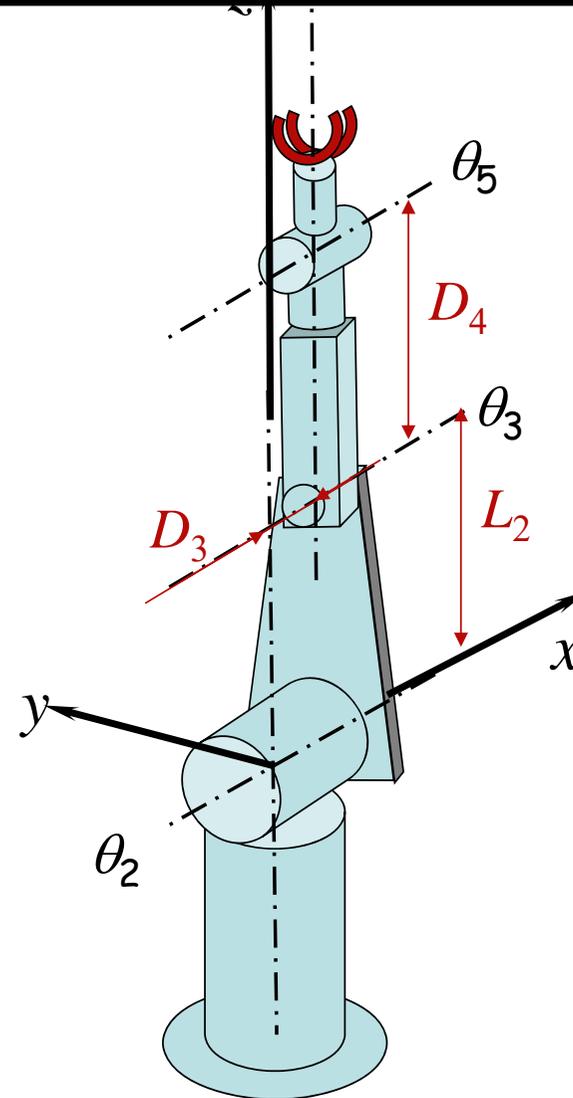
21

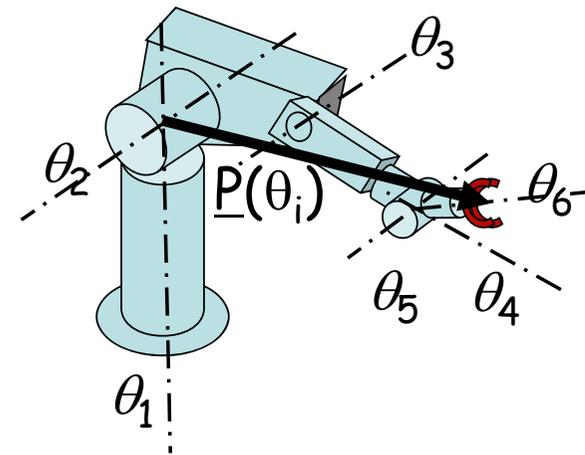
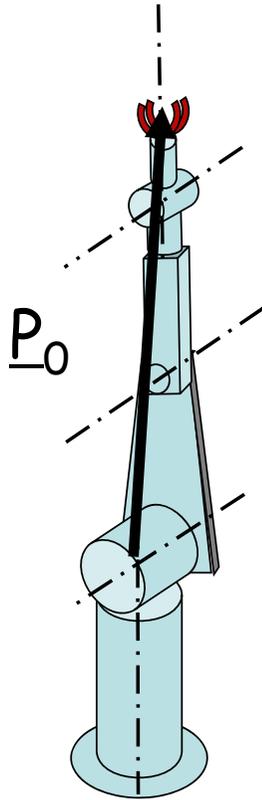
2. Rot. de θ_5 autour de l'axe x ,
décalé de $\underline{p} = [0, 0, L_2 + D_4]'$

$$\underline{p} - \mathbf{R}\underline{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_{24} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_5 & -s_5 \\ 0 & s_5 & c_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ L_{24} s_5 \\ L_{24} v_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \underline{p} - \mathbf{R}\underline{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_5 & -s_5 & L_{24} s_5 \\ 0 & s_5 & c_5 & L_{24} v_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K}_5$$

et ainsi de suite pour $\mathbf{K}_4, \mathbf{K}_3, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_1$





Modèle Géométrique direct du robot:

$$\underline{P}(\theta_i) = (K_1 \ K_2 \ K_3 \ K_4 \ K_5 \ K_6) \underline{P}_0$$

Ex.: Donnez les 6 matrices homogènes K_i

2.1.8 Représentation de l'orientation: Angles d'Euler

L'orientation est très souvent exprimée en angles autour de trois axes **fixés au corps en mouvement**.

(Figures p. 2.1-11)

Historiquement ce sont précession, nutation, rotation propre (axes x , y , z liés au corps)

Généralisation: On trouve 12 jeux d'angles différents

Ces angles furent définis une première fois par Euler comme précession, nutation et rotation propre d'un gyroscope

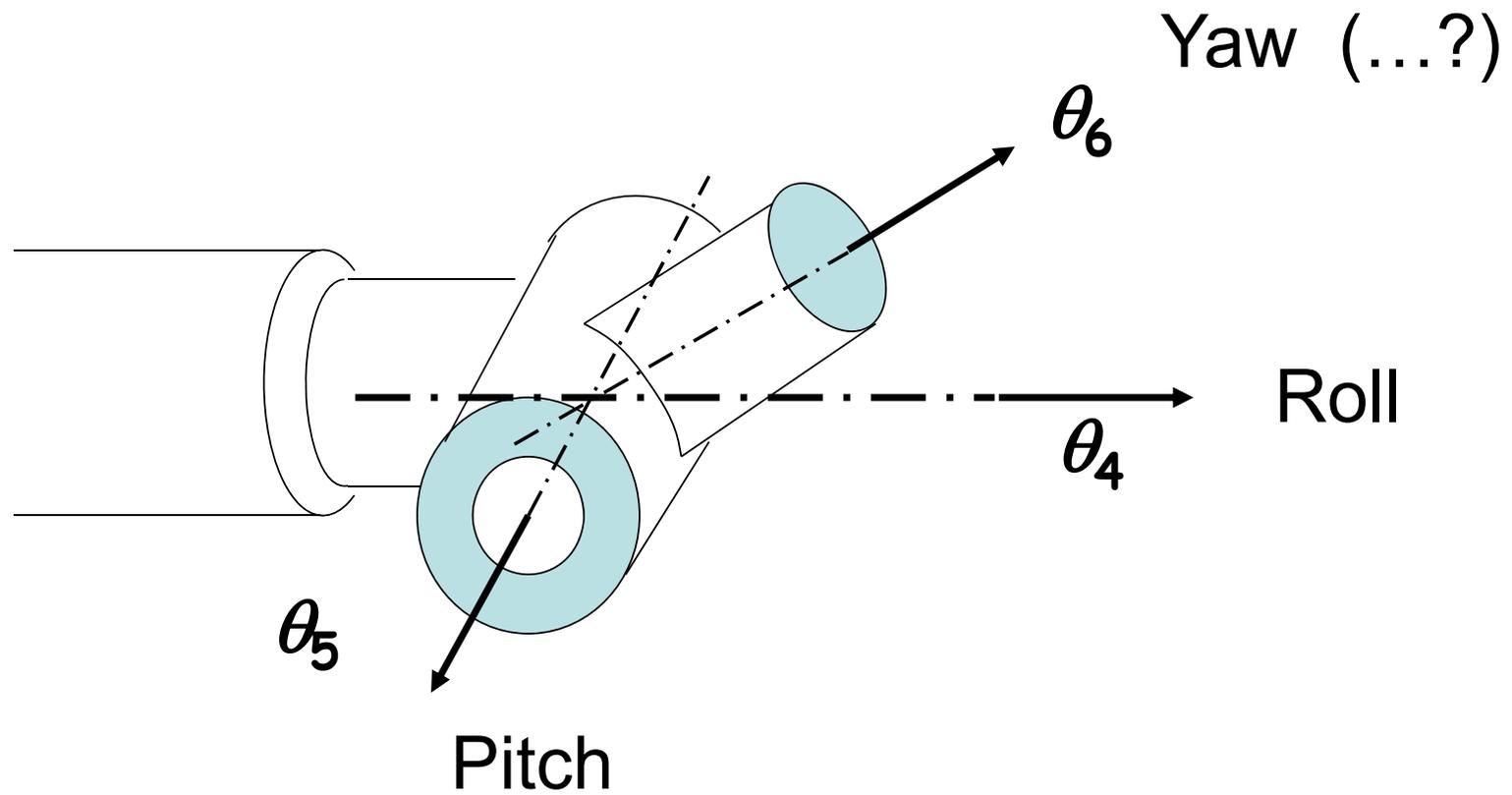
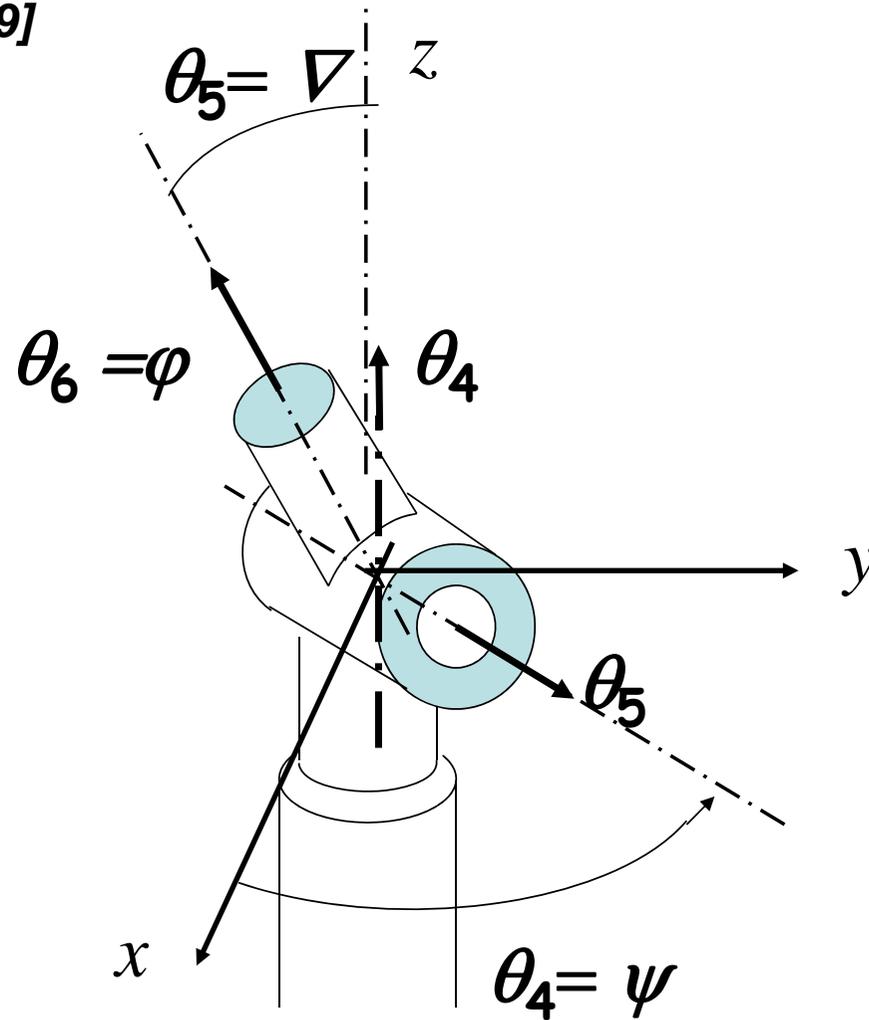


Fig 10

Poignet à 3 axes: Angles d'Eule

[Gruber p. 209]



(ψ, Δ, φ)

Précession

nutation

rotation propre

axes « z, x, z »

liés à la

main du robot

Poignet cardanique:

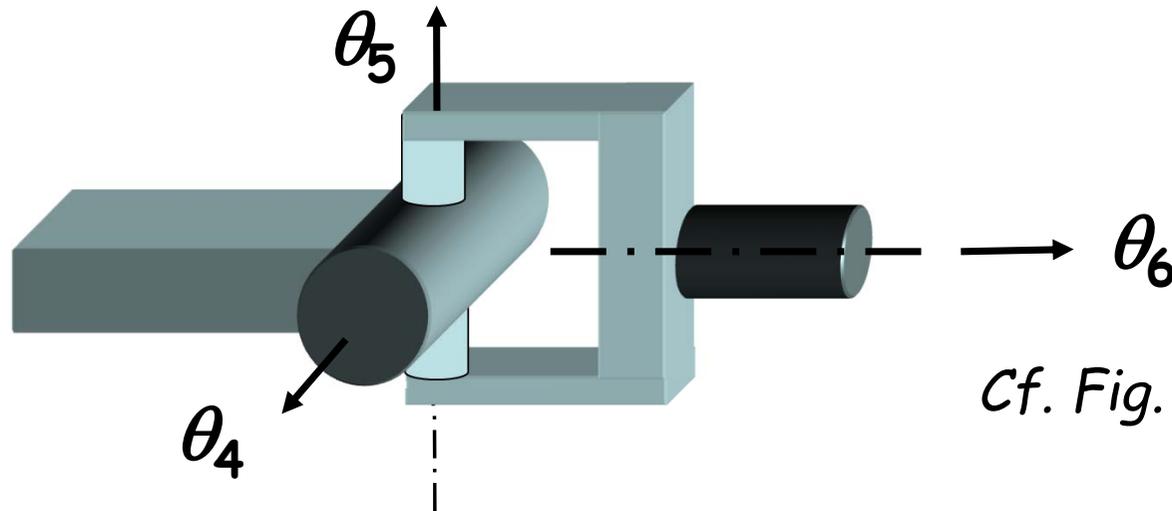
26

Roulis (roll) $\varphi = \theta_6$ aut. axe y , direction d'approche

tangage (pitch) $\mathcal{I} = \theta_4$ aut. axe x

lacet (yaw) $\psi = \theta_5$ aut. axe z

Angles d'Euler (x, z, y), axes liés au corps



Cf. Fig. 10 pour $\theta_4 = -90^\circ$

Modèle Géométrique Direct:

$$\underline{P}(\theta_i) = (\mathbf{K}_1 \mathbf{K}_2 \mathbf{K}_3 \mathbf{K}_4 \mathbf{K}_5 \mathbf{K}_6) \underline{P}_0$$

$$\text{Connaissant } \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3 \mathbf{R}_4 \mathbf{R}_5 \mathbf{R}_6 = \mathbf{R}_{\text{tot}} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

comment trouver les angles $(\varphi, \mathcal{I}, \psi)$

par ex. par rapport à des axes fixes x, y, z ?

$$\mathbf{R}_{\text{tot}} = \mathbf{R}_z \mathbf{R}_y \mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} c_\psi c_\mathcal{I} & c_\psi s_\mathcal{I} s_\varphi - s_\psi c_\varphi & c_\psi s_\mathcal{I} c_\varphi + s_\psi s_\varphi \\ s_\psi c_\mathcal{I} & \dots = r_{22} & \dots = r_{23} \\ -s_\mathcal{I} & c_\mathcal{I} s_\varphi & c_\mathcal{I} c_\varphi \end{bmatrix}$$

Solution:

$$\varphi = \text{Atan2}(r_{32}, r_{33})$$

$$\vartheta = \text{Atan2}(-r_{31}, \pm\sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2})$$

$$\psi = \text{Atan2}(r_{21}, r_{11})$$

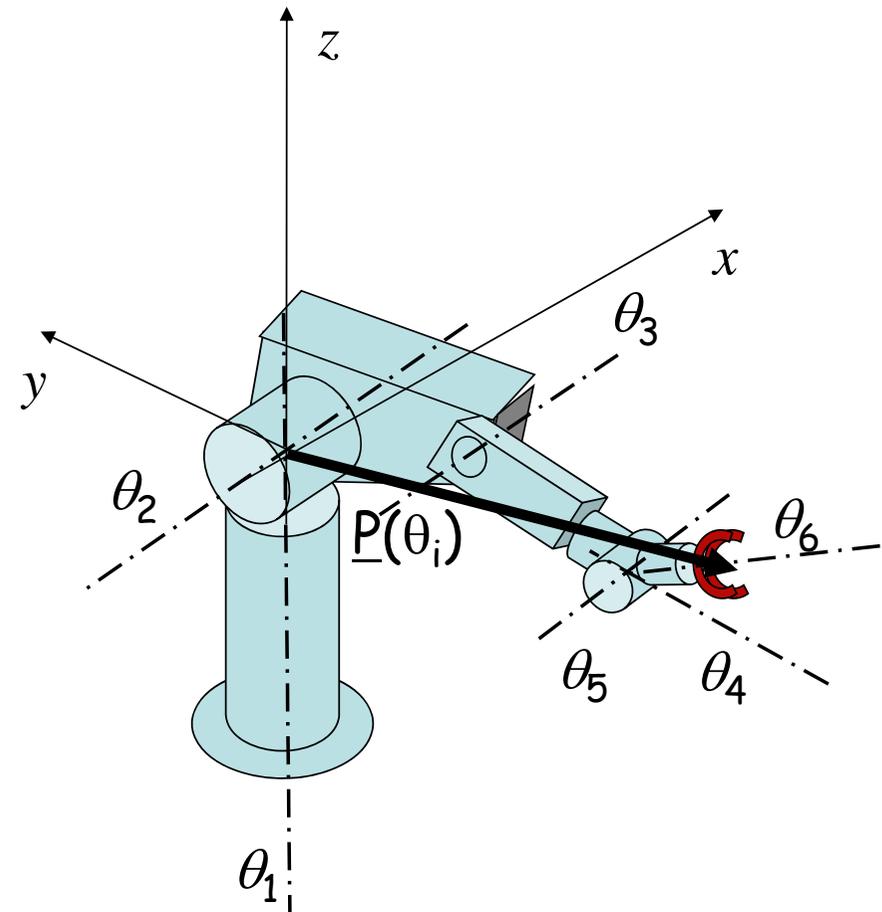
(avec la fonction $\text{Atan2}(x,y) = \text{Arctg}(x/y)$
évitant la singularité intermédiaire)

2.1.9 Modèle Géométrique Inverse

29

Tâche pratique:

Quelles variables θ_i
pour un P donné?



On cherche $\theta_i(\underline{P})$,
donc la fonction inverse du MGD $\underline{P}(\theta_i)$

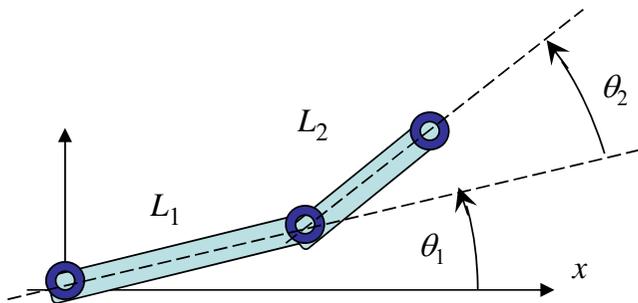
Modèle Géométrique Inverse (indirect)

30

Inverse Kinematics

Problème mathématiquement difficile!

Exemple très simple:



MGD

$$x = L_1 c_1 + L_2 c_{12}$$

$$y = L_1 s_1 + L_2 s_{12}$$

Données x & y , quels sont θ_1 et θ_2 ?

Modèle Géométrique Inverse (indirect)

1. Remplacer $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ par $\cos\theta_1$ et $\cos\theta_2$

$$x = L_1 c_1 + L_2 c_{12} = L_1 c_1 + L_2 c_1 c_2 - L_2 s_1 s_2$$

$$y = L_1 s_1 + L_2 s_{12} = L_1 c_1 + L_2 s_1 c_2 + L_2 c_1 s_2$$

2. L'introduction des sinus nécessite d'ajouter les relations entre sinus et cosinus

$$s_1^2 + c_1^2 = 1 \quad 4 \text{ équations, 4 inconnues } (c_1, c_2, s_1, s_2)$$

$$s_2^2 + c_2^2 = 1 \quad \text{mais des équations nonlinéaires (quadratiques!)}$$

Nous constatons donc que le MGI est beaucoup plus complexe que le MGD!

1. Les équations sont non-linéaires
2. Des solutions analytiques générales comme dans le cas d'équ. linéaires sont inconnues (!)
3. Solutions multiples possibles!
4. Infinité de solutions possible (robots redondants)

Solution des 4 équations:

$$(x^2 + y^2) = L_1^2 + L_2^2 + 2 L_1 L_2 c_2$$

Cela donne $\cos(\theta_2)$ et donc deux angles θ_2

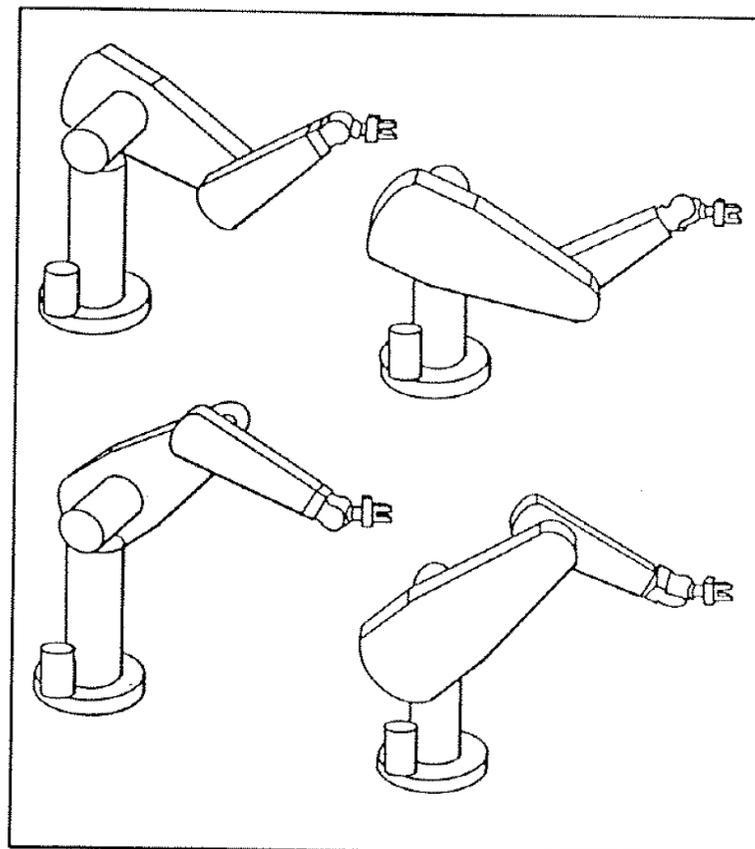
Exercice : Trouvez q_1

Postures d'un robot angulaire à 6 ddl

34

Combiner deux fois
l'exemple planaire
précédent (pour le coude et
pour l'épaule)

Quatre sorties équivalentes
(« postures »)
pour quatre jeux de
variables robot
complètement différentes!

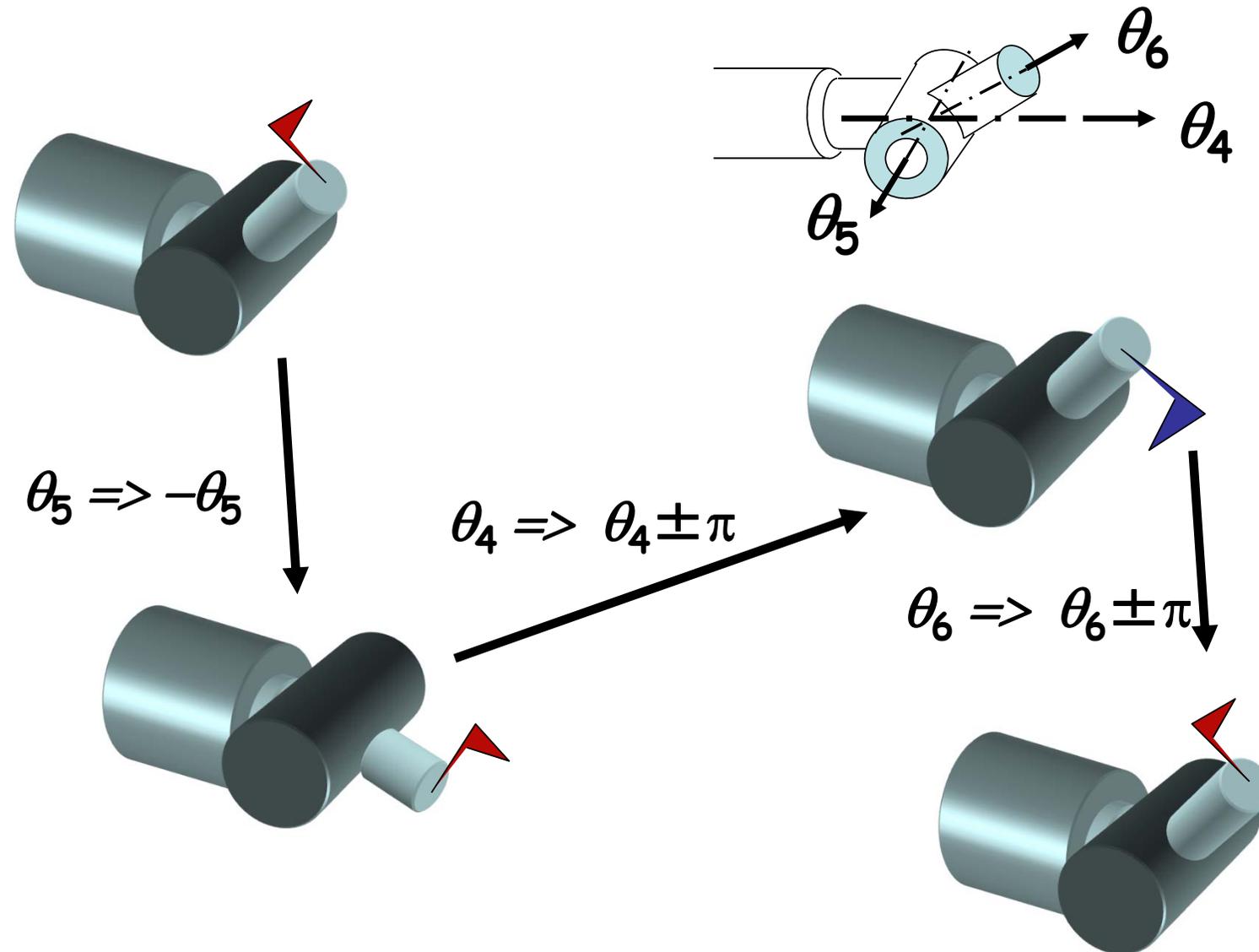


Orientation: Les angles sont des angles d'Euler par rapport à l'orientation du troisième membre.

$$\mathbf{R}(consigne) = \mathbf{R}(base) \mathbf{R}(\theta_4, \theta_5, \theta_6)$$

$$\text{donc } \mathbf{R}(\theta_4, \theta_5, \theta_6) = \mathbf{R}(base)^{-1} \mathbf{R}(consigne)$$

Postures? (nombre de solutions?)



Une infinité de postures pour une même sortie.

Plus d'actionneurs que de mobilités de la sortie

Raison: Accessibilité

Applications typiques:

- Soudure, peinture sur des éléments complexes (carrosserie d'auto...)
- Chirurgie



ABB
Flex painter

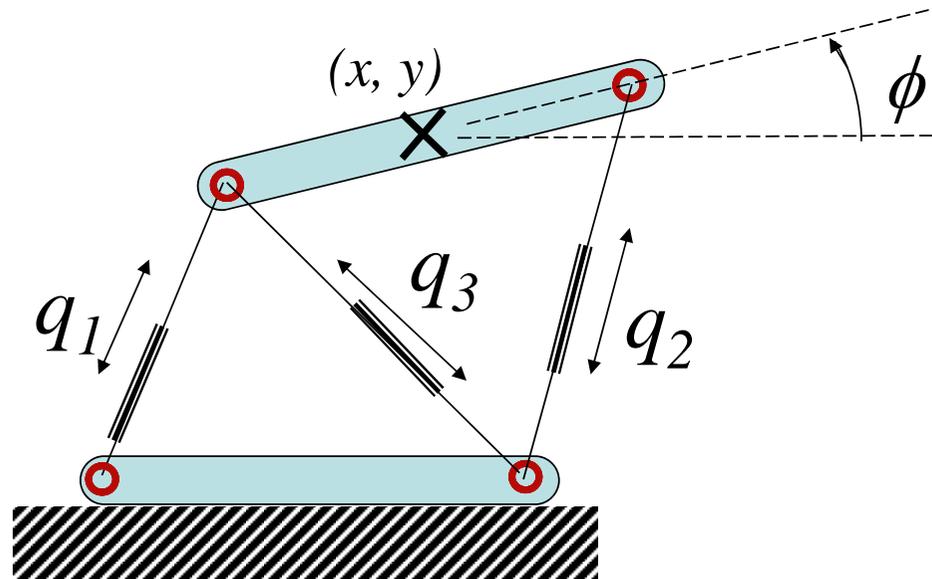
<https://www.youtube.com/watch?v=FRstM7b9OmQ>

Robot MIRO-Surge
DLR, Munich

- Le MGD se trouve de façon systématique.
(Paramètres Denavit Hartenberg, matrices homogènes)
- Il y a toujours une solution dans le domaine de travail

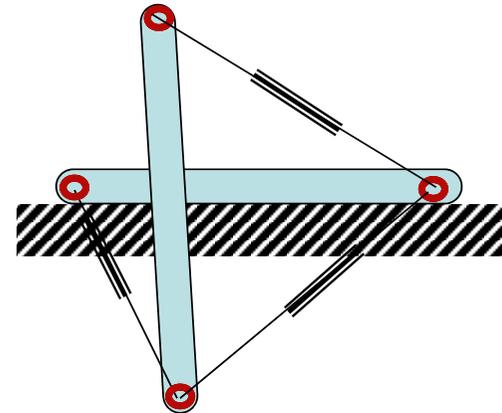
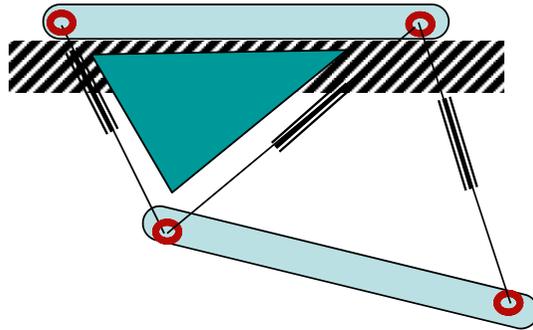
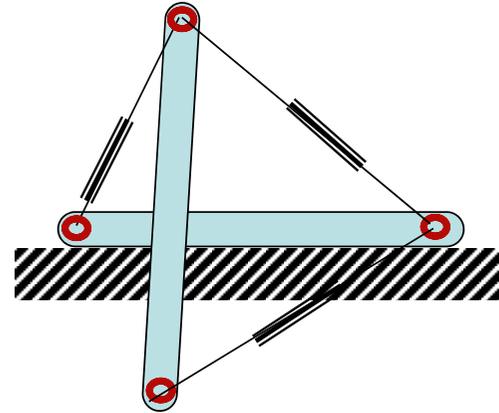
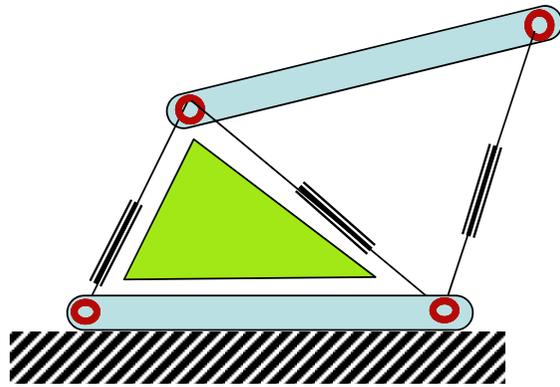
- Le MGI ne peut pas se calculer systématiquement dans tous les cas (besoin d'astuces)
- Solutions multiples (postures) possibles
- Nombre de solutions inconnu en général!
- Méthodes numériques ne donnent pas toutes les solutions

Robots parallèles?



MGD: Données q_1, q_2, q_3 ,
Quels sont (x, y, ϕ) ?

Solutions:

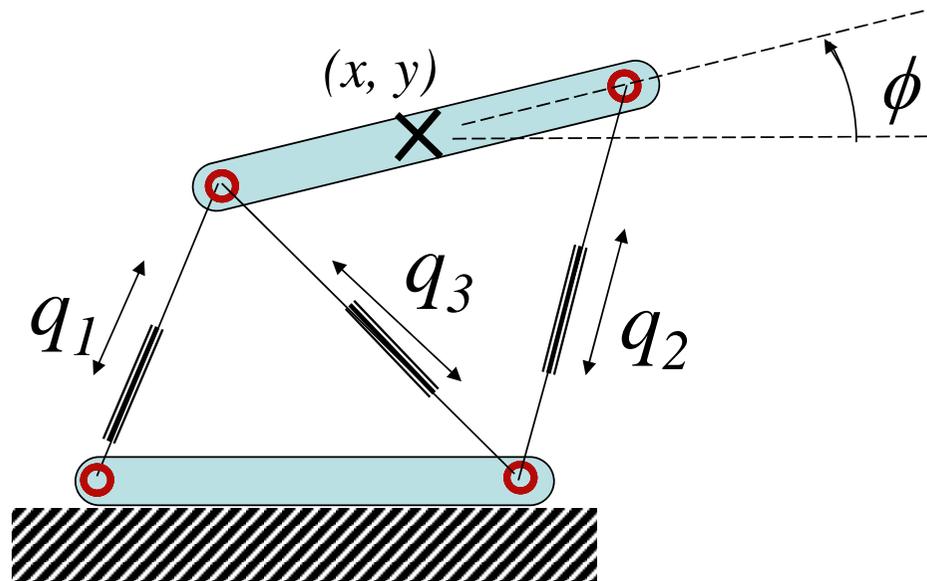


Pour les robots parallèles,
c'est le modèle géométrique direct MGD
qui aura plusieurs solutions.

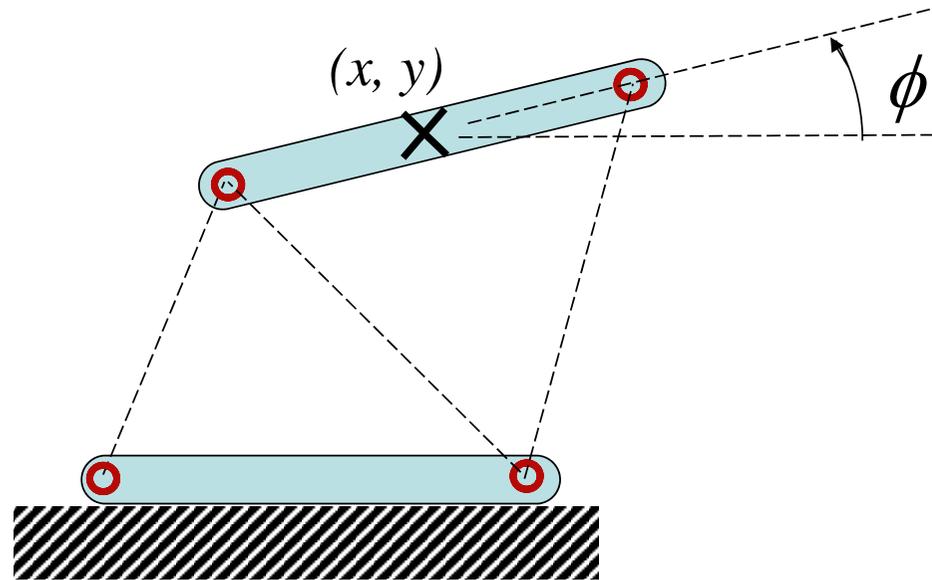
On les appelle les "contorsions"

Modèle Géométrique Inverse (MGI) ?

42



MGI: Données (x, y, ϕ) ,
Quels sont q_1, q_2, q_3 ?



Donné x, y, ϕ
à l'évidence, il n'y a qu'une seule solution.

Robots sériels:

- Le MGD a une seule solution; méthode "infaillible" existe
- Le MGI a des solutions multiples! (Les postures)

Robots parallèles, c'est juste l'inverse:

- Le MGD a des solutions multiples! (Les contorsions)
- Le MGI n'a qu'une solution, souvent facile à trouver

Ces questions sont objet de recherche en robotique.
(publications, conférences...)