Corrigé 4 – Cinématique 3

19.10.2018

Solution 4.1 :

$$Rot.\theta_4 \ autour \ de \ P_2 = \begin{pmatrix} L_1 + L_2 \\ 0 \end{pmatrix} puis \ Rot.\theta_2 \ autour \ de \ P_1 = \begin{pmatrix} L_1 \\ 0 \end{pmatrix} puis \ Rot.\theta_1 \ autour \ de \ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & L_1 v_2 \\ s_2 & c_2 & -L_1 s_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_4 & -s_4 & L_{12} v_4 \\ s_4 & c_4 & -L_{12} s_4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{12} & -s_{12} & L_1(c_1 v_2 + s_1 s_2) \\ s_{12} & c_{12} & L_1(s_1 v_2 - c_1 s_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_4 & -s_4 & L_{12} v_4 \\ s_4 & c_4 & -L_{12} s_4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{124} & -s_{124} & L_{12}(c_{12} v_4 + s_{12} s_4) + L_1(c_1 v_2 + s_1 s_2) \\ s_{124} & c_{124} & L_{12}(s_{12} v_4 - c_{12} s_4) + L_1(s_1 v_2 - c1 s_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Contrôle de l'équivalence avec le résultat géométrique : Dans ce cas, le point observé est le centre de rotation de θ_4, l'angle θ_4 n'apparaît donc pas dans le résultat. Le produit des deux premières rotations se trouve dans la première ligne (résultat intermédiaire ci-dessus).

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{12} & -s_{12} & L_1(c_1 v_2 + s_1 s_2) \\ s_{12} & c_{12} & L_1(s_1 v_2 - c_1 s_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{12} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{12} c_{12} + L_1(c_1 - c_1 c_2 + s_1 s_2) \\ L_{12} s_{12} + L_1(s_1 - s_1 c_2 - s_2 c_1) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} L_{12} c_{12} + L_1(c_1 - c_{12}) \\ L_{12} s_{12} + L_1(s_1 - s_{12}) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 c_1 + L_2 c_{12} \\ L_1 s_1 + L_2 s_{12} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solution 4.2 :

$$Rot.\theta_4 \ autour \ de \ \begin{pmatrix} L_1 + L_2 \\ 0 \end{pmatrix} puis \ Rot.\theta_2 \ autour \ de \ \begin{pmatrix} L_1 \\ 0 \end{pmatrix} puis \ Rot.\theta_1 \ autour \ de \ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & L_1 v_2 \\ s_2 & c_2 & -L_1 s_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_4 & -s_4 & L_{12} v_4 \\ s_4 & c_4 & -L_{12} s_4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{124} & -s_{124} & L_{12}(c_{12} v_4 + s_{12} s_4) + L_1(c_1 v_2 + s_1 s_2) \\ s_{124} & c_{124} & L_{12}(s_{12} v_4 - c_{12} s_4) + L_1(s_1 v_2 - c_1 s_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$z = (\theta_3 + z_4)$, $\theta_{total} = \theta_1 + \theta_2 + \theta_4$ *donc on peut se concentrer sur x et y.*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{124} & -s_{124} & L_{12}(c_{12} v_4 + s_{12} s_4) + L_1(c_1 v_2 + s_1 s_2) \\ s_{124} & c_{124} & L_{12}(s_{12} v_4 - c_{12} s_4) + L_1(s_1 v_2 - c_1 s_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{124} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Avec les formules trigonométriques, $c_{124} = c_{12} c_4 - s_{12} s_4$ on démontre que ce produit matriciel donne bien le résultat « géométrique »

$$x = L_1 c_1 + L_2 c_{12} + L_4 c_{124}$$

$$y = L_1 s_1 + L_2 s_{12} + L_4 s_{124}$$

Solution 4.3 :

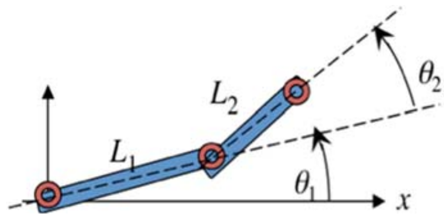
Les matrices homogènes du MDG du Puma sont :

$$K_4 = \begin{pmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & D_3 v_4 \\ s_4 & c_4 & 0 & -D_3 s_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & -s_3 & L_2 s_3 \\ 0 & s_3 & c_3 & L_2 v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution 4.4 :

Comme premier exemple, nous traitons le manipulateur planaire simple à deux membres. Il s'agit donc de trouver les angles $\theta_1$et θ_2 à partir d'une position *x, y* donnée.
Le MGD est :
$x = L_1 cos(\theta_1) + \ L_2 cos(\theta_1 + \theta_2)$
$y = L_1 sin(\theta_1) + \ L_2 \ sin(\theta_1 + \theta_2)$



On a 4 équations (a) (b) (c) (d). On trouve c_2 comme indiqué.

$$c_2 = \frac{x^2 + y^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1 L_2}$$

Il y a 2 solutions pour

$$s_2 = \pm\sqrt{(1 - c_2^2)}$$

Ensuite :

$$(a)c_1 + (b)s_1 \ = \ L_1 + L_2 c_2 \qquad et \qquad -(a)s_1 + (b)c_1 = L_2 s_2 = \pm L_2 \sqrt{(1 - c_2^2)}$$

On ressort c_1 de la deuxième équation et on le remplace dans la première équation pour sortir s_1.

$$c_1 = \frac{L_2 s_2 + x s_1}{y}$$

$$s_1 = \frac{yL_1 + yL_2 c_2 - xL_2 s_2}{x^2 + y^2} = \frac{yL_1 + yL_2 c_2 \mp xL_2 \sqrt{(1 - c_2^2)}}{x^2 + y^2}$$

et finalement les deux paires de solutions pour (θ_1 et θ_2)

$$\theta_2 = \arcsin(s_2) = arcsin\left(\pm\sqrt{(1 - c_2^2)}\right)$$

$\rightarrow Pour\ calculer\ le\ bon\ \theta_1\ et\ avoir\ la\ bonne\ paire\ de\ solution\ il\ faut\ prendre\ s_2\ du\ \ \text{même}\ signe.$

$$\theta_1 = arcsin(s_1) = arcsin\left(\frac{yL_1 + yL_2 c_2 \mp xL_2 \sqrt{(1 - c_2^2)}}{x^2 + y^2}\right)$$

Ce genre d'astuces ne peux pas se généraliser comme le calcul du modèle géométrique direct.