Série 5

(les exercices à rendre sont marqués avec *)

Exercice 1*

Trouver le module et l'argument des nombres complexes suivants.

a) $2+2i$ b) $-1+i\sqrt{3}$ c) $-1+i\operatorname{tg}(3)$ d) $\frac{8i^{21}-2i^{11}}{1-i}$ e) 2^i

Solution. Les résultats ci-dessous sont écrits sous la forme $z=\rho\, e^{i\phi}$, où a $\rho=|z|$ est le module de z, et $\arg(z)=\phi$ son argument.

a) On a que $z=2+2i=2\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}})=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

b) On a que $z=-1+i\sqrt{3}=2(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=2(\cos(\frac{2\pi}{3})+i\sin(\frac{2\pi}{3}))=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

c) On a que $z=-1+i\operatorname{tg}(3)=-1+i\frac{\sin(3)}{\cos(3)}=\frac{1}{|\cos(3)|}(\cos(3)-i\sin(3))=\frac{1}{|\cos(3)|}e^{-3i}$.

d) On a que

$$\begin{aligned}
z&=\frac{8i^{21}-2i^{11}}{1-i}=\frac{8i-2i^3}{1-i}=\frac{8i+2i}{1-i}=10i\frac{1}{1-i}=10i\frac{1}{1-i}\frac{i+1}{i+1}\\
&=10i\frac{1+i}{2}=\frac{10i-10}{2}=\frac{10(i-1)}{\sqrt{2\sqrt{2}}}=\frac{5\sqrt{2}^2(i-1)}{\sqrt{2\sqrt{2}}}=5\sqrt{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}})=5\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}.
\end{aligned}$$

e) On a que $z=2^i=e^{i\operatorname{Log}(2)}$.

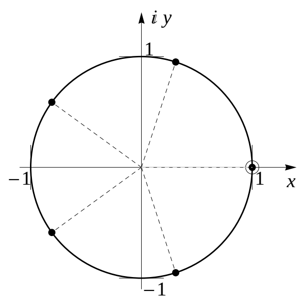
Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$, puis représenter les solutions dans le plan complexe.

a) $z^5=1$ b) $z^2=-3+4i$ c) $z^4=-2i$ d) $z^3=-\sqrt{3}+i$

Solution. On a que

a) On utilise que $1=e^{i\,2\pi n}$ pour tout $n\in\{0,1,2,3,4\}$. Les solutions recherchées sont donc $z_{n+1}=e^{i\frac{2\pi n}{5}}$, avec $n\in\{0,1,2,3,4\}$:



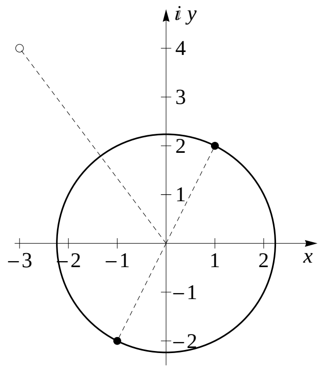
b) En écrivant $z = a + ib$, l'équation donnée devient $a^2 - b^2 + 2abi = -3 + 4i$. Puisque a et b sont réels, on doit résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} a^2 - b^2 & = -3 \\ 2ab & = 4 \end{cases}$$

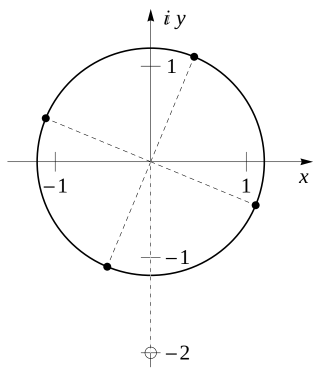
La deuxième équation implique que a et b sont non-nuls et donc $b = \frac{2}{a}$. En insérant dans la première équation on obtient

$$a^2 - \frac{4}{a^2} = -3 \quad \Leftrightarrow \quad a^4 + 3a^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 \in \{1, -4\}$$

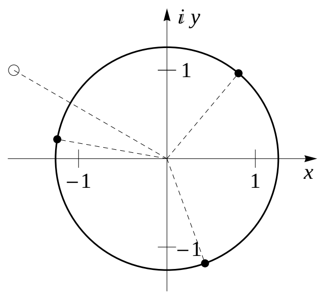
Puisque $a \in \mathbb{R}$, seulement la première solution est possible ; on a donc $a = +1$ (et dans ce cas $b = +2$) ou alors $a = -1$ (et dans ce cas $b = -2$). Ainsi les solutions de l'équation initiale sont $z_1 = 1 + 2i$ et $z_2 = -1 - 2i$:



c) On utilise le fait que $-i = e^{i(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n)}$ pour tout $n \in \{0, 1, 2, 3\}$. Les solutions recherchées sont donc $z_{n+1} = \sqrt[4]{2} e^{i(\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2} n)}$ avec $n \in \{0, 1, 2, 3\}$:



d) On a $-\sqrt{3} + i = 2(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}) = 2e^{i(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n)}$ pour $n \in \{0, 1, 2\}$. Les solutions recherchées sont donc $z_{n+1} = \sqrt[3]{2}\, e^{i(\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi}{3} n)}$ avec $n \in \{0, 1, 2\}$:



Exercice 3*

Trouver la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument de tous les nombres complexes z solutions de l'équation

$$z^2 = (1+\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{2}})^8.$$

Solution. Comme $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, on a

$$1+\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} = 1+i\sqrt{3}\,,$$

qu'on récrit sous forme polaire :

$$1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\,.$$

Ainsi l'équation devient

$$z^2 = (2e^{i\frac{\pi}{3}})^8 = 2^8 e^{i\frac{8\pi}{3}} = 2^8 e^{i\frac{2\pi}{3}}\,.$$

Afin de résoudre cette équation, on écrit

$$z^2 = 2^8 e^{i(\frac{2\pi}{3}+2\pi n)}\,, \qquad \text{avec } n \in \{0,1\}\,,$$

car une équation polynomiale du deuxième degré a deux solutions. Ces solutions sont donc

$$\begin{aligned} z_1 &= 2^4\,e^{i\frac{\pi}{3}} = 16(\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2}) = 8+i\,8\sqrt{3}\,,\\ z_2 &= 2^4\,e^{i\frac{4\pi}{3}} = 16(-\tfrac{1}{2}-i\tfrac{\sqrt{3}}{2}) = -8-i\,8\sqrt{3}\,. \end{aligned}$$

Les quantités recherchées sont alors

$$\begin{array}{llll} \mathrm{Re}(z_1) = 8, & \mathrm{Im}(z_1) = 8\sqrt{3}, & |z_1| = 16, & \arg(z_1) = \frac{\pi}{3}\,,\\ \mathrm{Re}(z_2) = -8, & \mathrm{Im}(z_2) = -8\sqrt{3}, & |z_2| = 16, & \arg(z_2) = \frac{4\pi}{3}\,. \end{array}$$

Exercice 4

Étudier la convergence des séries suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{3n+2}{4n+5}\Big)^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n-2}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\tfrac{1}{n})$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\tfrac{1}{n} - \tfrac{n-1}{n^2})$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+7}-n)$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (1-\cos(\tfrac{\pi}{n+1}))$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \big(1-\tfrac{2}{n}\big)^{n^2}$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+4)(n-3)}{7n^3+n+2}$

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+4}-\sqrt{n}}{n}$

l) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{100}}{e^{3(\log n)^2}}$

Solution. On a que

a) Le plus simple est d'observer qu'on peut comparer $a_n = \frac{1}{n+2^n}$ avec $b_n = \frac{1}{2^n}$: $0 \le a_n \le b_n$. Comme $\sum_n b_n$ converge (série géométrique avec $r = \frac{1}{2}$), $\sum_n a_n$ converge aussi.
On peut aussi utiliser le critère de d'Alembert. En effet, comme

$$\lim_{n\to\infty}\Big|\frac{a_{n+1}}{a_n}\Big| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2^n}{n+1+2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{n}{2^n}}{2+\frac{n+1}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1\,,$$

(pour la dernière étape, on a utilisé que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n} = 0$), la série converge.

b) Par le critère de Cauchy, la série converge (absolument), car

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3n+2}{4n+5}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{4n+5} = \frac{3}{4} < 1.$$

c) Par le critère de d'Alembert, la série converge (absolument), car

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^4}{3n^4}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4}{3n^4} = \frac{1}{3} < 1\,.$$

d) Cette série converge par le critère de Leibniz. En effet, $a_n = \frac{(-1)^n}{3n-2}$ satisfait les trois conditions de ce critère : 1) le signe de a_n change avec la parité de n, 2) la suite des valeurs absolues $|a_n| = \frac{1}{3n-2}$ est décroissante, 3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Noter que la série des valeurs absolues $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ ne converge pas parce que $\frac{1}{3n-2} \geq \frac{1}{3n}$ et que la série harmonique $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge.

e) Comme $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\frac{1}{n}) = 1 \neq 0$, la série diverge.

f) Comme le terme général est $a_n = \frac{1}{n} - \frac{n-1}{n^2} = \frac{1}{n^2}$, la série converge.
Remarque : Les séries $\sum\frac{1}{n}$ et $\sum\frac{n-1}{n^2}$ sont toutes deux divergentes, donc on ne peut surtout pas écrire "$\sum(\frac{1}{n} - \frac{n-1}{n^2}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n^2}$" !

g) On a

$$\sqrt{n^2+7} - n = \frac{(\sqrt{n^2+7}-n)(\sqrt{n^2+7}+n)}{\sqrt{n^2+7}+n} = \frac{7}{\sqrt{n^2+7}+n}\,.$$

Observons que pour $n > 3$, on a $n^2+7 < (n+1)^2$ et donc

$$\frac{7}{\sqrt{n^2+7}+n} > \frac{7}{\sqrt{(n+1)^2}+n} > \frac{7}{3n}\,.$$

Comme $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{3n} = \frac{7}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge, la série initiale diverge aussi par le critère de comparaison.

h) On a

$$1-\cos(\tfrac{\pi}{n+1}) \overset{(1)}{=} 2\big(\sin(\tfrac{\pi}{2(n+1)})\big)^2 \overset{(2)}{\leq} 2(\tfrac{\pi}{2(n+1)})^2 = \tfrac{\pi^2}{2(n+1)^2} < \tfrac{\pi^2}{2}\tfrac{1}{n^2},$$

où on a utilisé $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x)$ en (1) et l'inégalité $\sin(x) \leq x$ pour $x \geq 0$ en (2). Comme $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge, $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos(\frac{\pi}{n+1}))$ converge (absolument) par le critère de comparaison.

i) Soit $a_n = \big(1-\frac{2}{n}\big)^{n^2}$. Calculons que

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\big(1-\tfrac{2}{n}\big)^n = e^{-2} = 0.135\cdots < 1\,.$$

(voir exercice 7 de la série 3). Donc par le critère de Cauchy, la série $\sum_{n\geq1} a_n$ converge.

j) Cette série diverge car $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+4)(n-3)}{7n^3+n+2} = \frac{1}{7} \neq 0$.

k) On a pour tout $n \geq 1$

$$0 < \frac{\sqrt{n+4}-\sqrt{n}}{n} = \frac{4}{n(\sqrt{n+4}+\sqrt{n})} < \frac{2}{n^{3/2}}\,.$$

Par le critère de comparaison, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+4}-\sqrt{n}}{n}$ converge car $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ converge (série du type $\sum_n\frac{1}{n^p}$ avec $p > 1$).

l) Le terme général de cette suite est égal a

$$a_n = \frac{n^{100}}{e^{3(\log n)^2}} = \frac{1}{n^{3\log n - 100}} .$$

Remarquons que $\lim\limits_{n\to\infty} 3\log n - 100 = +\infty$. Fixons un $\epsilon > 0$ quelconque, par exemple $\epsilon = 1$. Alors il existe un entier N tel que $3\log n - 100 \geq 1 + \epsilon$ pour tout $n \geq N$, et donc

$$0 \leq a_n \leq \frac{1}{n^{1+\epsilon}} = \frac{1}{n^2}, \quad \forall n \geq N .$$

Donc $\sum_{n=1001}^{\infty} a_n$, et par conséquent $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, converge.

Exercice 5 (Vrai ou faux)

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite numérique.

a) Si $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

c) Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolument, alors $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge.

d) Si $(a_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante, alors $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge.

e) Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ converge.

f) Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolument, alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ converge.

g) La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ converge.

h) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

i) Soit $a_n = 5^n$ pour $n = 1, \ldots, 1000$, et $a_n := \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ si $n > 1000$. Alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Solution. On a que

a) VRAI. Comme la série converge, on a $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n a_n = 0$ par le critère nécessaire. Ainsi $0 = \lim\limits_{n\to\infty} |(-1)^n a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} |a_n|$. La proposition en suit par le théorème des deux gendarmes.

b) FAUX. Prendre par exemple la suite $a_n = \frac{1}{n}$. Elle converge vers 0, mais on a vu au cours que la série harmonique diverge.
Remarque : cet énoncé est la réciproque du critère nécessaire pour la convergence qui justement est seulement nécessaire mais pas suffisant.

c) VRAI. Comme $|(-1)^n a_n| = |a_n|$ et que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, la série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge par le critère de comparaison.

d) FAUX. Prendre par exemple la suite $a_n = -n$ qui est strictement décroissante. Comme $(-1)^n a_n = (-1)^{n+1} n$ ne converge pas vers zéro, la série diverge.

e) FAUX. Prendre par exemple la suite $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Par le critère de Leibniz, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge. Par contre $a_n^2 = \frac{1}{n}$ et on obtient la série harmonique qui diverge.

f) VRAI. Comme $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $|a_n| < 1$ pour tout $n \geq n_0$ (définition de la convergence avec $\varepsilon = 1$). Donc $|a_n|^2 < |a_n|$ pour tout $n \geq n_0$ et ainsi la série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge par le critère de comparaison.
Remarque : Ici l'hypothèse du critère de comparaison n'est vérifiée que pour $n \geq n_0$ et pas pour tout n. Cet assouplissement n'affecte pourtant pas la conclusion. En effet, on peut décomposer la série à $n = n_0$ en une somme d'un nombre fini de termes et une série commençant en n_0 qui converge par le critère de comparaison.

g) FAUX. On a pour tout $n \geq 1$ que $\sqrt{n} \leq n$ et donc $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Comme la série harmonique diverge, on conclut par le critère de comparaison que la série en question diverge aussi.

h) FAUX. Par exemple, $a_n = \frac{1}{n}$ et $a'_n = \frac{1}{n^2}$ satisfont toutes les deux à la condition, alors que $\sum_n a_n$ diverge et $\sum_n a'_n$ converge.

i) FAUX. En effet, seuls les terms a_n avec n *grand* comptent pour la convergence ou non d'une série $\sum_n a_n$. Comme $a_n = \frac{1}{n^{3/2}}$ pour tout n grand, et que $p = \frac{3}{2} > 1$, la série converge. (Même si les mille premiers termes de la série sont ceux d'une série divergente.)

Exercice 6

Soit (a_n) une suite de nombres réels. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)$$

est une série convergente si et seulement si la suite (a_n) est convergente.

Solution. Développons les sommes partielles de la série :

$$S_k = \sum_{n=0}^{k}(a_{n+1} - a_n) = a_1 - a_0 + a_2 - a_1 + ... + a_k - a_{k-1} + a_{k+1} - a_k = a_{k+1} - a_0.$$

En passant à la limite, on a que

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+1} - a_n) = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}(a_{n+1} - a_n) = \lim_{k\to\infty} a_{k+1} - a_0.$$

Donc on a bien que la limite de S_k existe si et seulement si la limite de la suite (a_n) existe.