EPFL
Analyse I (GC, SIE) 24 octobre 2018

Série 6

(les exercices à rendre sont marqués avec *)

Exercice 1*

Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ converge. Après vérifier l'identité

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right),$$

et l'utiliser pour calculer la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.

Exercice 2*

Prouver que $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ pour tous $x, y \in \mathbf{R}$.
Indication : la convergence absolue nous permet de permuter comme on veut les séries ; utiliser la formule du binôme de Newton.

Exercice 3

Démontrer que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + 2\frac{(-1)^n}{n}\right)$$

et alternée et qu'elle diverge. Pourquoi est-ce que cela ne contredit pas le *critère de la série alternée* ? ! ?

Exercice 4

Pour x_0 donné dans $\mathbb{R}$, soit (x_n) la suite définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = \dfrac{x_n+3}{2}$.

a) En supposant qu'elle converge, que vaut sa limite ?
b) Montrer par récurrence que

$$x_n - 3 = \frac{x_0 - 3}{2^n}$$

pour $n \geq 0$.
c) Vérifier que la suite converge et calculer $\lim_{n\to+\infty} x_n$.
Est-ce que la valeur de la limite dépend du choix de x_0 ?

Exercice 5

a) Donner une formule pour i^n pour tout $n \in \mathbf{N}$
b) En déduire la formule pour $\exp(ix)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.
Indication : Utilisez les séries pour $\sin(x)$ et $\cos(x)$ et le fait que $\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$.
c) En utilisant l'exercice 2, déduire la formule pour $\exp(z)$ pour tout $z \in \mathbf{C}$.