Série 7

(les exercices à rendre sont marqués avec *)

Exercice 1*

Etudier la convergence de la série en fonction du paramètre $c \in \mathbb{R}$.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{c}{1-c})^n$, avec $c \neq 1$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c-a)^n$, avec $a \in \mathbb{R}$ fixé,

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot c^n$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sin(\frac{\pi c}{2}))^n$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+c^2)^n$

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{c^n n!}{n^n}$

Quelle est la somme de la série en (d) (lorsqu'elle converge) ?

Exercice 2

Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, où $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite numérique.

a) Si $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

b) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

c) Si $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge absolument, alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ converge.

d) Si $(a_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante, alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ converge.

e) Si $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ converge.

f) Si $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge et $a_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$, alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ converge.

g) La série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(3+(-1)^n)\, 2^{-n}$ converge absolument et la somme vaut $\frac{20}{3}$.

Exercice 3

Montrer à l'aide de la définition $''\epsilon\text{–}\delta\,''$ de la limite que

a) $\lim_{x\to 1}(2x+8) = 10$ b) $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$ c) $\lim_{x\to -2}(|x| - x^3) = 10$

Exercice 4

Prouver que la limite $\lim_{x\to 0}\sin(1/x)$ n'existe pas à l'aide de deux suites (u_n) et (v_n) dans $\mathbb{R}^*$ qui convergent vers 0 et telles que les suites $\big(\sin(1/u_n)\big)$ et $\big(\sin(1/v_n)\big)$ tendent vers des limites différentes.

Remarque : le graphique de la fonction $\sin(1/x)$ pour $x \neq 0$ permet de développer son intuition.

Exercice 5

Parmi les énoncés suivants, déterminer lesquels sont équivalents à $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

a) $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x : 0 < |x - x_0| < \epsilon \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \delta$.

b) $\forall\delta > 0\ \exists\epsilon > 0\ \forall x : 0 < |x - x_0| < \epsilon \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \delta$.

c) $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x : 0 < |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$.

d) $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \epsilon$.

e) $\forall\epsilon \geq 0\ \exists\delta > 0\ \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$.

f) $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta \geq 0\ \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$.

g) $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x : |f(x) - \ell| \geq \epsilon \Longrightarrow |x - x_0| \geq \delta$.