Série 6

(les exercices à rendre sont marqués avec *)

Exercice 1*

Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ converge. Après vérifier l'identité

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\Big),$$

et l'utiliser pour calculer la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.

Solution. On peut montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ converge par comparaison. En fait on a que $\frac{1}{4n^2-1} \leq \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge comme montré au cour. Maintenant on veut calculer la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$. On écrit la somme partielle de la série en décomposant le terme général :

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1} \underbrace{-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}}_{=0} \underbrace{-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{=0} - \cdots \underbrace{-\frac{1}{2(n-1)+1} + \frac{1}{2n-1}}_{=0} - \frac{1}{2n+1}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{2n+1}\Big). \end{aligned}$$

Ceci implique

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}.$$

Exercice 2*

Prouver que $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ pour tous $x, y \in \mathbf{R}$.

Indication : la convergence absolue nous permet de permuter comme on veut les séries ; utiliser la formule du binôme de Newton.

Solution. On a que

$$\begin{aligned}
\exp(x+y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m+k=n} \binom{n}{k} x^k y^m \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m+k=n} \frac{n!}{(n-k)!k!} x^k y^m \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m+k=n} \frac{n!}{m!k!} x^k y^m \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} \sum_{m+k=n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^m}{m!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\
&= \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}\Big) = \exp(x)\exp(y).
\end{aligned}$$

Exercice 3

Démontrer que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + 2\frac{(-1)^n}{n}\right)$$

et alternée et qu'elle diverge. Pourquoi est-ce que cela ne contredit pas le *critère de la série alternée* ? ! ?

Solution. La série est clairement alternée car si n pair on a que

$$\frac{1}{n} + 2\frac{(-1)^n}{n} = \frac{3}{n} > 0$$

et si n impair

$$\frac{1}{n} + 2\frac{(-1)^n}{n} = -\frac{1}{n} < 0.$$

Maintenant on veut montrer qu' elle diverge. Supposons qu' elle converge, donc on pourrait lui ajouter la série convergente $\sum_{n=1}^{\infty} -2\frac{(-1)^n}{n}$ Donc on aura que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + 2\frac{(-1)^n}{n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} -2\frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

converge. Mais ça c'est une contradiction.

La série ne contredit pas *le critère de la série alternée* parce que la suite

$$|x_n| = \left|\frac{1}{n} + 2\frac{(-1)^n}{n}\right|$$

n'est pas décroissante.

Exercice 4

Pour x_0 donné dans $\mathbb{R}$, soit (x_n) la suite définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = \dfrac{x_n + 3}{2}$.

a) En supposant qu'elle converge, que vaut sa limite ?

b) Montrer par récurrence que

$$x_n - 3 = \frac{x_0 - 3}{2^n}$$

pour $n \geq 0$.

c) Vérifier que la suite converge et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.
Est-ce que la valeur de la limite dépend du choix de x_0 ?

Solution. On a que

a) Soit $\ell \in \mathbb{R}$ la supposée limite. Par les règles de calcul pour les limites,on a

$$\ell = \frac{\ell + 3}{2} \iff \frac{\ell}{2} = \frac{3}{2}$$

et donc $\ell = 3$.

b) On a

$$x_0 - 3 = \frac{x_0 - 3}{2^0}$$

et la propriété est vraie pour $n = 0$. Supposons maintenant que la propriété est vraie pour $n \in \mathbb{N}$, alors

$$x_{n+1} - 3 = \frac{1}{2}(x_n + 3) - 3 = \frac{1}{2}(x_n - 3) = \frac{x_0 - 3}{2 \cdot 2^n} = \frac{x_0 - 3}{2^{n+1}}$$

et donc elle est vraie pour $n + 1$.

c) Comme $|\frac{1}{2}| < 1$, la suite $(x_n - 3)\frac{x_0-3}{2^n}$ converge vers 0 et on trouve bien $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 3$.
L'argument étant valable pour tout choix de x_0, la valeur de la limite ne dépend pas de ce choix.

Exercice 5

a) Donner une formule pour i^n pour tout $n \in \mathbf{N}$

b) En déduire la formule pour $\exp(ix)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.
Indication : Utilisez les séries pour $\sin(x)$ et $\cos(x)$ et le fait que $\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$.

c) En utilisant l'exercice 2, déduire la formule pour $\exp(z)$ pour tout $z \in \mathbf{C}$.

Solution. On a que

a) On commence a remarquer que

$$i^0 = 1 \qquad i^1 = i \qquad i^2 = -1 \qquad i^3 = -i \qquad i^4 = 1.$$

Donc on a

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 4k \text{ for } k \in \mathbb{N} \\ i & \text{if } n = 4k+1 \text{ for } k \in \mathbb{N} \\ -1 & \text{if } n = 4k+2 \text{ for } k \in \mathbb{N} \\ -i & \text{if } n = 4k+3 \text{ for } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

En fait on peut calculer que

$$i^{4k} = (i^4)^k = 1 \qquad i^{4k+2} = i^{4k} \cdot i^2 = -1$$
$$i^{4k+1} = i^{4k} \cdot i = i \qquad i^{4k+3} = i^{4k} \cdot i^3 = -i.$$

b) On peut calculer que

$$\begin{aligned} \exp(ix) &= \cos(x) + i\sin(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}. \end{aligned}$$

c) Soit $z \in \mathbb{C}$, donc $z = x + iy$ pour $x, y \in \mathbb{R}$. Donc on a que

$$\begin{aligned} \exp(z) &= \exp(x+iy) \\ &= \exp(x)\exp(iy) \\ &= \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!}\Big) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{(iy)^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{(iy)^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (iy)^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+iy)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \end{aligned}$$