EPFL Automne 2018

Geometrie, MATH-120

Solutions série 1

Solution 2. — Soient $x, y \in X$, $d(Id_X(x), Id_X(y)) = d(x.y)$
Ainsi, Id_X est bien une isometrie.

— Soient ϕ, ψ deux isometries et $x, y \in X$, alors on a

$$d((\phi \circ \psi)(x), (\phi \circ \psi)(y)) = d(\phi(\psi(x)), \phi(\psi(y))) = d(\psi(x), \psi(y)) = d(x, y)$$

Ou la deuxieme egalite vient du fait que ϕ est une isometrie et la troisieme que ψ en est une.
Ainsi, on a bien que $\phi \circ \psi$ est une isometrie.

— Soit ϕ une isometrie et $x, y \in X$ tels que $\phi(x) = \phi(y)$. On a alors que $0 = d(\phi(x), \phi(y)) = d(x, y)$. Or comme d est une distance, cela implique par definition que $x = y$
Ainsi, ϕ est bien injective

— Soit ϕ une isometrie bijective et $x, y \in X$ On a alors

$$d(x, y) = d(\phi(\phi^{-1}(x)), \phi(\phi^{-1}(y))) = d((\phi^{-1}(x), (\phi^{-1}(y)))$$

Ou la deuxieme egalite vient du fait que ϕ est une isometrie.
Ainsi on a montre que $d((\phi^{-1}(x), (\phi^{-1}(y))) = d(x, y)$ et donc ϕ^{-1} est bien une isometrie

Solution 3. En fait, par definition de la distance de Hamming, on voit rapidement qu'une application est une isometrie selon cette distance si et seulement si elle est injective. C'est pourquoi on doit prendre un ensemble infini (car dans un ensemble fini, une application injective est forcement bijective).
Prenons l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ et $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definie par $\phi(n) = n + 1$
On a alors que ϕ est injective et donc bien une isometrie selon la distance de Hamming mais elle n'est pas surjective, on a donc trouve notre contre-exemple (en fait on pouvait prendre n'importe quelle application injective est non surjective d'un ensemble dans lui-meme, comme l'exponentielle reelle, l'arctangeante, etc...)

Solution 4. Dans chacun des cas, les proprietes de separation des points et de symetrie sont evidentes, nous nous occuperons que de l'inegalite triangulaire. Soient $(x, y), (x', y'), (x'', x'') \in \mathbb{R}^2$:

— Occupons-nous de la distance d_0 :
Comme

$$\delta_{x \neq x''} \leqslant \delta_{x \neq x'} + \delta_{x' \neq x''}$$

(c'est tout simplement l'inegalite triangulaire pour la distance de Hamming, prouve a l'exercice 1) et

$$\delta_{y \neq y''} \leqslant \delta_{y \neq y'} + \delta_{y' \neq y''}$$

On a que

$$\delta_{x \neq x''} + \delta_{y \neq y''} \leqslant \delta_{x \neq x'} + \delta_{x' \neq x''} + \delta_{y \neq y'} + \delta_{y' \neq y''}$$

Ce qui veut dire que

$$d_0((x,y),(x'',y'')) \leqslant d_0((x,y),(x',y')) + d_0((x',y'),(x'',y''))$$

— Maintenant voyons pour la distance d_1 :
Rappelons que dans $\mathbb{R}$, on a $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ (c'est l'inegalite triangulaire dans $\mathbb{R}$, que vous pouvez supposer comme connue (au pire ce n'est pas tres complique a prouver). On a donc :

$$d_1((x,y),(x'',y'')) = |x-x''| + |y-y''| \leqslant |x-x'| + |x'-x''| + |y-y'| + |y'-y''|$$

et donc

$$d_1((x,y),(x'',y'')) \leqslant d_1((x,y),(x',y')) + d_1((x',y'),(x'',y''))$$

— Voyons pour la distance d_2 :
Ici, c'est plus complique, et on va utiliser l'indication : (vous pouvez prouver que l'inegalite triangulaire est vraie si et seulement si $||\vec{v} + \vec{w}|| \leqslant ||\vec{v}|| + ||\vec{w}||$ pour tout $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$) Verifions que c'est vrai ici (tout d'abord on suppose $x = 1$)
$||(1,y) + (x',y')||^2 = (1+x')^2 + (y+y')^2 = 1 + x'^2 + y^2 + y'^2 + 2(x' + yy')$ et $(||(1,y)|| + ||(x',y')||)^2 = 1 + x'^2 + y'^2 + y^2 + 2\sqrt{(1+y^2)(x'^2+y'^2)}$
Ainsi, il faut juste montrer que $x' + yy' \leqslant \sqrt{(1+y^2)(x'^2+y'^2)}$ et donc en prenant le carre des deux cotes (on garde l'equivalence car la racine est positive), il suffit de montrer que $x'^2 + 2x'yy' + y^2y'^2 \leqslant (1+y^2)(x'^2+y'^2) = x'^2 + y'^2 + y^2x'^2 + y^2y'^2$ ce qui equivaut a $2x'yy' \leqslant y'^2 + y^2x'^2$, qui est equivalent a $0 \leqslant y'^2 - 2x'yy' + y^2x'^2 = (y' - x'y)^2$, ce qui pour le coup est vrai.
Ainsi

$$||(1,y) + (x',y')||^2 \leqslant (||(1,y)|| + ||(x',y')||)^2$$

et comme tout est positif,

$$||(1,y) + (x',y')|| \leqslant ||(1,y)|| + ||(x',y')||$$

Voyons maintenant le cas de x quelconque : Si $x = 0$ alors l'inegalite se montre assez aisement, si $x \neq 0$, alors on a que

$$||(x, y) + (x', y')|| = |x|||(1, y/x) + (x'/x, y'/x)||$$

Comme on sait que c'est vrai dans le cas $x = 1$, on a

$$||(x, y) + (x', y')| \leqslant |x|(||(1, y/x)|| + ||(x'/x, y'/y)||) = ||(x, y)|| + ||(x', y')||$$

On a donc prouve l'inegalite triangulaire dans le cas de d_2

— Pour la distance d_4, la methode est essentiellement la meme que celle faite pour d_2. Quoi qu'il en soit, pour ceux qui chercheraient une autre preuve, cherchez l'inegalite de Minkowski sur internet (ou sinon vous le prouverez plus generalement en analyse 2).

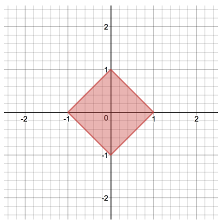
— Pour la distance d_∞, on a que :
$|x - x''| \leqslant |x - x'| + |x' - x''|$ et $|y - y''| \leqslant |y - y'| + |y' - y''|$. Ainsi, $|x - x''| \leqslant d_\infty((x, y), (x', y')) + d_\infty((x', y'), (x'', y''))$ et de meme pour $|y - y''|$
On obtient donc finalement que

$$d_\infty((x, y), (x'', y'')) \leqslant d_\infty((x, y), (x', y')) + d_\infty((x', y'), (x'', y''))$$

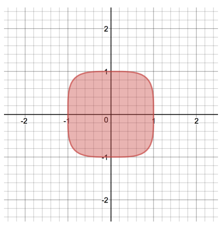
— Voici les differentes boules (la boule avec la distance d_2 est le disque habituel) :

La boule unite $B_{d_0}(\vec{0}, 1)$ est la croix obtenue comme l'union de l'axe des abscisse et des ordonnees : $B_{d_0}(\vec{0}, 1) = \{(0, y)\} \cup \{(x, 0)\}$.

$B_{d_1}(\vec{0}, 1) = \{(x, y), |x| + |y| \leqslant 1\}$ donnee :



$B_{d_4}(\vec{0}, 1)$ est donnee par



$B_{d_\infty}(\vec{0},1)$ est donnee par