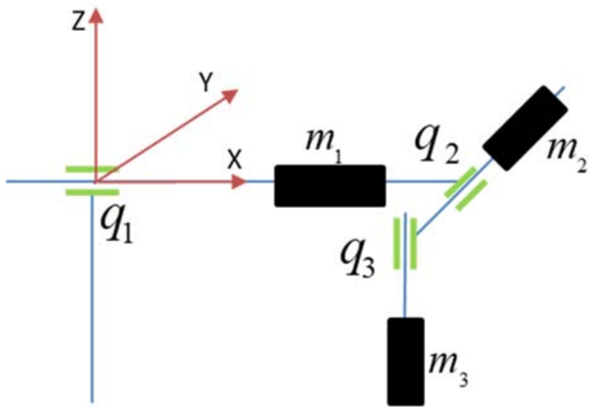
Corrigé 5 – Jacobien

26.10.2018

Solution 5.1 :

La première étape est de tracer un repère {X, Y, Z} direct. Une autre étape est de décrire la machine et ses mouvements articulaires (q_1, q_2, q_3).



Dans le cas de cet exercice, il n'y a pas d'informations pour être capable de décrire notre machine, à part le fait que l'axe vertical est orienté vers le haut. Nous choisirons cependant la représentation ci-contre.

m_1, m_2 et *m_3* sont les masses en mouvement associées à chaque axe. La masse en mouvement totale rapportée à l'axe x est {m_1+m_2+m_3}.

Attention. La réponse n'est complète que si elle est associée à une représentation articulaire.

1. La représentation du modèle géométrique direct est alors : $\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix}$

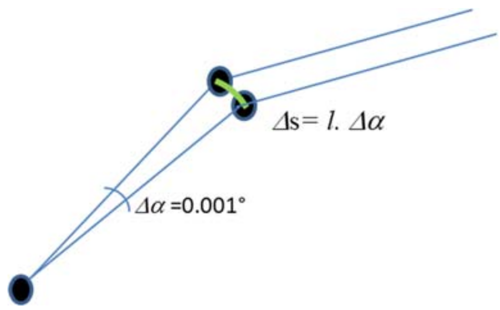
   Le modèle inverse est : $\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$

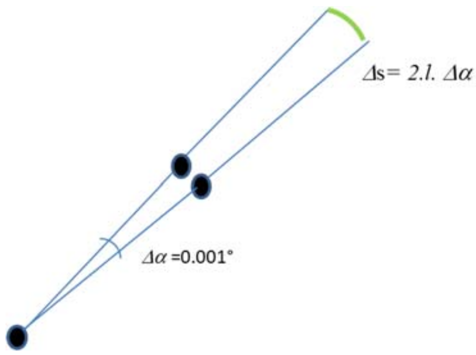
2. La matrice Jacobienne est $J = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$

3. Il est évident d'observer que les mouvements de l'outil d'une machine cartésienne sont découplés. L'erreur outil et la vitesse dans toutes les directions sont constantes et ne changent pas en fonction du point de travail du robot. Ceci n'est pas le cas de l'exercice suivant.

Solution 5.2 :

1. L'objectif de cet exercice est d'avoir une idée rapide des erreurs de positionnement curvilignes projetées depuis un mouvement angulaire.





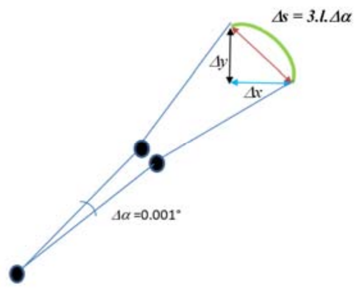
Au bout du premier bras, l'erreur curviligne maximale Δs vaut $l * \Delta\alpha$ ($\Delta\alpha$ en radian), soit :

$$\Delta s = l * \Delta\alpha \cong 6\mu m$$

Au bout du deuxième bras, l'erreur curviligne est au moins double $2.l.\Delta\alpha$

$$\Delta s' = 2 * l * \Delta\alpha \cong 12\mu m$$

Cette erreur curviligne au bout du robot peut atteindre $3 * l * \Delta\alpha \cong 18\ \mu m$ voir figure ci-contre). Ceci en considérant l'erreur de l'axe de rotation 2.



2. L'erreur projetée à la sortie n'est pas constante. Elle dépend de la position du robot. L'expression de la Jacobienne définit bien cette variation.

$$\begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -l_1\sin(q_1) - l_2\sin(q_1+q_2) & -l_2\sin(q_1+q_2) \\ l_1\cos(q_1) + l_2\cos(q_1+q_2) & l_2\cos(q_1+q_2) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\alpha_1 \\ \Delta\alpha_2 \end{Bmatrix}$$

$l_1 = l_2 = l$ (selon donnée) et $\Delta\alpha_1 = \Delta\alpha_2 = \Delta\alpha$ (même résolution au niveau des deux axes articulaires).

Nous avons :

$$\Delta x \leq 3 * l * \Delta\alpha \ et \ \Delta y \leq 3 * l * \Delta\alpha$$
$$\rightarrow \Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 < 18 * l^2 * \Delta\alpha^2$$

$$\boxed{\rightarrow \boldsymbol{\Delta s \leq 4.25 * l * \Delta\alpha}}$$

Ce calcul est approximatif. Le calcul juste serait d'utiliser la matrice Jacobienne et d'analyser la variation de l'erreur outil en fonction de la position du robot.

3. Nous savons que les vitesses de l'outil sont liées aux vitesses articulaires par la relation suivante qui utilise la matrice Jacobienne :

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -l_1\sin(q_1) - l_2\sin(q_1+q_2) & -l_2\sin(q_1+q_2) \\ l_1\cos(q_1) + l_2\cos(q_1+q_2) & l_2\cos(q_1+q_2) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} = J(q_1, q_2) \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix}$$

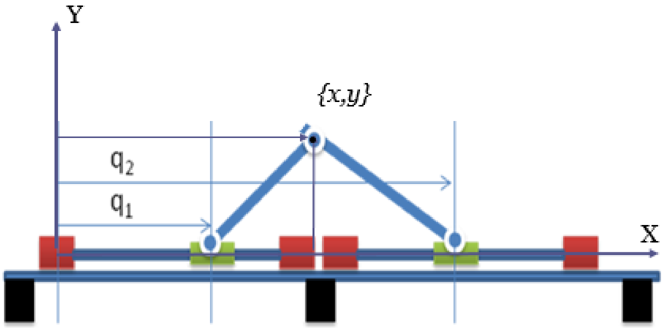
$$\rightarrow \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} = J^{-1}(q_1, q_2) \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix}$$

Les vitesses des moteurs sont alors déduites grâce à la connaissance de la vitesse de l'outil spécifiée dans le cahier des charges. L'analyse de cette vitesse dans le volume de travail permet alors de dimensionner les moteurs qui pourront être utilisés pour l'application désirée.

Solution 5.3 :

1. Ce robot est un robot à cinématique parallèle
2. Il possède deux dégrées de liberté correspondant respectivement aux translations x et y.
   Si les deux articulations bougent dans le même sens avec la même vitesse, le mouvement est seulement en x.
   Si les deux articulations bougent en sens opposé à la même vitesse, le mouvement est seulement en y.
   Dans tous les autres cas, le mouvement est couplé (x, y).

3. Le robot Lambda à 2 axes de la figure ci-dessous possède comme vecteur outil $X = \{x, y\}$ et comme vecteur articulaire $q = \{q_1, q_2\}$.



   Le vecteur de vitesse outil est $\dot{X} = \{\dot{x}, \dot{y}\}$
   Le vecteur articulaire est $\dot{q} = \{\dot{q_1}, \dot{q_2}\}$.

4. Les applications de ce robot sont multiples :
   a. Mouvement de rééducation : LHS-SA.ch
   b. CNC laser
   c. Reha Technologies
5.

Modèle géométrique inverse	**Modèle géométrique inverse**
$\begin{cases} x = q_1 + \left(\frac{q_2 - q_1}{2}\right) = \frac{q_1}{2} + \frac{q_2}{2} \\ y = \sqrt{L^2 - \left(\frac{q_2 - q_1}{2}\right)^2} \end{cases}$	$\begin{cases} q_1 = x - \sqrt{L^2 - y^2} \\ q_2 = x + \sqrt{L^2 - y^2} \end{cases}$

6. Matrices Jacobiennes :

$$J_D = deriv\ (MGD)\ par\ rapport\ à\ q_1 et\ q_2 = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} \end{Bmatrix}$$

   Soit :

$$J_D = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}\frac{q_2 - q_1}{\sqrt{L^2 - \left(\frac{q_2 - q_1}{2}\right)^2}} & \frac{1}{4}\frac{q_1 - q_2}{\sqrt{L^2 - \left(\frac{q_2 - q_1}{2}\right)^2}} \end{Bmatrix}$$

Le Jacobien inverse vaut :

$$J_I = deriv\ (MGI)\ par\ rapport\ à\ x\ et\ y = \begin{Bmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x} & \frac{\partial q_1}{\partial y} \\ \frac{\partial q_2}{\partial x} & \frac{\partial q_2}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

Ou bien

$$J_I = (J_D)^{-1} \rightarrow J_I = \begin{Bmatrix} 1 & \frac{y}{\sqrt{L^2-y^2}} \\ 1 & \frac{y}{\sqrt{L^2-y^2}} \end{Bmatrix}$$

7. Les utilités :

Première utilité : Relation entre les vitesses

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} = J_D \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}\frac{q_2-q_1}{\sqrt{L^2-\left(\frac{q_2-q_1}{2}\right)^2}} & \frac{1}{4}\frac{q_1-q_2}{\sqrt{L^2-\left(\frac{q_2-q_1}{2}\right)^2}} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix}$$

Soit :

$$\dot{x} = \frac{1}{2}\dot{q}_1 + \frac{1}{2}\dot{q}_2$$

$$\dot{y} = \frac{1}{4}\frac{q_2-q_1}{\sqrt{L^2-\left(\frac{q_2-q_1}{2}\right)^2}}\dot{q}_1 + \frac{1}{4}\frac{q_1-q_2}{\sqrt{L^2-\left(\frac{q_2-q_1}{2}\right)^2}}\dot{q}_2$$

Signification 1:

La connaissance des vitesses des moteurs 1 et 2, nous pouvons déduire les vitesses au niveau de l'outil. Cette matrice est un rapport entre les vitesses outil et articulaires : La Jacobienne sera également la **Matrice de réduction**.

D'autre part et grâce au Jacobien inverse, nous pouvons écrire :

$$\begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} = J_I \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & \frac{y}{\sqrt{L^2-y^2}} \\ 1 & \frac{y}{\sqrt{L^2-y^2}} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix}$$

Soit :

$$\dot{q}_1 = \dot{x} + \frac{y}{\sqrt{L^2-y^2}}\dot{y}$$

$$\dot{q}_2 = \dot{x} + \frac{y}{\sqrt{L^2-y^2}}\dot{y}$$

Signification 2:

Grâce à la connaissance des vitesses désirées au niveau de l'outil, nous pouvons choisir les moteurs (Il s'agit de dimensionner uniquement la vitesse des moteurs).

Il faut noter que ces vitesses articulaires (moteurs) dépendent de la position de travail du robot et il faudra faire une analyse approfondie pour choisir le cas le plus défavorable.

Deuxième utilité : Relation entre les erreurs articulaires et outil

$$\begin{Bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{Bmatrix} = J_D \begin{Bmatrix}\Delta q_1\\ \Delta q_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4}\dfrac{q_2 - q_1}{\sqrt{L^2 - \left(\frac{q_2-q_1}{2}\right)^2}} & \dfrac{1}{4}\dfrac{q_1 - q_2}{\sqrt{L^2 - \left(\frac{q_2-q_1}{2}\right)^2}} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix}\Delta q_1\\ \Delta q_2\end{Bmatrix}$$

$$\Delta x = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Delta q_1} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Delta q_2}$$

$$\Delta y = \frac{1}{4}\frac{q_2 - q_1}{\sqrt{L^2 - \left(\frac{q_2-q_1}{2}\right)^2}}\boldsymbol{\Delta q_1} + \frac{1}{4}\frac{q_1 - q_2}{\sqrt{L^2 - \left(\frac{q_2-q_1}{2}\right)^2}}\boldsymbol{\Delta q_2}$$

Signification 3:

Grâce à la connaissance des résolutions articulaires (capteurs au niveau des moteurs), nous pouvons déduire les résolutions au niveau de l'outil.

Il faut noter que cette résolution outil dépend de la position de travail.

D'autre part, si nous connaissons la résolution outil désirée et que nous cherchons la résolution des capteurs au niveau des articulations il faut utiliser le Jacobien inverse :

$$\begin{Bmatrix}\Delta q_1\\ \Delta q_2\end{Bmatrix} = J_I \begin{Bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & \dfrac{y}{\sqrt{L^2 - y^2}} \\ 1 & \dfrac{y}{\sqrt{L^2 - y^2}} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix}\Delta q_1\\ \Delta q_2\end{Bmatrix}$$

Soit :

$$\Delta q_1 = \boldsymbol{\Delta x} + \frac{y}{\sqrt{L^2 - y^2}}\boldsymbol{\Delta y}$$

$$\Delta q_2 = \boldsymbol{\Delta x} + \frac{y}{\sqrt{L^2 - y^2}}\boldsymbol{\Delta y}$$

Signification 4:

Grâce à la connaissance de la résolution outil spécifiée par la cahier des charge { $\boldsymbol{\Delta x}$ et $\boldsymbol{\Delta y}$ }, nous pouvons déduire les résolutions articulaires au niveau des moteurs $\{\Delta q_1 \; et \; \Delta q_2\}$.

Ces résolutions articulaires (capteurs moteurs) dépendent de la position de travail du robot et il faudra faire une analyse approfondie pour choisir le cas le plus défavorable.

8. Singularités :

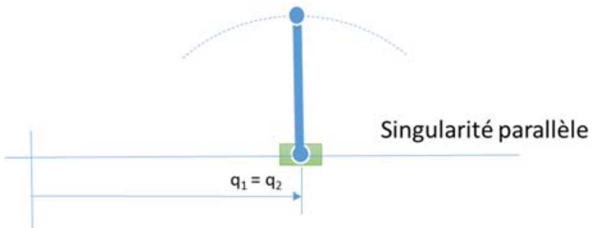
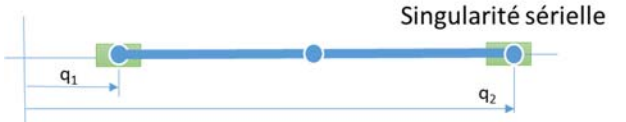
La matrice Jacobienne directe est exprimée comme suit :

$$J_D = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}\frac{q_2 - q_1}{\sqrt{L^2 - \left(\frac{q_2 - q_1}{2}\right)^2}} & \frac{1}{4}\frac{q_1 - q_2}{\sqrt{L^2 - \left(\frac{q_2 - q_1}{2}\right)^2}} \end{Bmatrix}$$

Le déterminant de cette matrice est donné par :

$$\det(J_D) = \frac{1}{2} * \frac{1}{4} * \frac{(q_1 - q_2) - (q_2 - q_1)}{\sqrt{L^2 - \left(\frac{q_2 - q_1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{4} * \frac{(q_1 - q_2)}{\sqrt{L^2 - \left(\frac{q_2 - q_1}{2}\right)^2}}$$

Les singularités sont associées aux configurations suivantes :

$q_1 = q_2$	
$q_2 = 2 * l + q_1$	

Il faut remarquer que ces singularités peuvent être évités en choisissant correctement l'emplacement des butées des axes q_1 et q_2.