Série 8

(les exercices à rendre sont marqués avec *)

Exercice 1

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soit la fonction $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2-10x+3}{x^2-2x-3}\,, & x>3 \\ \alpha\,, & x=3 \\ \beta x - 4\,, & x<3 \end{cases}$$

Étudier la continuité de f en $x_0 = 3$ pour les paires de paramètres (α, β) données ci-dessous.

a) $(1, \frac{1}{2})$ b) $(1, \frac{5}{3})$ c) $(2, \frac{5}{3})$ d) $(1, 2)$ e) $(2, 2)$

Exercice 2*

Soient f et g deux fonctions uniformément continues sur $\mathbb{R}$. Est-ce que $f+g$, $f\cdot g$ et $f\circ g$ sont aussi uniformément continues ? (démontrez vos réponses !)

Exercice 3

Montrer que la fonction $f\colon]0,1[\to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $]0,1[$.

Exercice 4

Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction qui est uniformément continue sur $]-\infty, 1]$ et sur $[0, +\infty[$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbf{R}$.

Exercice 5

Trouver, s'il existe, le prolongement par continuité de la fonction

$$f\colon [0,1[\cup]1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{3}}$$

au point 1, ou alors montrer que f ne peut être prolongée par continuité en 1.