Série 7

(les exercices à rendre sont marqués avec *)

Exercice 1*

Etudier la convergence de la série en fonction du paramètre $c \in \mathbb{R}$.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{c}{1-c})^n$, avec $c \neq 1$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (c-a)^n$, avec $a \in \mathbb{R}$ fixé,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c^n$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin(\frac{\pi c}{2}))^n$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (1+c^2)^n$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n n!}{n^n}$

Quelle est la somme de la série en (d) (lorsqu'elle converge) ?

Solution. On a que

a) La série géométrique $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{c}{1-c})^n$ converge absolument $\Leftrightarrow$ $|\frac{c}{1-c}| < 1$ $\Leftrightarrow$ $c < \frac{1}{2}$.
Remarque : on pourrait aussi utiliser le critère de Cauchy et puis traiter le cas où le critère de Cauchy ne permet pas de conclure (limite = 1) séparément. En effet, quand $|\frac{c}{1-c}| = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$, on obtient la série $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n$ qui diverge.

b) Comme $\sum_{n=1}^{\infty} (c-a)^n$ est une série géométrique, elle converge si et seulement si $|c-a| < 1$, c'est à dire si $c \in]a-1, a+1[$.

c) Pour $c = 0$ la convergence vers 0 est évidente et on peut supposer que $c \neq 0$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} (\frac{n+1}{n}|c|) = |c|,$$

ce qui nous permet de conclure, grâce au critère de d'Alembert, que la série converge absolument si $|c| < 1$ et qu'elle diverge si $|c| > 1$. Si $c = \pm 1$, la série diverge (car son terme général est $(-1)^n n$, qui ne tend pas vers zéro).

d) Pour $c = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$, on a $|(\sin(\frac{\pi c}{2}))^n| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et donc la série diverge.
Pour $c \neq 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$, on a par le critère de Cauchy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |\sin(\tfrac{\pi c}{2})| < 1,$$

et donc la série converge absolument et sa somme vaut (série géométrique commençant à $n = 1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sin(\frac{\pi c}{2}))^n = \frac{\sin(\frac{\pi c}{2})}{1-\sin(\frac{\pi c}{2})} .$$

e) La série diverge pour toute valeur de c.

f) Pour $c = 0$, la série converge et est égale à zéro. Soit donc $c \neq 0$. En utilisant le critère de d'Alembert, on a

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{c^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{c^n n!}| = \lim_{n\to\infty} |c \cdot (\frac{n}{n+1})^n| = \lim_{n\to\infty} \frac{|c|}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{|c|}{e} \ .$$

Ainsi la série converge absolument si $|c| < e$ et elle diverge si $|c| > e$ (et on obtient aucune information si $|c| = e$).

Si $c = \pm e$, la suite des valeurs absolues $(|a_n|)_{n\geq 1}$ est croissante :

$$|a_{n+1}| = |a_n| \cdot \frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n} > |a_n|$$

car la suite $b_n = (1+\frac{1}{n})^n$ croît vers e.
Comme $|a_1| = |c| = e$, il suit que $\lim\limits_{narrow\infty} a_n \neq 0$. Le critère nécessaire pour la convergence d'une série n'est donc pas satisfait et la série diverge.

Exercice 2

Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, où $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite numérique.

a) Si $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

b) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

c) Si $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge absolument, alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ converge.

d) Si $(a_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante, alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ converge.

e) Si $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ converge.

f) Si $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge et $a_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$, alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ converge.

g) La série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (3 + (-1)^n)\, 2^{-n}$ converge absolument et la somme vaut $\frac{20}{3}$.

Solution. On a que

a) VRAI. Comme la série converge, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n a_n = 0$ par le critère nécessaire. Ceci implique $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

b) FAUX. Prendre par exemple la suite $a_n = \frac{1}{n}$. Elle converge vers 0, mais on a vu en cours que la série harmonique diverge. En fait, la condition $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ est une condition *nécessaire* mais pas *suffisante*.

c) VRAI. Comme $|(-1)^n a_n| = |a_n|$ et que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ converge par le critère de la convergence absolue.

d) FAUX. Prendre par exemple la suite $a_n = -n$ qui est strictement décroissante. Comme $(-1)^n a_n = (-1)^{n+1} n$ ne converge pas vers zéro, la série diverge.

e) FAUX. Prendre par exemple la suite $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Par le critère de Leibniz, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge. Par contre $a_n^2 = \frac{1}{n}$ et on obtient la série harmonique qui diverge.

f) VRAI. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $|a_n| \leq 1$ pour tout $n \geq n_0$ (définition de la convergence avec $\varepsilon = 1$). Donc $0 \leq a_n^2 \leq a_n$ pour tout $n \geq n_0$ et ainsi la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ converge par le critère de comparaison.

g) VRAI. Pour $a_n = (3 + (-1)^n) 2^{-n}$, on a $|a_n| \leq 4(1/2)^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} 4(1/2)^n = 4\frac{1}{1-(1/2)} < +\infty$, d'où la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ est absolument convergente. De plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (3 + (-1)^n)\, 2^{-n} = 3\sum_{n=0}^{+\infty}(1/2)^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1/2)^n = 3\frac{1}{1-(1/2)} + \frac{1}{1-(-1/2)} = 6 + \frac{2}{3} = 20/3.$$

Exercice 3

Montrer à l'aide de la définition "ϵ–δ" de la limite que

a) $\lim\limits_{x\to1}(2x+8) = 10$ b) $\lim\limits_{x\to2} x^2 = 4$ c) $\lim\limits_{x\to-2}(|x| - x^3) = 10$

Solution. On a que

a) Soit $\epsilon > 0$. Si $\delta > 0$ et $0 < |x-1| \leq \delta$, on a $|2x+8-10| = |2(x-1)| = 2|x-1| \leq 2\delta$. Dans la définition de limite, on peut choisir $\delta = \epsilon/2$ et obtenir $|2x+8-10| \leq \epsilon$ pour tout $x \in [1-\delta, 1+\delta]\backslash\{1\}$.

b) Soit $\epsilon > 0$. Si $\delta > 0$ et $0 < |x-2| \leq \delta$, on a $|x^2-4| = |(x+2)(x-2)| = |x+2|\,|x-2| \leq (2+\delta+2)|x-2|$ car $2-\delta \leq x \leq 2+\delta$. Si de plus $\delta \leq 1$, $(2+\delta+2)|x-2| \leq 5|x-2| \leq 5\delta$. Si encore $\delta \leq \frac{\epsilon}{5}$, on a finalement $5\delta \leq \epsilon$. Dans la définition de limite, on peut choisir $\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{5}\}$ et obtenir $|x^2-4| \leq \epsilon$ pour tout $x \in [2-\delta, 2+\delta]\backslash\{2\}$.

c) Soit $\epsilon > 0$. Si $\delta \in]0,1]$ et $0 < |x-(-2)| \leq \delta$, on a $x \in [-3,-1]$ et $|\,|x| - x^3 - 10| = |-x-x^3-10| = |x^3+x+10| = |(x+2)(x^2-2x+5)| \leq |x+2|(3^2+2\cdot3+5) = 20|x+2| \leq 20\delta$. Dans la définition de limite, on peut choisir $\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{20}\}$ et obtenir $|\,|x| - x^3 - 10| \leq \epsilon$ pour tout $x \in [-2-\delta, -2+\delta]\backslash\{-2\}$.

Exercice 4

Prouver que la limite $\lim\limits_{x\to0}\sin(1/x)$ n'existe pas à l'aide de deux suites (u_n) et (v_n) dans $\mathbb{R}^*$ qui convergent vers 0 et telles que les suites $\Big(\sin(1/u_n)\Big)$ et $\Big(\sin(1/v_n)\Big)$ tendent vers des limites différentes.

Remarque : le graphique de la fonction $\sin(1/x)$ pour $x \neq 0$ permet de développer son intuition.

Solution. Considérons les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$u_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Les deux suites sont dans $\mathbb{R}^*$, convergent vers 0,

$$\lim_{n\to+\infty} \sin(1/u_n) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \sin(1/v_n) = 1.$$

Si la limite $\lim_{x\to 0} \sin(1/x)$ existait, nous obtiendrions la contradiction

$$-1 = \lim_{n\to+\infty} \sin(1/u_n) = \lim_{x\to 0} \sin(1/x) = \lim_{n\to+\infty} \sin(1/v_n) = 1.$$

Exercice 5

Parmi les énoncés suivants, déterminer lesquels sont équivalents à $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

a) $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x : 0 < |x - x_0| < \epsilon \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \delta$.

b) $\forall \delta > 0\ \exists \epsilon > 0\ \forall x : 0 < |x - x_0| < \epsilon \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \delta$.

c) $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x : 0 < |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$.

d) $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \epsilon$.

e) $\forall \epsilon \geq 0\ \exists \delta > 0\ \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$.

f) $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta \geq 0\ \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$.

g) $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x : |f(x) - \ell| \geq \epsilon \Longrightarrow |x - x_0| \geq \delta$.

Solution. On a que

a) FAUX. Avec l'énoncé donné on peut démontrer que $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ pour $f(x) = x$. En fait, soit $\epsilon > 0$ et prenons

$$\delta = \max_{x\in]1-\epsilon;1+\epsilon[} |f(x) - 2|.$$

Donc pour tous $x \in]1-\epsilon; 1+\epsilon[$ on a que $|f(x) - 2| < \delta$. Comme $\lim_{x\to 1} f(x) \neq 2$ on a bien que l'énoncé n'est pas équivalent à la définition de la limite.

b) VRAI. Il suffit de remplacer δ avec ϵ et ϵ avec δ pour voir que l'énoncé est égal à la définition "$\epsilon - \delta$" de la limite.

c) VRAI. L'énoncé c'est équivalent a la définition "$\epsilon - \delta$" de la limite. La preuve est similaire à la preuve de l'exercice 2 de la série 3.

d) VRAI. Comme point c).

e) FAUX. Soit $f(x) = x$ et considérons la limite $\lim_{x\to 0} f(x)$. On sait que la limite vaut 0 mais si on utilise l'énoncé avec $\epsilon = 0$, on voit que il n'existe pas un $\delta > 0$ tel que $f(x) = 0$ pour tous $x \in]-\delta; \delta[$. Donc pour l'énoncé e) on a que $\lim_{x\to 0} f(x) \neq 0$ et donc il n'est pas équivalent à la définition de la limite.

f) FAUX. L'énoncé est vrai pour tous les fonctions $f(x)$ et pour tous les limites ℓ.

g) VRAI. ça suffit de prendre la négation de la forme logique " $0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$" pour voir que l'énoncé est équivalent à la définition de la limite.