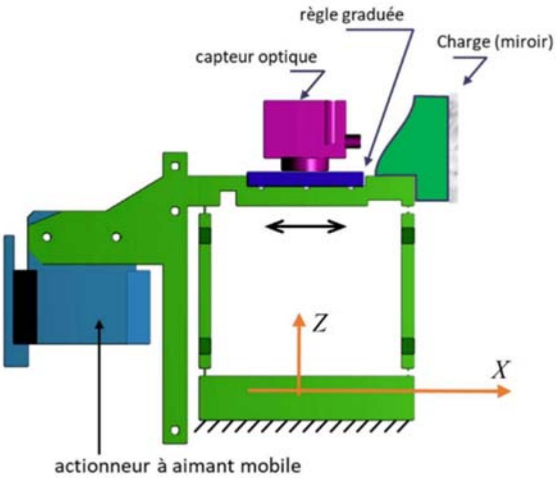
Corrigé 6 – Dynamique 1

02.11.2018

Solution 6.1 :



Le guidage à lames fonctionne comme un ressort libre dans la direction du mouvement X et rigide dans les autres directions.

En fixant l'axe X au point « zéro » du ressort (fig. ci-contre), la relation de Newton appliquée au mouvement s'écrit comme suit :

$$\sum F = F_m - K_r x = (M_g + M_l)\ddot{x}$$

Soit : $$K_f i - K_r x = (M_g + M_l)\ddot{x}$$

1. Modèle Dynamique direct* :

$$K_f i = (M_g + M_l)\ddot{x} + K_r x$$

$$\frac{x}{i} = \frac{K_f}{(M_g + M_l)s^2 + k_r}$$

Le MDD est représenté par une fonction de transfert.

*) Le résultat est également correct si on considère la force moteur F_m au lieu du courant.

Parenthèse. Modèle dynamique direct par représentation d'état.
Les variables d'état d'un axe électromécanique, et celle d'un robot en général, sont respectivement la variable de position et la variable de vitesse. Le vecteur d'état est alors : $\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases}$, <u>Finalement</u>, l'équation d'état s'écrit comme suit : $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{x} \end{cases}$ $\rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{K_r}{(M_g+M_l)} x_1 + \frac{K_f}{(M_g+M_l)} i \end{cases}$ Qui correspond à deux équations différentielles du premier ordre.

2. Le modèle dynamique inverse représente l'expression algébrique du couple généralisé (force ou couple) en fonction des variables articulaires de position et/ou vitesse et/ou accélération. Pour notre axe linéaire à lames flexibles, Il s'écrit de la manière suivante :

$$i = \frac{(M_g + M_l)}{K_f}\ddot{x} + \frac{K_r}{K_f}x$$

__Également__ :

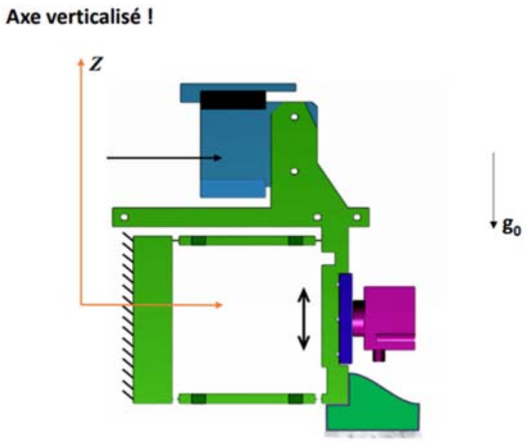
$$F_m = (M_g + M_l)\ddot{x} + K_r x$$

Les deux écritures dynamiques inverses sont correctes, selon que nous considérons le courant ou la force du moteur.

3. En changeant l'orientation de l'axe linéaire à lames flexibles, le moteur subit la force de gravité. Ceci se reflète sur le nouveau bilan de forces suivant :

$$\sum F = K_f i - K_r z - (M_g + M_l)g = (M_g + M_l)\ddot{z}$$

__Soit__ : $K_f i = (M_g + M_l)\ddot{z} + K_r z + (M_g + M_l)g$



Dans ce cas, il est plus difficile d'exprimer le système en fonction de transfert car nous sommes en présence d'une double entrée, une entrée de commande et une entrée constante liée à la force de gravité. L'équation ci-dessus s'écrit alors :

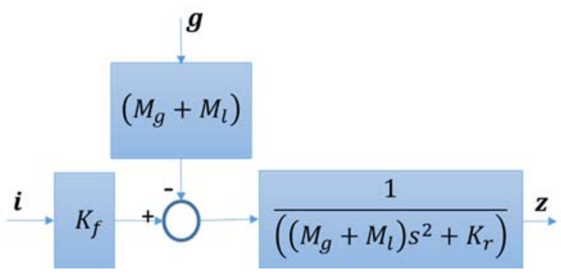
$$(M_g + M_l)\ddot{z} + K_r z = K_f i - (M_g + M_l)g$$

$$\left((M_g + M_l)s^2 + K_r\right)z = K_f i - (M_g + M_l)g$$

$$z = \frac{K_f}{\left((M_g + M_l)s^2 + K_r\right)}i - \frac{(M_g + M_l)}{\left((M_g + M_l)s^2 + K_r\right)}g$$

Nous pouvons également l'écrire comme suit et déduire la représentation en schéma bloc ci-contre :

$$z = \frac{1}{\left((M_g + M_l)s^2 + K_r\right)}\left(K_f i - (M_g + M_l)g\right)$$



Parenthèse. Modèle dynamique direct par représentation d'état.
Les variables d'état d'un axe électromécanique, et celle d'un robot en général, sont respectivement la variable de position et la variable de vitesse.   Soit $\begin{cases} x_1 = z \\ x_2 = \dot{z} \end{cases}$, $\rightarrow$ $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{z} \end{cases}$ Sachant, $(M_g + M_l)\ddot{z} = K_f i - K_r z - (M_g + M_l)g$ <u>Finalement</u>, l'équation d'état s'écrit comme suit : $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{K_r}{(M_g+M_l)} x_1 + \frac{K_f}{(M_g+M_l)} i - g \end{cases}$ Qui correspond à deux équations différentielles du premier ordre.

Le MDI est alors simplement donné par :

$$i = \frac{(M_g + M_l)}{K_f}(\ddot{z} + g) + \frac{K_r}{K_f} z$$

Ou également :

$$F_m = (M_g + M_l)\ddot{z} + K_r z + (M_g + M_l)g$$

Solution 6.2

1. $\boldsymbol{J_T}$ est le moment d'inertie total ramené à l'axe de rotation de la charge. Il est exprimé comme suit:

$$J_T = \left(J_b + M_b\left(\frac{l}{2}\right)^2\right) + \mathrm{n}^2 J_m + Ml^2$$

2. L'équation du modèle dynamique par rapport à la position de la charge s'écrit de la manière suivante :

$$\sum M = J_T\ddot{\theta} = n\Gamma_m - M_b g\frac{l}{2}\sin(\theta) - Mglsin(\theta) - k_{vis}\dot{\theta}$$

$\mathbf{n}.\boldsymbol{\Gamma}_\mathbf{m}$ est le couple moteur ramené à la charge : c'est le couple d'actionnement disponible au niveau de la charge que nous noterons $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{act}}$. L'expression du modèle dynamique inverse est alors donnée comme suit :

$$\boldsymbol{\Gamma_{act}} = \boldsymbol{n\Gamma_m} = J_T\ddot{\theta} + M_b g\frac{l}{2}\sin(\theta) + Mglsin(\theta) + k_{vis}\dot{\theta}$$

Grâce à la connaissance de cette expression du couple en fonction des trajectoires désirées, nous pouvons dimensionner le couple moteur.

Parenthèse. Couple moteur à la sortie d'un réducteur
Notez bien qu'un réducteur amplifie le couple par le rapport de réduction « **n** » et réduit la vitesse par ce même rapport, à rendement unitaire. Dans le cas d'un rendement $\boldsymbol{\rho}$ non unitaire (présence de pertes dans le réducteur), le couple de sortie d'un réducteur est égal $\boldsymbol{\rho n\Gamma_m}$

3. **Obtention du MDD**

L'équation différentielle qui régit cet axe de robot est non linéaire (à cause de la présence de la fonction non linéaire *sinus***)**. Le MDD **doit alors être donné par une équation d'état** car la fonction de transfert ne permet de représenter que les systèmes linéaires.

$$J_T\ddot{\theta} = n\Gamma_m - M_b g\frac{l}{2}\sin(\theta) - Mglsin(\theta) - k_{vis}\dot{\theta}$$

$$= -\left(M_b g\frac{l}{2} - Mgl\right)sin(\theta) - k_{vis}\dot{\theta} + n\Gamma_m$$

Les variables d'état sont respectivement la variable de position et la variable de vitesse et le vecteur d'état est donné comme suit :

$$\begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta}\text{'} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{\theta} \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{J_T}\left(M_b g\frac{l}{2} - Mgl\right)\sin(x_1) - k_{vis}x_2 + n\Gamma_m \end{cases}$$

4. Le modèle dynamique a priori est la valeur du ***couple moteur donné pour les trajectoires désirées***.

$$\boldsymbol{\Gamma_{act\_ap}} = n\Gamma_{m\_ap} = J_T\ddot{\theta}_d + M_b g \frac{l}{2}\sin(\theta_d) + Mglsin(\theta_d) + k_{vis}\dot{\theta}_d$$

$\boldsymbol{\Gamma_{act\_ap}}$ est le couple dynamique a priori ramené à la charge. Il est très utile pour le dimensionnement du couple dynamique au niveau de la charge avant d'avoir choisi le réducteur.

$$\boldsymbol{\Gamma_{m\_ap}} = \frac{1}{n}\left(J_T\ddot{\theta}_d + M_b g \frac{l}{2}\sin(\theta_d) + Mglsin(\theta_d) + k_{vis}\dot{\theta}_d\right)$$

$\boldsymbol{\Gamma_{m\_ap}}$ est le couple dynamique a priori ramené au moteur. Il servira à évaluer les besoins du moteur et à l'implémentation d'un schéma de commande a priori. Attention à prendre également en compte le rendement de la réduction si vous le connaissez !