# Série 8

**(les exercices à rendre sont marqués avec *)**

## Exercice 1

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soit la fonction $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2-10x+3}{x^2-2x-3}\,, & x > 3 \\ \alpha\,, & x = 3 \\ \beta x - 4\,, & x < 3 \end{cases}$$

Étudier la continuité de $f$ en $x_0 = 3$ pour les paires de paramètres $(\alpha, \beta)$ données ci-dessous.

a) $(1, \frac{1}{2})$ b) $(1, \frac{5}{3})$ c) $(2, \frac{5}{3})$ d) $(1, 2)$ e) $(2, 2)$

**Solution.**
Les limites à gauche et à droite de $f$ en $x_0 = 3$ sont respectivement

$$\ell_- := \lim_{x\to {x_0}^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (\beta x - 4) = 3\beta - 4$$

$$\ell_+ := \lim_{x\to {x_0}^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{3x^2-10x+3}{x^2-2x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{(3x-1)(x-3)}{(x+1)(x-3)} = \lim_{x\to 3^+} \frac{3x-1}{x+1} = \frac{8}{4} = 2\,.$$

Comme $f(x_0) = \alpha$, la fonction $f$ est continue à gauche en $x_0 \Leftrightarrow \ell_- = \alpha$, et continue à droite en $x_0 \Leftrightarrow \ell_+ = \alpha$. Si, en plus, $\ell_- = \ell_+ = \alpha$, alors $f$ est continue en $x_0$. Sinon on a que

a) Avec $\alpha = 1$, $\ell_- = -\frac{5}{2}$ et $\ell_+ = 2$, $f$ n'est continue ni à gauche ni à droite.

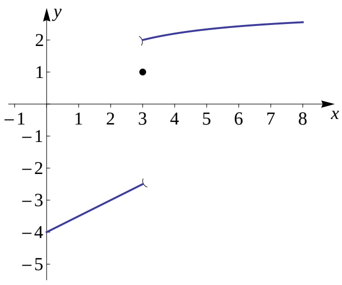
b) Avec $\alpha = 1$, $\ell_- = 1$ et $\ell_+ = 2$, $f$ est continue à gauche mais pas à droite.

c) Avec $\alpha = 2$, $\ell_- = 1$ et $\ell_+ = 2$, $f$ n'est pas continue à gauche mais elle est continue à droite.

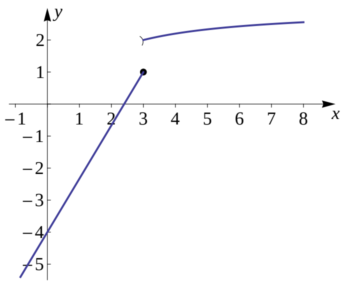
d) Avec $\alpha = 1$, $\ell_- = 2$ et $\ell_+ = 2$, on a bien $\ell_- = \ell_+$, mais $f$ n'est quand-même continue ni à gauche ni à droite parce que les limites ne sont pas égales à $f(x_0)$.

e) Avec $\alpha = 2$, $\ell_- = 2$ et $\ell_+ = 2$, $f$ est continue.

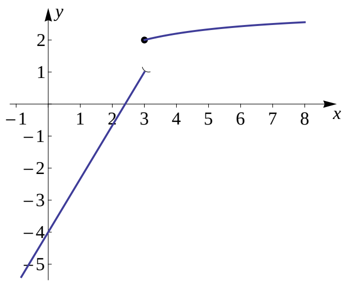
Ci-dessous les illustrations des cas vus *a)*



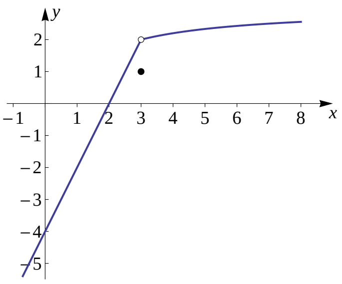

*b)*



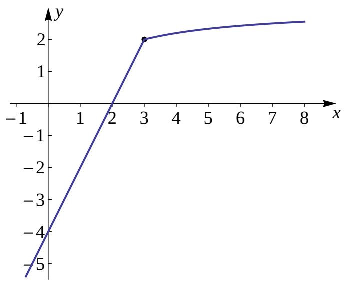

*c)*




*d)*




*e)*




## Exercice 2*

Soient $f$ et $g$ deux fonctions uniformément continues sur $\mathbb{R}$. Est-ce que $f+g$, $f \cdot g$ et $f \circ g$ sont aussi uniformément continues ? (démontrez vos réponses !)

**Solution.** On rappelle que une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est uniformément continue si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R} : \quad |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Maintenant soient $f$ et $g$ deux fonctions uniformément continues et soit $\epsilon > 0$. Donc on a que

$$\exists \delta_1 > 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R} : \quad |x - y| < \delta_1 \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$$

et que

$$\exists \delta_2 > 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R} : \quad |x - y| < \delta_2 \implies |g(x) - g(y)| < \frac{\epsilon}{2}$$

Prenons maintenant $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ et on bien que

$$\begin{aligned} |(f(x) + g(x)) - (f(y) + g(y))| &= |f(x) - f(y) + g(x) - g(y)| \\ &\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

pour tous $|x - y| < \delta$. Donc la fonction $f + g$ est uniformément continue.

Maintenant on veut montrer que la multiplication de deux fonctions uniformément continues n'est pas uniformément continue. Soient $f$ et $g$ données par $f(x) = x$ et $g(x) = x$. Clairement les deux fonctions sont uniformément continues mais leur multiplication $(f \cdot g)(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue.

Finalement on démontre que $f \circ g$ est uniformément continue si $f$ et $g$ sont uniformément continues. Soit $\epsilon > 0$, donc on a que

$$\exists \delta_1 > 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R} : \quad |x - y| < \delta_1 \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

et que

$$\exists \delta_2 > 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}: \quad |x-y| < \delta_2 \implies |g(x)-g(y)| < \delta_1$$

Prenons $\delta := \delta_2$ et on a que si

$$\begin{aligned} |x-y| < \delta = \delta_2 &\implies |g(x)-g(y)| < \delta_1 \\ &\implies |(f\circ g)(x) - (f \circ g)(y)| = |f(g(x)) - f(g(y))| < \epsilon. \end{aligned}$$

et donc on peut déduire que $f \circ g$ est uniformément continue.

## Exercice 3

Montrer que la fonction $f\colon ]0,1[ \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $]0,1[$.

**Solution.** Pour démontrer que $f(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue il faut démontrer que

$$\exists \epsilon > 0 \text{ tel que } \forall \delta > 0 \quad \exists x, y \in ]0,1[: \quad |x-y| < \delta \text{ et } |f(x)-f(y)| \geq \epsilon.$$

Soit $\epsilon = 1$ et soit $\delta > 0$ arbitraire. Prenons $x_0 \in ]0,1[$ tel que $0 < x_0 < \min\{2\delta, 1\}$. Maintenant on a pour $x = x_0$ et $y = \frac{x_0}{2}$ que $|x-y| = |\frac{x_0}{2}| < \delta$ mais

$$|f(x)-f(y)| = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| = |\frac{1}{x_0} - \frac{2}{x_0}| = \frac{1}{x_0} \geq 1.$$

Donc la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue.

## Exercice 4

Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction qui est uniformément continue sur $]-\infty, 1]$ et sur $[0, +\infty[$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbf{R}$.

**Solution.** Soit $\epsilon > 0$. Donc on a que

$$\exists 1 > \delta_1 > 0 \quad \forall x, y \in ]-\infty, 1]: \quad |x-y| < \delta_1 \implies |f(x)-f(y)| < \epsilon$$

et que

$$\exists 1 > \delta_2 > 0 \quad \forall x, y \in [0, +\infty[: \quad |x-y| < \delta_2 \implies |f(x)-f(y)| < \epsilon$$

Prenons $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ et soient $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $|x-y| \leq \delta$. On a alors que

a) Si $x, y \in ]-\infty, 0[$ on a que $|x-y| < \delta \leq \delta_1$ et donc $|f(x)-f(y)| < \epsilon$ ;

b) Si $x, y \in ]1, +\infty[$ on a que $|x-y| < \delta \leq \delta_2$ et donc $|f(x)-f(y)| < \epsilon$ ;

c) Si $x, y \in [0,1]$ on a que $|x-y| < \delta \leq \delta_1$ et que $|x-y| < \delta \leq \delta_2$ donc $|f(x)-f(y)| < \epsilon$ ;

On peut conclure que f est uniformément continue sur $\mathbf{R}$.

## Exercice 5

Trouver, s'il existe, le prolongement par continuité de la fonction

$$f\colon [0,1[\cup]1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{3}}$$

au point 1, ou alors montrer que $f$ ne peut être prolongée par continuité en 1.

**Solution.**

Etudions $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. On peut écrire, en utilisant que $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{3}}\\
&= \lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x}+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{1+2x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}}\right)\\
&= \lim_{x\to 1}\left(\frac{1-x}{2(x-1)}\cdot\frac{\sqrt{1+2x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}}\right)\\
&= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1+2x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}}\\
&= -\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

grâce à la continuité de la fonction $x\to\sqrt{x}$ sur $[0,+\infty[$. Donc le prolongement par continuité de $f$ en 1 est

$$\hat{f}_1\colon [0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}, \qquad \hat{f}_1(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{3}}\ , & x\neq 1\\[2ex] -\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\ , & x=1\end{cases}$$

*Remarque :* Le prolongement par continuité s'écrit en fait aussi sans distinction de cas :

$$\hat{f}_1\colon [0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}, \qquad \hat{f}_1(x)=-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+2x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}}.$$