Corrigé 7 – Dynamique 2

09.11.2018

Solution 7.1 :

<u>Q1 : MODELISATION DYNAMIQUE PAR L'APPROCHE DE LAGRANGE:</u>

<u>Résumé de l'approche :</u>

1. Décrire le robot
    a. Identifier l'outil et les articulations diverses.
    b. Identifier les segments du robot.
2. Définir le référentiel de base du robot.
3. Définir les sens positif et négatif de chaque articulation.
4. Ecrire les Jacobiens locaux ramenés à chaque segment.
5. Déduire la matrice d'inertie
    a. Grâce aux éléments inertiels de chaque segment (masse et tenseur d'inertie).
    b. Grâce aux Jacobiens ramenés aux segments (point 4).
6. Déduire les différentes composantes de l'équation dynamique (Coriolis, Centrifuge et Gravité).

Exemple du « Robot cartésien à 2 axes »:

La première opération à effectuer concerne le choix des axes du référentiel du robot. Par la suite, le référencement de chaque axe articulaire doit être effectué.

- L'objectif est de trouver le modèle dynamique de ce robot cartésien.
- $\overrightarrow{z_1}$ et $\overrightarrow{z_2}$ sont les vecteurs directeurs dans la direction des 2 mouvements articulaires 1 et 2.
- Pour trouver le modèle dynamique de ce robot, nous commencerons par établir la matrice d'inertie (eq. 2.11 du cours).

Soit :

$$\mathrm{B(q)} = \sum_{i=1}^{n} (m_i {J_p^i}^T J_p^i \ + \ {J_0^i}^T R_i I_i {R_i}^T J_0^i) \qquad (2.11)$$

J_p^i sont les matrices Jacobiennes pour les translations arrêtées à l'articulation "i".

$$J_p^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad J_p^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\boldsymbol{J_{P,1}^{(1)}} \qquad \boldsymbol{J_{P,2}^{(1)}}}_{\textbf{Link (1)}} \qquad\qquad \underbrace{\boldsymbol{J_{P,1}^{(2)}} \qquad \boldsymbol{J_{P,2}^{(2)}}}_{\textbf{Link (2)}}$$

Il n'y'a aucune rotation $\Longrightarrow$ $J_O^1 = J_O^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Longrightarrow$

$$\mathrm{B(q)} = m_1 J_p^{1^T} J_p^1 + m_2 J_p^{2^T} J_p^2$$

$$= m_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{B(q)} = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

Les termes de la matrice d'inertie sont constants. Ceci signifie qu'il n'y a aucun couplage inertiel et que l'inertie ne varie pas en fonction de la posture du robot.

Concernant le terme de la gravité,

$$g_i(q) = \sum_{j=1}^{n} (m_i \, g^T J_{p,i}^{(j)}) \qquad \mathrm{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g_0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(\underline{Eq 2.22})}$$

Soit:

$$g_1(\mathrm{q}) = m_1 g^T J_{p,1}^{(1)} + m_2 g^T J_{p,1}^{(2)}$$

$$g_2(\mathrm{q}) = m_1 g^T J_{p,2}^{(1)} + m_2 g^T J_{p,2}^{(2)}$$

$$g_1(\mathrm{q}) = m_1 [0 \;\; 0 \;\; -g_0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + m_2 [0 \;\; 0 \;\; -g_0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= -(m_1 + m_2) g_0$$

$$g_2(\mathrm{q}) = m_1 [0 \;\; 0 \;\; -g_0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + m_2 [0 \;\; 0 \;\; -g_0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

<u>Modèle dynamique complet :</u>

$$\tau_1 = (m_1 + m_2)\ddot{q}_1 - g_1(q) = (m_1 + m_2)\ddot{q}_1 + (m_1 + m_2)\, g_0$$

$$\tau_2 = m_2 \ddot{q}_2 - g_2(q) = m_2 \ddot{q}_2$$

<u>Q2 : Que conclure par rapport à ce modèle ?</u>

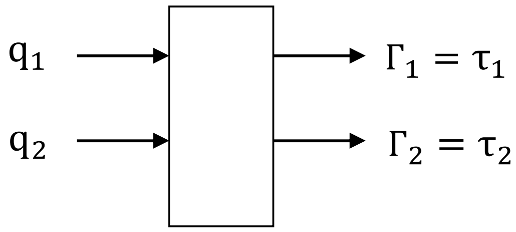
1. Les termes de la matrice d'inertie sont constants.
2. Les dynamiques de l'axe 1 et de l'axe 2 sont totalement découplées.
3. Les régulateurs de chaque axe sont indépendants de la position de travail (q_1, q_2).

<u>Q3 : Le modèle inverse a priori</u>

$\tau_{1ap} = (m_1 + m_2)\ddot{q}_{1d} + (m_1 + m_2)\, g_0$

$\tau_{2ap} = m_2 \ddot{q}_{2ap}$

<u>M.D inverse</u>



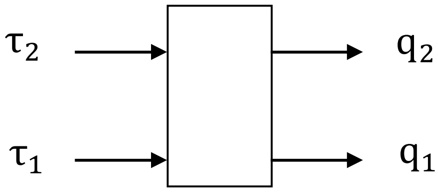
<u>Q4 : Modèle dynamique direct</u>

Les équations précédentes sont des expressions algébriques :

$\tau_1 = f_1(q_1, \ddot{q}_1)$

$\tau_2 = f_2(q_2, \ddot{q}_2)$

<u>M.D direct</u>



$\ddot{q}_1 = \frac{\tau_1}{m_1 + m_2} - g_0 \quad , \quad \ddot{q}_2 = \frac{\tau_2}{m_2}$

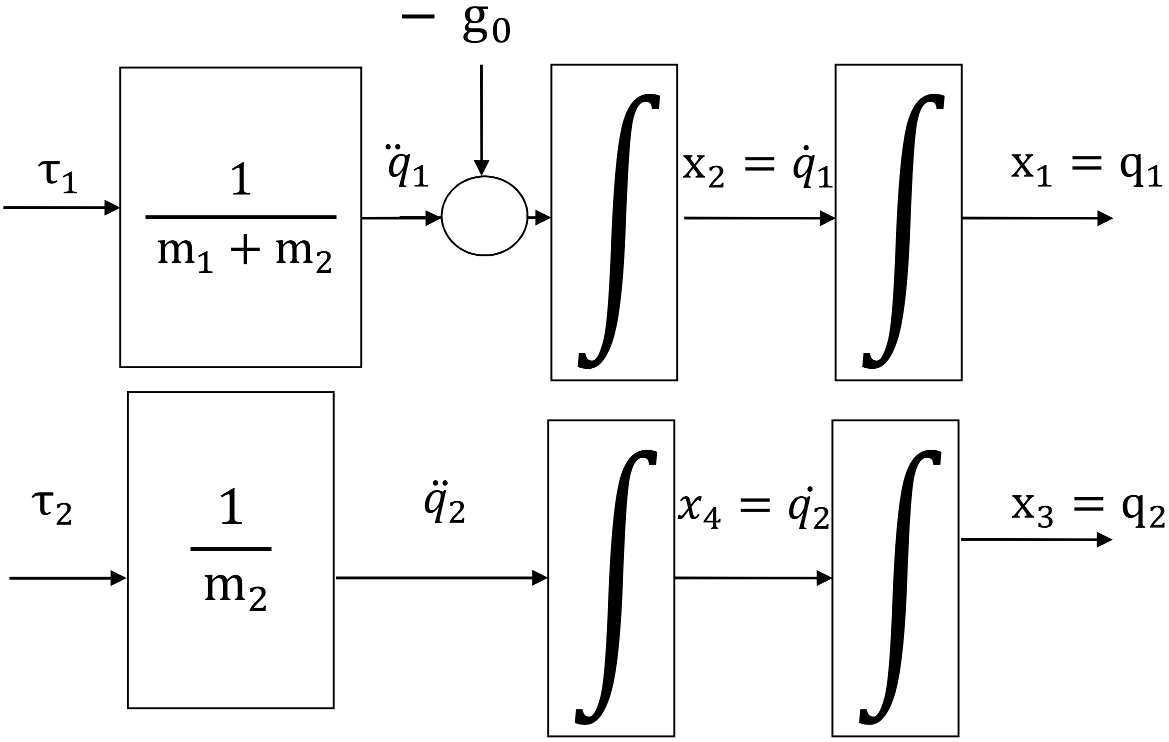
Soient 2 équations différentielles du 2$^{\text{ème}}$ ordre.

<u>Soit sous la forme d'état (positions, vitesses) :</u>

$x_1 = q_1 \qquad x_3 = q_2$

$x_2 = \dot{q}_1 \qquad x_4 = \dot{q}_2$

Les variables d'état sont les variables intégrales qui permettent d'intégrer le système.



Solution 7.2 :

MODELISATION DYNAMIQUE par la méthode de Newton Euler

Approche :

1. Décrire le robot
   a. Identifier le point outil (TCP) et les articulations diverses.
   b. Identifier les segments du robot.
2. Définir le référentiel de base du robot.
3. Définir les sens positif et négatif de chaque articulation.
4. Ecrire les équations de Newton et d'Euler pour chaque segment.
5. Résoudre le système d'équations formé et déduire le modèle dynamique formé par l'expression des couples articulaires pour chaque segment.

Exemple du « Robot cartésien à 2 axes »:

La première opération à effectuer concerne le choix des axes du référentiel du robot. Par la suite, le référencement de chaque axe articulaire doit être effectué.

Corps Ø (bâti) : $v_{cØ} = \ddot{v}_{cØ} = \omega_0 = \dot{\omega}_0 = 0$

Corps 1 (Segment 1):

$$v_{c1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d}_1 \end{bmatrix} \quad , \quad \dot{v}_{c1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{d}_1 \end{bmatrix} \quad , \quad \omega_1 \doteq \omega_1 = 0$$

$$f_{01} = \begin{bmatrix} f_{x01} \\ f_{y01} \\ \tau_1 \end{bmatrix} \quad , \quad f_{12} = \begin{bmatrix} \tau_2 \\ f_{y12} \\ f_{z12} \end{bmatrix}$$

Equ.1 $\quad \overrightarrow{f_{01}} - \overrightarrow{f_{12}} + m_1\vec{g} - m_1\dot{v}_{c1} = 0$

$$\begin{bmatrix} f_{x01} \\ f_{y01} \\ f_{z01} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_{x12} \\ f_{y12} \\ f_{z12} \end{bmatrix} + m_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g_0 \end{bmatrix} - m_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{d}_1 \end{bmatrix} = 0$$

$$f_{y01} = f_{y12} \qquad \text{et} \qquad f_{x01} = f_{x12}$$

$$\tau_1 - f_{z12} - m_1 g_0 - m_1 \ddot{d}_1 = 0$$

Corps 2 (Segment 2):

$$\mathrm{v}_{c2} = \begin{bmatrix} \dot{\mathrm{d}}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \dot{\mathrm{v}}_{c2} = \begin{bmatrix} \ddot{d}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Equ. Segment 2 $\quad \overrightarrow{\mathrm{f}_{12}} - \overrightarrow{\mathrm{f}_{23}} + \mathrm{m}_2\vec{g} - \mathrm{m}_2\dot{\mathrm{v}}_{c2} = 0$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{f}_{x1} \\ \mathrm{f}_{y12} \\ \mathrm{f}_{z12} \end{bmatrix} - \boxed{\begin{bmatrix} \mathrm{f}_{x23} \\ \mathrm{f}_{y23} \\ \mathrm{f}_{z23} \end{bmatrix}} + \mathrm{m}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g0 \end{bmatrix} - \mathrm{m}_2 \begin{bmatrix} \ddot{d}_2 \\ 0 \\ \ddot{d}_1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{f}_{12}} + \mathrm{m}_2\vec{g} - \mathrm{m}_2\dot{v}_{c2} = 0$$

Force nulle car pas de corps 3

$$f_{x12} = m_2\ddot{d}_2 = \tau_2 \qquad (1)$$

$$\mathrm{f}_{y12} = 0\,,\ \mathrm{f}_{z12} = \mathrm{m}_2\mathrm{g}_0 + \mathrm{m}_2\ddot{d}_1$$

$$\tau_1 = m_2 g_0 + m_2\ddot{d}_1 + m_1 g_0 + m_1\ddot{d}_1 \qquad (2)$$