Solutions série 4

Solution 3. 1. En fait, on peut reecrire

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 2x + 3y = 0\}$$

comme

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | < (2,3), (x,y) >= 0\}$$

Ainsi, on voyant cette droite de la seconde maniere, il est evident que $(2,3)$ est perpendiculaire a la droite.

2. Posons $v = (2,3)$ et $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definie par

$$\phi(w) = w - 2\frac{< w, v >}{< v, v >}v$$

On a vu dans une serie precedente que l'application ϕ est une application lineaire. Ainsi, pour montrer que notre symetrie σ_0 (qui est bien evidement lineaire) est egale a ϕ, il faut juste le verifier sur les vecteurs d'une base de $\mathbb{R}^2$. Prenons comme base de $\mathbb{R}^2$ la base $\mathcal{B} = \{(2,3), (-3,2)\}$ On a alors que

$$\phi(2,3) = (2,3) - 2\frac{< (2,3), (2,3) >}{< (2,3), (2,3) >}(2,3) = (2,3) - 2(2,3) = -(2,3)$$

et, comme $< (-3,2), (2,3) >= 0$,

$$\phi(-3,2) = (-3,2)$$

Voyons maintenant comment se comporte σ_0 : Comme $(2,3)$ est perpendiculaire a la droite et (-3, 2) appartient a la droite, on a par definition

$$\sigma_0(2,3) = -(2,3) \text{ et } \sigma_0(-3,2) = (-3,2)$$

Ainsi, $\sigma_0 = \phi$

3. Pour trouver la matrice M_{σ_0} de σ_0 dans la base canonique, on calcule l'image des vecteurs de la base canonique par σ_0. On a :

$$\sigma_0(1,0) = (1,0) - 2\frac{< (1,0), (2,3) >}{< (2,3), (2,3) >}(2,3) = (1,0) - 2(2/13)(2,3) = (5/13, -12/13)$$

De la meme maniere, on a

$$\sigma_0(0,1) = (0,1) - 2\frac{<(0,1),(2,3)>}{<(2,3),(2,3)>}(2,3) = (0,1) - 2(3/13)(2,3) = (-12/13, -5/13)$$

Ainsi, on obtient que

$$M_{\sigma_0} = \begin{pmatrix} 5/13 & -12/13 \\ -12/13 & -5/13 \end{pmatrix}$$

De plus, on a que

$$M_{\sigma_0}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Montrons tout d'abord que la translation est une isometrie. Soit $v, w \in Rr^2$, on a alors :

$$d(t_{(2,3)}(v), t_{(2,3)}(w)) = ||t_{(2,3)}(v) - t_{(2,3)}(w)|| = ||(v+(2,3)) - (w+(2,3))|| = ||v-w|| = d(v,w)$$

Ainsi, $t_{(2,3)}$ est bien une isometrie et donc σ en est aussi une car composee d'isometries (on a montre que σ_0 etait une isometrie dans une serie precedente). De plus, sa partie lineaire est, par definition, σ_0

5. On a que

$$(X,Y) = \sigma(x,y) = t_{(2,3)}(\sigma_0(x,y))$$

et donc

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5/13 & -12/13 \\ -12/13 & -5/13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 5x/13 - 12y/13 \\ 3 - 12x/13 - 5y/13 \end{pmatrix}$$

6. Il faut resoudre le systeme suivant :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 5x/13 - 12y/13 \\ 3 - 12x/13 - 5y/13 \end{pmatrix}$$

Ce qui est equivalent a

$$\begin{pmatrix} 8x/13 + 12y/13 \\ 12x/13 + 18y/13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Seulement, on voit que la deuxieme equation est juste 3/2 fois la premiere, elles sont donc equivalentes. On a donc finalement que

$$2x + 3y = 13/2$$

ce qui est l'ensemble des points fixes (toutes les operations faites etaient des equivalences et donc on a bien egalite d'ensemble et pas seulement une inclusion) et σ est donc juste la symetrie orthogonale de droite $2x + 3y = 13/2$.

Solution 4. 1. Trouvons les images $\varphi^*(e_1)$ et $\varphi^*(e_2)$. Posons $\varphi(e_1) = (a,b), \varphi(e_2) = (c,d), \varphi^*(e_1) = (a',b')$ et $\varphi^*(e_2) = (c',d')$. On veut alors que :

$$a =< \varphi(e_1), e_1 >=< e_1, \varphi^*(e_1) >= a'$$

et donc $a' = a$. De meme,

$$b =< \varphi(e_1), e_2 >=< e_1, \varphi^*(e_2) >= c'$$

Ainsi $c' = b$. De meme on montre que $b' = c$ et $d' = d$. On a donc finalement trouve les images $\varphi^*(e_1)$ et $\varphi^*(e_2)$.
Montrons que l'unique application lineaire φ^* telle que $\varphi^*(e_1) = (a,c)$ et $\varphi^*(e_2) = (b,d)$ est bien une adjointe a φ (notons avant que l'on a que $< \varphi(e_i), e_j >=< e_i, \varphi^*(e_j) >$ pour tout $i,j = 1,2$) :
Soit $u, v \in \mathbb{R}^2$. On pose $u = u_1e_1 + u_2e_2$ et $v = v_1e_1 + v_2e_2$. On a alors :

$$< \varphi(u), v >=< u_1\varphi(e_1) + u_2\varphi(e_2), v_1e_1 + v_2e_2 >$$

Ce qui vaut, par bilinearite,

$$u_1v_1 < \varphi(e_1), e_1 > + u_1v_2 < \varphi(e_1), e_2 > + u_2v_1 < \varphi(e_2), e_1 > + u_2v_2 < \varphi(e_2), e_2 >$$

Or, par construction de φ^*, on a que

$$< \varphi(e_i), e_j >=< e_i, \varphi^*(e_j) >$$

pour tout $i,j = 1,2$
Ainsi, en utilisant cette identite et en reutilisant la bilinearite de $<,>$ et la linearite de φ^*, on obtient le resultat desire. De plus, on a aussi, par cette construction, montre l'unicite.

2. On a dans ce cas que, pour $u \in \mathbb{R}^2$ et $i = 1,2$,

$$< \varphi^*(\varphi(u)), e_i >=< \varphi(u), \varphi(e_i) >=< u, e_i >$$

ou la premiere egalite vient de la definition de φ^* et la deuxieme du fait que φ est une isometrie. Ainsi, ceci etant vrai pour tout $i = 1,2$, on a que

$$\varphi^*(\varphi(u)) = u$$

et donc (car trouver un inverse a gauche pour une application lineaire revient a trouver un inverse, vous verrez ca en algebre lineaire si vous ne l'avez pas encore vu)

$$\varphi^* = \varphi^{-1}$$

3. On a que, pour $u, v \in \mathbb{R}^2$,
$< (\varphi + \psi)(u), v >=< \varphi(u) + \psi(u), v >=< \varphi(u), v > + < \psi(u), v >=$
$< u, \varphi^*(v) > + < u, \psi^*(v) >=< u, \varphi^*(v) + \psi^*(v) >=< u, (\varphi^* + \psi^*)(v) >$ et donc, par unicite de l'adjointe,

$$(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$$

Les autres cas se montrent de maniere similaire (on va juste montrer le dernier cas qui se montre plus simplement)
On a que par une des formules,

$$id = id^* = (\varphi^{-1} \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ (\varphi^{-1})^*$$

et donc

$$(\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*$$

(car trouver un inverse a gauche pour une application lineaire revient a trouver un inverse)

4. En fait on a prouve ce fait dans la preuve de la question 1

5. Il y a deux manieres de prouver ces faits : une est de le prouver directement (et vous l'avez fait/le ferez en algebre lineaire de maniere plus generale, au pire ce n'est vraiment pas complique a verifier dans le cas des matrices 2x2). L'autre maniere est d'utiliser l'adjoint :
Nous allons faire l'exemple de l'addition, les autres se font de maniere similaire. Soit φ, ψ les applications lineaires correspondantes respectivement a M, N. Dans ce cas, $(\varphi + \psi)^*$ correspond a ${}^t(M + N)$ Or, on a vu que

$$(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$$

Etant donne que la matrice correspondant a $\varphi^* + \phi^*$ est ${}^tM + {}^tN$, on obtient que ${}^t(M + N) = {}^tM + {}^tN$ (toute cette manipulation entre matrices et applications lineaires se justifie car cette correspondance est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-algebres, comme vous le verrez/avez deja vu en algebre lineaire).

6. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice reelle. On a alors que

$$det(M) = ad - bc$$

et que

$$det({}^tM) = det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - cb = ad - bc$$

Ainsi le resultat est demontre.