Série 9

(les exercices à rendre sont marqués avec *)

Exercice 1

Montrer que les équations suivantes admettent des solutions

a) $e^{x-1} = x + 1$

b) $x^2 - \dfrac{1}{x} = 1$

Hint : Utiliser le théorème de la valeur intermédiaire.

Solution. Les solutions particulières (i.e., les valeurs pour lesquelles on évalue f) données ci-dessous ne sont évidemment pas uniques, mais la méthodologie doit être suivie.

a) On veut utiliser le théorème de la valeur intermédiaire, on doit définir une fonction continue à partir de l'équation donnée. En l'occurrence, soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x-1} - x - 1$. Alors f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que composition de fonctions élémentaires et comme $e = 2.7182\ldots$, on a $f(2) = e - 3 < 0$ et $f(3) = e^2 - 4 > 0$. Par le théorème de la valeur intermédiaire, il existe alors $x_0 \in [2, 3]$ tel que $f(x_0) = 0$.

D'ailleurs, l'équation donnée admet une deuxième solution (mais il suffit de montrer l'existence d'une). En effet, on a $f(0) = \frac{1}{e} - 1 < 0$ et $f(-1) = \frac{1}{e^2} > 0$ et donc par le théorème de la valeur intermédiaire il existe $x_0 \in [-1, 0]$ tel que $f(x_0) = 0$.

b) Comme l'équation donnée n'est pas définie en $x = 0$, il faut définir la fonction f soit sur $]-\infty, 0[$ soit sur $]0, \infty[$ pour appliquer le théorème de la valeur intermédiaire sur un intervalle.

Si $x < 0$, on a $x^2 - \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{|x|} > 1$ car un des deux termes est toujours ≥ 1 et donc l'équation n'admet pas de solution. Ainsi on définit $f\colon]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - \frac{1}{x} - 1$. Cette fonction est continue (composition de fonctions élémentaires) et on a $f(1) = -1 < 0$ et $f(2) > 0$. Par le théorème de la valeur intermédiaire, il existe alors $x_0 \in [1, 2]$ tel que $f(x_0) = 0$.

Exercice 2 (Vrai ou Faux)

Soient I un intervalle, $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $f(I)$ l'image de I par f.

a) $f(I)$ est un intervalle.

b) Si I est borné et fermé, alors $f(I)$ est borné et fermé.

c) Si I est borné, alors $f(I)$ est borné.

d) Si I est ouvert, alors $f(I)$ est ouvert.

e) Si $I = [a, b[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, alors f atteint soit son minimum soit son maximum sur I.

f) Si $I = [a, \infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$, alors f atteint soit son minimum soit son maximum sur I.

g) Si f est strictement croissante et I est ouvert, alors $f(I)$ est ouvert.

Solution. On a que

a) VRAI. Soient $y_1, y_2 \in f(I)$ tels que $y_1 < y_2$ et soient $x_1, x_2 \in I$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Par le théorème de la valeur intermédiaire appliqué à l'intervalle $[\min(x_1, x_2), \max(x_1, x_2)]$, on a $]y_1, y_2[\subset f(I)$. Ceci étant vrai pour $y_1, y_2 \in f(I)$ quelconques, on déduit que $f(I)$ est un intervalle.

b) VRAI. On sais que une fonction continue sur un intervalle borné et fermé atteint ses bornes et en plus, comme vu en (a), $f(I)$ est un intervalle. Donc $f(I) = [\min(f), \max(f)]$ est fermé et borné.

c) FAUX. Prendre par exemple la fonction $f\colon]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$. Alors I est borné mais $f(I) =]1, \infty[$ n'est pas bornée.

d) FAUX. Prendre par exemple la fonction $f\colon]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ (fonction constante). Alors I est ouvert mais $f(I) = \{1\}$ est fermé.

e) FAUX. Prendre par exemple la fonction $f\colon [-1,0[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}\sin\big(\frac{1}{x}\big)$. Alors f n'est ni minorée ni majorée sur I car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $-\big(2\pi n \pm \frac{\pi}{2}\big)^{-1} \in I$ mais

$$\begin{aligned} f\Big(-\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}\Big) &= -\Big(2\pi n + \frac{\pi}{2}\Big)\sin\Big(-\Big(2\pi n + \frac{\pi}{2}\Big)\Big) = \Big(2\pi n + \frac{\pi}{2}\Big)\sin\Big(2\pi n + \frac{\pi}{2}\Big) \\ &= \Big(2\pi n + \frac{\pi}{2}\Big)\sin\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = 2\pi n + \frac{\pi}{2} > n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f\Big(-\frac{1}{2\pi n - \frac{\pi}{2}}\Big) &= -\Big(2\pi n - \frac{\pi}{2}\Big)\sin\Big(-\Big(2\pi n - \frac{\pi}{2}\Big)\Big) = \Big(2\pi n - \frac{\pi}{2}\Big)\sin\Big(2\pi n - \frac{\pi}{2}\Big) \\ &= \Big(2\pi n - \frac{\pi}{2}\Big)\sin\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = -2\pi n + \frac{\pi}{2} < -n. \end{aligned}$$

f) FAUX. Prendre par exemple la fonction définie par $f(x) = (x-a)\sin(x-a)$. Elle n'est ni minorée ni majorée sur I car pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f\big(a + \frac{\pi}{2} + 2\pi n\big) = \frac{\pi}{2} + 2\pi n > n$ et $f\big(a - \frac{\pi}{2} + 2\pi n\big) = \frac{\pi}{2} - 2\pi n < -n$.

g) VRAI. Soient $y \in f(I)$ et $x \in I$ tel que $f(x) = y$. Comme I est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $]x-r, x+r[\subset I$. Puisque f est strictement croissante, on a $f\big(x - \frac{r}{2}\big) < y < f\big(x + \frac{r}{2}\big)$. Par le théorème de la valeur intermédiaire appliquée à l'intervalle $\big[x - \frac{r}{2}, x + \frac{r}{2}\big]$, on a $\big]f\big(x-\frac{r}{2}\big), f\big(x+\frac{r}{2}\big)\big[\subset f(I)$. Comme en plus $y \in \big]f\big(x-\frac{r}{2}\big), f\big(x+\frac{r}{2}\big)\big[$, il suit que $f(I)$ est ouvert en prenant $r_y = \min\Big(f\big(x+\frac{r}{2}\big) - y, y - f\big(x-\frac{r}{2}\big)\Big) > 0$ dans la définition d'ouvert.

Exercice 3

Dans chaque cas, déterminer si f est dérivable en x_0 (sans utiliser de propriétés, seulement à partir de la définition). Cas échéant, donner $f'(x_0)$.

a*) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^3}$, $x_0 = -1$

b*) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, $x_0 = 1$

c*) $f(x) = |x|\sin(x)$, $x_0 = 0$

d) $f(x) = \sqrt{x + |x-1|}$, $x_0 = 1$

e) $f(x) = |\cos(x)|$, $x_0 = 0$

Solution.
Dans chaque cas, il s'agit de vérifier si la limite suivante existe :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

a)
$$\lim_{x\to-1}\frac{\frac{1}{1-x^3}-\frac{1}{2}}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{1+x^3}{2(x+1)(1-x^3)}\,.$$

Cette dernière est de la forme $\frac{0}{0}$. On peut donc faire la division polynomiale de x^3+1 par $x+1$, qui permet d'écrire $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$, et donc

$$\lim_{x\to-1}\frac{1+x^3}{2(x+1)(1-x^3)}=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-x+1}{2(1-x^3)}=\frac{3}{4}\,.$$

Donc f est dérivable en $x_0=-1$, et sa dérivée vaut $f'(-1)=\frac{3}{4}$.

b) f est dérivable en $x_0=1$, puisque

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2})}=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

c) On a
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{|x|\sin(x)}{x}\,.$$

Comme $-1\leq\frac{|x|}{x}\leq+1$, et comme $\lim_{x\to0}\sin(x)=0$, le Théorème des deux gendarmes implique que
$$\lim_{x\to0}\frac{|x|}{x}\sin(x)=0\,,$$
et donc que f est dérivable en $x_0=0$, et sa dérivée vaut $f'(0)=0$.

d) Rappelons que $|x-1|=+(x-1)$ si $x\geq1$, et $|x-1|=-(x-1)$ si $x<1$. On peut donc écrire
$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x-1} & \text{si } x\geq1,\\ 1 & \text{si } x<1\,.\end{cases}$$

(Ceci implique en particulier que $D_f=\mathbb{R}$.) On a évidemment que

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=0\,,$$

alors que
$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}=1\,.$$

On en conclut que f n'est pas dérivable en $x_0=1$.

e) Comme dans un voisinage de 0 on a que $|\cos(x)|=\cos(x)$ il suffit de calculer la dérivé de cosinus en point zero. On rappelle que

$$\sin(\alpha)^2+\cos(\beta)^2=1\qquad\text{pour tous }\alpha,\beta\in\mathbb{R}\,.$$

Donc on a que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x_0+h)-\cos(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\cos(h)-1)(cos(h)+1)}{h(cos(h)+1)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)^2-1}{h(cos(h)+1)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)^2}{h(cos(h)+1)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{(cos(h)+1)}
\end{aligned}$$

Comme la première limite vaut 1 et la deuxième 0 on a bien que $f'(0) = 0$.

Exercice 4

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Montrer, à partir de la définition de la dérivée, que

a) f paire $\Rightarrow$ f' impaire

b) f impaire $\Rightarrow$ f' paire

c) f périodique $\Rightarrow$ f' périodique

Solution. On a que

a) Supposons f paire. Alors $f(-x) = f(x)$ et $f(-x+h) = f(x-h)$ pour tout $x, h \in \mathbb{R}$. Calculons alors

$$\begin{aligned}
f'(-x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h)-f(-x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{h} \\
&= -\lim_{h\to 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h} \\
&= -\lim_{t\to 0} \frac{f(x+t)-f(x)}{t} = -f'(x)\,.
\end{aligned}$$

Dans l'avant-dernière ligne, on a posé $t := -h$. Comme $h \to 0$, on a aussi $t \to 0$. Ceci montre que f' est impaire.

b) On montre de même que si f est impaire alors sa dérivée est paire.

c) Si f est périodique, alors il existe $T > 0$ tel que $f(x+T) = f(x)$ pour tout x, ce qui implique que

$$\begin{aligned}
f'(x+T) &= \lim_{h\to 0} \frac{f((x+T)+h)-f(x+T)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f((x+h)+T)-f(x+T)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)\,,
\end{aligned}$$

et donc f' est aussi périodique.

Remarque : En supposant connues les règles de dérivation, l'exercice se résout de manière plus directe. En fait on a que

a) On a $f(-x) = f(x)$. En dérivant les deux membres de cette égalité, on obtient $-f'(-x) = f'(x)$, c'est-à-dire f' est impaire.

b) On dérive $f(-x) = -f(x)$ pour obtenir $-f'(-x) = -f'(x) \Leftrightarrow f'(-x) = f'(x)$. Ainsi f' est paire.

c) Pour f périodique, il existe $T > 0$ tel que $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En dérivant, on a $f'(x+T) = f'(x)$ et donc f' est aussi périodique.

Exercice 5*

Utiliser les règles de dérivation pour calculer la dérivée de f, puis donner les domaines de f et f'.

a) $f(x) = \dfrac{5x+2}{3x^2-1}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ c) $f(x) = \sin(x)^2 \cdot \cos(x^2)$

Solution. On peut calculer que

a) $f'(x) = \dfrac{5(3x^2-1) - 6x(5x+2)}{(3x^2-1)^2} = -\dfrac{15x^2+12x+5}{(3x^2-1)^2}$; $D(f) = D(f') = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

b) $f'(x) = \dfrac{2x\sqrt{1-x^2} - x^2 \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)}{1-x^2} = \dfrac{x(2-x^2)}{(1-x^2)^{3/2}}$; $D(f) = D(f') =]-1, 1[$

c) $f'(x) = 2\sin(x)\cos(x) \cdot \cos(x^2) + \sin(x)^2 \cdot \big(-\sin(x^2)\big) \cdot 2x$

$= 2\sin(x)\big(\cos(x)\cos(x^2) - x\sin(x)\sin(x^2)\big)$; $D(f) = D(f') = \mathbb{R}$.