Exercise 3.
Soient $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ trois points non-alignés. On montre que la somme des angles $\widehat{CAB}, \widehat{ABC}, \widehat{BCA}$ vaut $-\mathrm{Id}$.
Rappelons d'abord que la somme de deux angles r, r' est définie comme la composition $r \circ r'$, qui est aussi un angle puisque la composition de deux isométries spéciales est encore spéciale.
Rappelons aussi qu'un angle est uniquement déterminé par son action sur une demi-droite ; en d'autres termes, étant donnés deux vecteurs non nuls $u, v \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique isométrie spéciale r telle que

$$r(\mathbb{R}_+ u) = \mathbb{R}_+ v.$$

Ceci étant précisé, notons que par définition :

1. $\widehat{CAB}(\mathbb{R}_+\overrightarrow{AC}) = \mathbb{R}_+\overrightarrow{AB}$,
2. $\widehat{ABC}(\mathbb{R}_+\overrightarrow{BA}) = \mathbb{R}_+\overrightarrow{BC}$,
3. $\widehat{BCA}(\mathbb{R}_+\overrightarrow{CB}) = \mathbb{R}_+\overrightarrow{CA}$.

Puisque $-(\mathbb{R}_+ u) = \mathbb{R}_+(-u)$, on observe que la composition

$$\varphi := \widehat{BCA} \circ \widehat{ABC} \circ \widehat{CAB}$$

vérifie

$$\varphi(\mathbb{R}_+\overrightarrow{AC}) = -(\mathbb{R}_+\overrightarrow{AC}).$$

Or on a aussi

$$-\mathrm{Id}(\mathbb{R}_+\overrightarrow{AC}) = -(\mathbb{R}_+\overrightarrow{AC}),$$

et $-\mathrm{Id}, \varphi$ sont toutes deux des isométries spéciales. Par notre remarque initiale, on obtient que $\varphi = -\mathrm{Id}$.
Notez que l'on retrouve le résultat bien connu selon lequel la somme des angles internes d'un triangle est égale à π.

Exercise 5.
On montre que les isométries affines préservent les angles, au sens précisé dans la donnée de l'exercice.
Commençons par le cas où $\phi = t$ est une translation. Puisque

$$\overrightarrow{t(P)t(Q)} = \overrightarrow{PQ},$$

il est évident que t préserve les angles au sens souhaité.
Supposons maintenant que φ est une isométrie linéaire. Par souci de clarté,

nous reformulons la propriété recherchée : étant donnés deux vecteurs non-nuls $u, v \in \mathbb{R}^2$, notons r l'unique isométrie spéciale vérifiant $r(\mathbb{R}_+ u) = \mathbb{R}_+ v$; il s'agit de vérifier que

$$r^{\pm 1}(\mathbb{R}_+ \phi(u)) = \mathbb{R}_+ \phi(v)$$

où l'on prendra r^{+1} si ϕ est rotation, et r^{-1} si ϕ est une symétrie. Nous distinguons donc deux cas :

1. ϕ est une rotation. Alors, en vertu de l'exercice 4, on a $\phi^{-1} \circ r \circ \phi = r$. On écrit donc :

$$(\phi^{-1} \circ r \circ \phi)(\mathbb{R}_+ u) = r(\mathbb{R}_+ u) = \mathbb{R}_+ r(u) = \mathbb{R}_+ v$$

d'où $(r \circ \phi)(\mathbb{R}_+ u) = \phi(\mathbb{R}_+ v)$ comme souhaité (observez en effet que $\phi(\mathbb{R}_+ u) = \mathbb{R}_+ \phi(u)$).

2. ϕ est une symétrie. Alors, en vertue de l'exercice 4, on a $\phi^{-1} \circ r^{-1} \circ \phi = r$. Ainsi :

$$(\phi^{-1} \circ r^{-1} \circ \phi)(\mathbb{R}_+ u) = r(\mathbb{R}_+ u) = \mathbb{R}_+ v$$

d'où $(r^{-1} \circ \phi)(\mathbb{R}_+ u) = \phi(\mathbb{R}_+ v)$ comme souhaité.

Finalement, soit ϕ une isométrie quelconque de $\mathbb{R}^2$. On peut écrire $\phi = t \circ \phi_0$, où t est une translation et ϕ_0 une isométrie linéaire. Puisque t et ϕ_0 préservent les angles, il en est de même pour ϕ ; on laisse au lecteur le soin de détailler cette dernière étape.

Exercise 6.

Soient $r = r_{\alpha,\mu}$ et $s = s_{\beta,\nu}$ deux isométries affines, respectivement une rotation et une symétrie, associées aux paramètres complexes $\alpha, \beta, \mu, \nu \in \mathbb{C}$.

1. Ecrivons $r^{-1}(z) = \alpha' + \mu' z$, où α', μ' sont à déterminer [*]. Par définition, on doit avoir $r^{-1} \circ r = \mathrm{Id}$, ce qui se traduit par :

$$\alpha' + \mu'(\alpha + \mu z) = z, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

et donc

$$\mu\mu' = 1, \quad \alpha' + \mu'\alpha = 0.$$

Ainsi $\mu' = \mu^{-1}$ et $\alpha' = -\alpha\mu^{-1}$.
De la même manière, si $s^{-1}(z) = \beta' + \nu'\bar{z}$, un raisonnement semblable donne les relations

$$\nu'\bar{\nu} = 1, \quad \beta' + \nu'\bar{\beta} = 0,$$

d'où $\nu' = \bar{\nu}^{-1}$ et $\beta' = -\bar{\beta}\bar{\nu}^{-1}$.

[*]. *A priori*, r^{-1} pourrait être une symétrie, et donc s'écrire $r^{-1}(z) = \alpha' + \mu'\bar{z}$. L'identité $r^{-1} \circ r = \mathrm{Id}$ fournirait

$$\alpha' + \mu'\bar{\alpha} + \bar{\mu}\bar{z} = z, \quad \forall\, z \in \mathbb{C},$$

et il est facile de voir qu'une telle égalité ne peut être vérifiée sur l'ensemble du plan complexe. – Une remarque analogue s'applique à la détermination de s^{-1} plus bas.

2. Un calcul direct donne
$$(r \circ s \circ r^{-1})(z) = \underbrace{\alpha + \mu\beta - \nu\bar{\alpha}\frac{\mu}{\bar{\mu}}}_{(r \circ s \circ r^{-1})(\mathbf{0})} + \nu\frac{\mu}{\bar{\mu}}\bar{z}$$
On a $\frac{\mu}{\bar{\mu}} = \frac{\mu^2}{|\mu|^2} = \mu^2$, puisque $|\mu| = 1$. On voit donc que $r \circ s \circ r^{-1}$ est une symétrie glissée, dont la partie linéaire est égale à $r_0^2 \circ s_0$ (où r_0, s_0 sont les parties linéaires respectives de r, s).

Exercise 7.
Considérons une rotation donnée par $r(z) = \alpha + \mu z$. On cherche une autre rotation $r'(z) = \alpha' + \mu' z$ qui vérifie
$$r' \circ r' = r. \tag{1}$$
En utilisant les paramètres complexes, cette égalité devient
$$\alpha'(1 + \mu') + \mu'^2 z = \alpha + \mu z, \quad \forall\, z \in \mathbb{C},$$
c'est-à-dire
$$\alpha'(1 + \mu') = \alpha, \quad \mu' 2 = \mu.$$
Puisque μ, μ' sont de module unité, on peut écrire en utilisant la forme polaire :
$$\mu = e^{i\varphi}, \quad \mu' = e^{i\varphi'}.$$
Ainsi $\mu'^2 = \mu$ devient
$$e^{i2\varphi'} = e^{i\varphi}$$
ce qui est équivalent à
$$\varphi' = \frac{\varphi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$
Comme la fonction $t \mapsto e^{it}$ est périodique de période 2π, il n'y a que deux solutions différentes pour μ', correspondant à $k \in \{0, 1\}$, à savoir
$$\mu' \in \{e^{i\frac{\varphi}{2}}, e^{i(\frac{\varphi}{2}+\pi)}\}.$$
Puisque $\alpha' = \frac{\alpha}{1+\mu'}$, on trouve que les fonctions
$$z \mapsto \frac{\alpha}{1 + e^{i\frac{\varphi}{2}}} + e^{i\frac{\varphi}{2}} z, \quad z \mapsto \frac{\alpha}{1 + e^{i(\frac{\varphi}{2}+\pi)}} + e^{i(\frac{\varphi}{2}+\pi)} z$$
sont les deux seules solutions de (1).

Exercise 8.
Nous donnons la correction du premier point. Soient s, s' deux symétries affines ; on cherche à caractériser la partie linéaire de la composition $s' \circ s$. En écrivant s, s' sous forme de transformations complexes, on s'aperçoit que la composition $s' \circ s$ est une rotation affine, de partie linéaire $s'_0 \circ s_0$, où s'_0 et s_0 sont les parties linéaires respectives de s' et s. Nous pouvons donc assumer sans perte de généralité que s' et s sont linéaires.
Soient u, u' des vecteurs directeurs des axes respectifs de s' et de s. Remarquez qu'on a les égalités

$$s(\mathbb{R}_+ u) = \mathbb{R}_+ u, \quad s'(\mathbb{R}_+ u') = \mathbb{R}_+ u'.$$

Notons r l'unique isométrie spéciale vérifiant

$$r(\mathbb{R}_+ u) = \mathbb{R}_+ u'.$$

La rotation double $r \circ r$ est caractérisée ainsi par la condition

$$(r \circ r)(\mathbb{R}_+ r^{-1}(u)) = \mathbb{R}_+ u'.$$

Prouver que $s' \circ s = r \circ r$ revient à montrer que

$$(s_2 \circ s_1)(\mathbb{R}_+ r^{-1}(u)) = \mathbb{R}_+ u'.$$

On sait par l'exercice 4 que $s \circ r^{-1} \circ s^{-1} = r$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
(s' \circ s)(\mathbb{R}_+ r^{-1}(u)) &= (s' \circ s \circ r^{-1})(\mathbb{R}_+ u) \\
&= (s' \circ s \circ r^{-1} \circ s^{-1} \circ s)(\mathbb{R}_+ u) \\
&= (s' \circ r)(s(\mathbb{R}_+ u)) \\
&= (s' \circ r)(\mathbb{R}_+ u) \\
&= s'(\mathbb{R}_+ u') = \mathbb{R}_+ u',
\end{aligned}$$

ce qui conclut.

Une méthode alternative est la suivante. Si e_1 désigne le premier élément de la base canonique, notons

$$\widehat{e_1 u} = \mathrm{rot}(\alpha), \quad \widehat{e_1 u'} = \mathrm{rot}(\beta)$$

et on vérifie que par rapport à la base canonique :

$$M_s = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix} \quad M_{s'} = \begin{pmatrix} \cos(2\beta) & \sin(2\beta) \\ \sin(2\beta) & -\cos(2\beta) \end{pmatrix}.$$

En s'aidant des identités trigonométriques, on trouve

$$M_{s' \circ s} = M_{s'} \cdot M_s = \begin{pmatrix} \cos(2(\beta-\alpha)) & -\sin(2(\beta-\alpha)) \\ \sin(2(\beta-\alpha)) & \cos(2(\beta-\alpha)) \end{pmatrix} = M_{\mathrm{rot}(2(\beta-\alpha))}.$$

Exercise 9.
Soient s_1, s_2 les symétries axiales données respectivement par les droites

$$3x + 4y = 2, \quad -2x + 5y = 3.$$

Commençons par trouver les paramètres complexes de s_1 et s_2. Ecrivons

$$s_1(z) = a + b\bar{z}$$

et remarquons que $s_1(z) = z$ pour tout z appartenant à la droite $3x+4y = 2$. Puisque $-2 + 2i$ et $0.5i$ appartiennent à cette droite, on obtient le système

$$-2 + 2i = a - b(2 + 2i), \quad i = 2a - bi$$

qui admet comme solutions (on vérifiera que $|b| = 1$) :

$$a = \frac{-4}{-3 + 4i}, \quad b = \frac{3 + 4i}{-3 + 4i}.$$

De manière similaire, notons $s_2(z) = c+d\bar{z}$ et remarquons que $1+i$ et $-4-i$ appartiennent à la seconde droite. On obtient le système

$$1 + i = c + d(1 - i), \quad -4 - i = c + d(-4 + i)$$

qui admet comme solutions (on vérifiera que $|d| = 1$) :

$$c = \frac{6i}{5 - 2i}, \quad d = \frac{5 + 2i}{5 - 2i}.$$

Un calcul direct donne alors :

$$s_1 \circ s_2(z) = \frac{-4}{-3 + 4i} + \frac{-24 + 18i}{-7 + 26i} + \frac{7 + 26i}{-7 + 26i} z.$$

Pour trouver le point fixe, on peut résoudre l'équation $s_1 \circ s_2(z_0) = z_0$. Les calculs étant fastidieux, nous proposons une autre méthode. La composition $s_1 \circ s_2$ étant une rotation affine, elle admet un unique point fixe. Le point d'intersection des droites définissant s_1 et s_2 étant fixe pour ces deux applications, on déduit qu'il est l'unique point fixe de $s_1 \circ s_2$. Un calcul rapide donne que ce point d'intersection est $\frac{-2}{23} + \frac{13}{23}i$.

La méthode est la même pour le second point, et nous laissons les calculs au lecteur.