Géométrie I

Corrigé 5

Automne 2018

Exercice 2
1. Soit d la droite d'équation $3x + 4y = 0$. Comme $(0,0) \in d$, alors le vecteur $\overrightarrow{u} := (-4,3) \in d$ correspond à un vecteur directeur de d et ainsi $d = \mathbb{R}\overrightarrow{u}$. Ainsi, faire une symétrie orthogonale d'axe d revient à faire une symétrie orthogonale d'axe $\mathbb{R}\overrightarrow{u}$.
Notons aussi que, pour $\overrightarrow{v} := (3,4)$, on a que

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 3(-4) + 3 \cdot 4 = 0,$$

et ainsi $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u}$ sont perpendiculaires.
On applique alors le résultat de l'exercice 1.1 : on sait que, si $\overrightarrow{v} = (C,S)$, et si l'on pose

$$c = 1 - 2\frac{C^2}{C^2+S^2}, \quad s = -2\frac{CS}{C^2+S^2},$$

alors on peut écrire la matrice de la symétrie σ, notée M_σ comme

$$M_\sigma = \begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix}.$$

Dans notre cas, on trouve que

$$c = 1 - 2\frac{3^2}{3^2+4^2} = \frac{7}{25} \quad \text{et} \quad s = -\frac{24}{25},$$

d'où

$$M_\sigma = \begin{pmatrix} \frac{7}{25} & -\frac{24}{25} \\ -\frac{24}{25} & -\frac{7}{25} \end{pmatrix}.$$

(Conseil : on peut vérifier notre réponse en remarquant qu'on a bien que $M\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$ et $M\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v}$, ce qui est ce à quoi l'on s'attend en faisant une symétrie d'axe $\mathbb{R}\overrightarrow{u}$.)

2. Posons

$$M_\phi := \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

On remarque que, posant $c = s = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, on a que $c^2 + s^2 = 1$ et M_ϕ est de la forme

$$\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}.$$

Ceci implique que M_ϕ est une matrice *spéciale* et ainsi ϕ est une rotation d'axe O dont l'angle de rotation, noté α, satisfait

$$\cos(\alpha) = \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

et ainsi $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$. Pour montrer que ϕ est d'ordre 8, il faut montrer que $M_\phi^8 = Id$ et que, pour $n = 1, ...7$, on a $M_\phi^n \neq Id$.
(Remarque : il suffit de montrer que $M_\phi, M_\phi^2, M_\phi^4 \neq Id$ car $1, 2, 4$ sont les seuls diviseurs de 8 (c.f. algèbre linéaire).)
Ici, on trouve successivement que

$$\begin{aligned} M_\phi^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ M_\phi^4 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ M_\phi^8 &= Id. \end{aligned}$$

On a donc bien le résultat voulu.
(Conseil : on peut vérifier le résultat : comme ϕ est une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{4}$, on a bien qu'il faut composer exactement 8 fois ϕ avec lui-même pour obtenir l'identité.)

3. On s'intéresse à la matrice

$$M := M_\phi M_\sigma = \frac{\sqrt{2}}{50} \begin{pmatrix} 31 & -17 \\ -17 & -31 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit d'une matrice *non-spéciale*, et ainsi $\phi \circ \sigma$ est une symétrie linéaire. Quant aux points fixes, on sait donc qu'il s'agit d'une droite. Pour la trouver, on propose deux méthodes : pour la première, on utilise l'exercice 1.2 qui nous donne un vecteur fixe $\overrightarrow{u}$. Comme $\phi \circ \sigma$ est une symétrie linéaire, il suit que l'ensemble des points fixes est la droite $\mathbb{R}\overrightarrow{u}$. On propose ci-dessous une stratégie faisant appel à davantage d'algèbre linéaire : on cherche l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$M\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} = Id \cdot \overrightarrow{u}.$$

En d'autres mots, il faut trouver les vecteurs $\overrightarrow{u}$ satisfaisant

$$(M - Id)u = 0.$$

En calculant, et écrivant $\overrightarrow{u} = (x, y)$, on obtient

$$\begin{pmatrix} 31 - 25\sqrt{2} & -17 \\ -17 & -31 - 25\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overrightarrow{0}.$$

On sait qu'on a une infinité de vecteurs satisfaisant cette équation (comme l'ensemble des points fixes est une droite), et ainsi la matrice ci-dessus n'est pas inversible (sinon on aurait $(x, y) = (0, 0)$), donc la deuxième ligne est une combinaison linéaire de la première. Reprenant la première ligne, on trouve alors que l'ensemble des points fixes est la droite d'équation.

$$(31 - 25\sqrt{2})x - 17y = 0.$$

4. On procède exactement de la même manière que ci-dessus.

5. On sait, par 2., que $\phi^8 = id$, et ainsi

$$\phi^{2018} = (\phi^8)^{252} \circ \phi^2 = id^{252} \circ \phi^2 = \phi^2,$$

et, comme ϕ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$, alors ϕ^2 est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. Quant à $\phi \circ \sigma$, on sait qu'il s'agit d'une symétrie linéaire, d'où $(\phi \circ \sigma)^2 = id$, et ainsi $(\phi \circ \sigma)^{2018} = id$.

Exercice 4
1. Soit $x \in X$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in Fix(\psi \circ \phi \circ \psi^{-1}) &\iff (\psi \circ \phi \circ \psi^{-1})(x) = x \\ &\iff (\phi \circ \psi^{-1})(x) = \psi^{-1}(x) \quad \text{(multiplier à gauche par } \psi^{-1}\text{)} \\ &\iff \phi(\psi^{-1}(x)) = \psi^{-1}(x) \\ &\iff \psi^{-1}(x) \in Fix(\phi) \\ &\iff x \in \psi(Fix(\phi)), \quad \text{(multiplier à gauche par } \psi\text{)} \end{aligned}$$

d'où le résultat.

2. Soit $\phi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$. On sait que ϕ est une rotation si et seulement si $Fix(\phi)$

consiste en un unique point. Alors, pour $\psi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ quelconque, on a que $\psi(Fix(\phi))$ consiste en un unique point et ainsi, par 1., $Fix(\psi \circ \phi \circ \psi^{-1})$ consiste en un unique point, d'où le fait que $\psi \circ \phi \circ \psi^{-1}$ est une rotation.
Si ϕ est une symétrie, alors $Fix(\phi)$ est une droite et, comme ci-dessus, on obtient que $Fix(\psi \circ \phi \circ \psi^{-1})$ consiste aussi en une droite, d'où le fait que $\psi \circ \phi \circ \psi^{-1}$ est une symétrie.

Exercice 5
1. Notons que cette question n'utilise pas la forme particulière de la figure F. On montre donc le résultat pour tout sous-ensemble $G \subset \mathbb{R}^2$: premièrement, on note que $id \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_G$ et ainsi $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_G \neq \emptyset$. Ensuite, pour $\phi, \psi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_G$, on a que

$$(\phi \circ \psi)(G) = \phi(\psi(G)) = \phi(G) = G,$$

d'où $\phi \circ \psi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_G$. Finalement, pour $\phi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_G$, on a que $\phi(G) = G$, et donc, multipliant par ϕ^{-1} à gauche, on obtient que $G = \phi^{-1}(G)$. On a donc que $\phi^{-1} \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_G$, et ainsi $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_G$ est bien un sous-groupe.

2. Notons que F est invariante par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$, qu'on notera ϕ. Comme $\cos(\dfrac{\pi}{3}) = \dfrac{1}{2}$, $\sin(\dfrac{\pi}{3}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, la matrice associée à ϕ est

$$M := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Il faut maintenant trouver 5 autres isométries de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_F$. Notons qu'en appliquant ϕ à F autant de fois qu'on veut, on obtient toujours que $\phi^n(F) = F$, et donc

$$\phi, \phi^2, \phi^3, \phi^4, \phi^5, \phi^6 (= id) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_F.$$

Ces 6 isométries étant distinctes, il reste maintenant à trouver leur matrice associée : pour cela, il faut calculer M^n pour $n = 1, ..., 6$. On trouve :

$$\begin{aligned} M^2 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\ M^3 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ M^4 &= -M, \\ M^5 &= -M^2, \\ M^6 &= \mathrm{Id}. \end{aligned}$$

3. On commence par montrer les indications :

(i) Si $P, Q, R \in \mathbb{R}^2$ sont non-alignés et $\phi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ laisse ces trois points invariants (c'est-à-dire que $\phi(P) = P, \phi(Q) = Q, \phi(R) = R$), alors $\phi = id$.

Preuve : On sait qu'une isométrie quelconque est soit l'identité, soit une rotation, soit une symétrie. Aussi, on sait qu'une rotation possède exactement un point fixe, et les points fixes d'une symétrie sont une droite. Maintenant, comme ϕ laisse 3 points invariants, alors ça ne peut pas être une rotation. Si c'était une symétrie, alors P, Q, R devraient se trouver sur l'axe de rotation, et donc seraient alignés, ce qui n'est pas le cas par hypothèse. Ainsi, on a bien que $\phi = id$.

(ii) Soient $P, Q \in \mathbb{R}^2$, $\phi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$. Alors $\phi([P, Q]) = [\phi(P), \phi(Q)]$ (c'est-à-dire que ϕ transforme un segment en un segment). En particulier, les extrêmités du segment initiales sont envoyées sur les extrêmités du segment final.

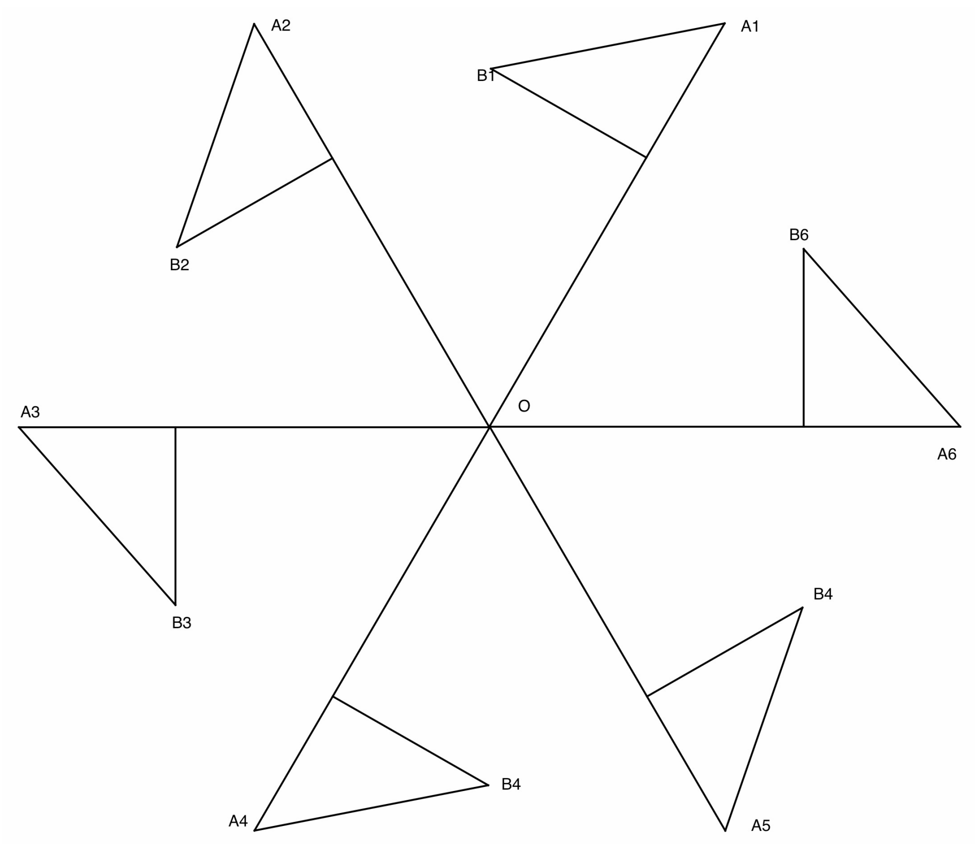
Preuve : On décompose ϕ comme une translation composée avec une isométrie linéaire : $\phi = t_v \circ \phi_0$. On a alors que

$$\begin{aligned}
[\phi(P), \phi(Q)] &= \{\lambda\phi(P) + (1-\lambda)\phi(Q) : \lambda \in [0,1]\} \\
&= \{\lambda(v + \phi_0(P)) + (1-\lambda)(v + \phi_0)(Q) : \lambda \in [0,1]\} \\
&= \{v + \lambda\phi_0(P) + (1-\lambda)\phi_0(Q) : \lambda \in [0,1]\} \\
&= v + \{\lambda\phi_0(P) + (1-\lambda)\phi_0(Q) : \lambda \in [0,1]\} \\
&= v + \phi_0\left(\{\lambda P + (1-\lambda)Q : \lambda \in [0,1]\}\right) \\
&= v + \phi_0\left([P, Q]\right) \\
&= \phi([P, Q]).
\end{aligned}$$

(iii) Avec les mêmes notations que ci-dessus, ϕ envoie le milieu de $[P, Q]$ sur le milieu de $[\phi(P), \phi(Q)]$.

Preuve : Il s'agit de refaire la preuve ci-dessus avec le cas particulier $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

On peut maintenant montrer que $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_F$ est constitué exactement des isométries trouvées au point 2. (pour les notations, se référer à la page 6).
Soit donc $\phi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_F$.
Premièrement, on note que, à cause du lemme (ii), le segment $[A_1, A_4]$ est envoyé sur $[A_1, A_4]$, $[A_2, A_5]$ ou sur $[A_3, A_6]$, et donc O, qui est le milieu de $[A_1, A_4]$, est envoyé sur le milieu d'un de ces trois segments. Comme le milieu de chacun de ces segments est O, on en conclut que $\phi(O) = O$.



Deuxièmement, à cause du lemme (iii), on sait que $\phi(A_1) \in \{A_i : i = 1, ..., 6\}$. Si $\phi(A_1) = A_i$, alors on a aussi, à cause du lemme (iii) et du fait que ϕ est une isométrie, que $\phi(B_1) = B_i$. Maintenant, on fait une rotation r de centre O qui envoie A_i sur A_1 (et donc envoie aussi B_i sur B_1). On a donc que $r \circ \phi$ est une isométrie qui laisse O, A_1, B_1 invariants. Par le lemme (i), on en conclut que $r \circ \phi = id$, i.e., $\phi = r^{-1}$. Comme on n'a que 6 choix pour r (ceux du point 2.), on a fini.