Série 10

(les exercices à rendre sont marqués avec *)

Exercice 1

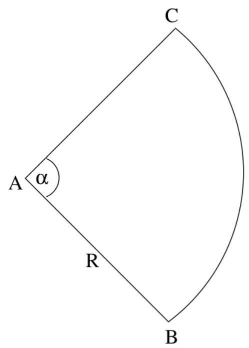
Calculer le maximum et le minimum de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1 \qquad \text{quand } x \in [0, 5].$$

Solution. Nous cherchons les zéros de $f'(x) = x^2 - 4x + 3$ dans l'intervalle $]0, 5[$. On trouve $x = 1$ et $x = 3$. Les extrema se trouvent parmi les zéros de $f'(x)$ dans $]0, 5[$ et les bornes de l'intervalle. Nous avons $f(0) = 1$, $f(1) = \frac{7}{3}$, $f(3) = 1$, $f(5) = \frac{23}{3}$. Le maximum est donc atteint au point $x = 5$ et vaut $23/3$, et le minimum est atteint au point $x = 0$ et $x = 3$, et vaut 1.

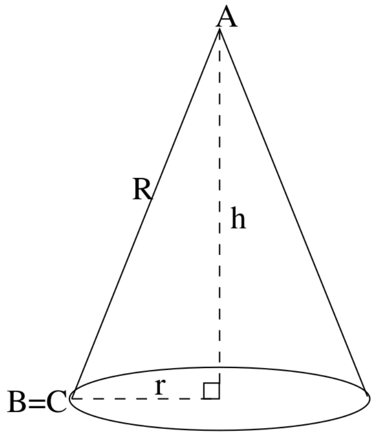
Exercice 2

Soit ABC un secteur circulaire de centre A, d'arc BC, de rayon fixé R et d'angle variable α (voir l'illustration). On construit un cône en collant les côtés AB et AC. Déterminer l'angle α pour lequel le volume de ce cône sera maximal.



Rappel : volume d'un cône $= \frac{1}{3}$ surface de la base $\times$ hauteur.

Solution. La longueur de l'arc BC vaut $\alpha \cdot R$ (α : radians). Ainsi le rayon r de la base du cône sera tel que $2\pi r = R\alpha$, d'où $r = \frac{\alpha R}{2\pi}$. La hauteur h du cône vaut, quant à elle, $h = \sqrt{R^2 - r^2}$.



Par conséquent le volume V du cône est donné par

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \frac{\alpha^2 R^2}{4\pi^2}\sqrt{R^2 - \frac{\alpha^2 R^2}{4\pi^2}}$$

ce qui peut s'écrire comme

$$V(\alpha) = \frac{\alpha^2 R^3}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}$$

C'est une fonction continue en $\alpha \in [0, 2\pi]$ et dérivable en $\alpha \in]0, 2\pi[$.
Pour obtenir l'angle α qui maximise ce volume, on cherche d'abord $\alpha \in]0, 2\pi[$ tel que $V'(\alpha) = 0$. On obtient

$$V'(\alpha) = \frac{R^3}{24\pi^2}\left(2\alpha\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2} - \frac{\alpha^3}{\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}\right) = \frac{\alpha R^3}{24\pi^2} \cdot \frac{8\pi^2 - 3\alpha^2}{\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}},$$

donc $V'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ou $\alpha^2 = \frac{8}{3}\pi^2$. Comme on recherche α dans $]0, 2\pi[$, ceci donne $\alpha = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Attention, la discussion n'est encore pas terminée !

Les candidats $\alpha \in [0, 2\pi]$ en lesquels le maximum peut être atteint sont $\alpha = 0$, $\alpha = 2\pi$ et $\alpha = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$. Or $V(0) = V(2\pi) = 0$ et $V\left(2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}} > 0$. Ainsi le volume maximal est atteint en $\alpha = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ et il vaut $\frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}}$.

Exercice 3

Soit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3\,, & x \leq 1 \\ \alpha x + \beta\,, & x > 1\,. \end{cases}$$

Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soit dérivable partout.

Solution. En tant que fonction polynomiale, f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Il reste donc à étudier la dérivabilité de f en $x = 1$.

Une condition nécessaire pour la dérivabilité en $x = 1$ est la continuité en ce point, c'est-à-dire,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha + \beta = 3. \tag{1}$$

La fonction f est dérivable en $x = 1$ si les dérivées à gauche et à droite en ce point sont égales.

$$f'_{\text{gauche}}(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 - x + 3 - 3}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} x = 1$$

$$f'_{\text{droite}}(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\alpha x + \beta - 3}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\alpha x - \alpha + \overbrace{\alpha + \beta}^{=3 \text{ par } (1)} - 3}{x - 1} = \alpha,$$

Donc $f'_{\text{gauche}}(1) = f'_{\text{droite}}(1) \Leftrightarrow \alpha = 1$. Il suit alors de (1) que $\beta = 2$.

Ainsi la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3\,, & x \leq 1 \\ x + 2\,, & x > 1 \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4*

Dans les trois cas suivants, calculer $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de la fonction f quand :

a) $f(x) = x^m \quad (m \in \mathbb{Z})$

b) $f(x) = \sin(2x) + 2\cos(x)$

Solution. On a que

a) On distingue trois cas selon la valeur de m :

- $m = 0$: $\quad f^{(n)}(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- $m \geq 1$: $\quad f^{(n)}(x) = \begin{cases} m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)x^{m-n}\,, & n \leq m \\ 0\,, & n > m \end{cases}$
- $m \leq -1$: $\quad f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

b) On commence par calculer les quatre premières dérivées de f :

$$f'(x) = 2\cos(2x) - 2\sin(x) \qquad f''(x) = -4\sin(2x) - 2\cos(x)$$
$$f'''(x) = -8\cos(2x) + 2\sin(x) \qquad f^{(4)}(x) = 16\sin(2x) + 2\cos(x)$$

Il faut donc distinguer deux cas selon la parité de $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}\big(2^n \sin(2x) + 2\cos(x)\big), & n \text{ pair} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\big(2^n \cos(2x) - 2\sin(x)\big), & n \text{ impair} \end{cases}$$