Série 11

(les exercices à rendre sont marqués avec *)

Exercice 1*

Trouver les réciproques des fonctions hyperboliques

a) $f(x) = \mathrm{sh}(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

b) $f(x) = \mathrm{ch}(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

c) $f(x) = \mathrm{th}(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

d) $f(x) = \mathrm{coth}(x) := \frac{1}{\mathrm{th}(x)}$

en suivant les étapes ci-dessous :

- Donner le domaine de définition et l'image de f.
- Si nécessaire restreindre le domaine pour rendre f bijective.
- Exprimer la réciproque f^{-1} en termes des fonctions Log, $\sqrt{\ }$ et polynômes.
- Préciser le domaine de définition de f^{-1}.
- Esquisser les graphes de f et f^{-1}.

Exercice 2

Dans chaque cas, étudier la dérivabilité de la réciproque f^{-1}, calculer sa dérivée et donner le domaine de cette dernière.

a) $f(x) = \sin(x)$ sur $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

b) $f(x) = \cos(x)$ sur $I = [0, \pi]$

c) $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

d) $f(x) = e^x$ sur $\mathbb{R}$

e) $f(x) = e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$

f) $f(x) = a^x$ avec $a = \frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$

g) $f(x) = \mathrm{sh}(x)$ sur $\mathbb{R}$

h) $f(x) = \mathrm{ch}(x)$ sur $I = [0, \infty[$

i) $f(x) = \mathrm{th}(x)$ sur $\mathbb{R}$

l) $f(x) = \mathrm{coth}(x)$ sur $\mathbb{R}^*$

Exercice 3

Montrer en utilisant les corollaires du théorème des accroissements finis que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}\,.$$

Exercice 4

Calculer les limites suivantes

a) $\lim_{x \to 2} \frac{\operatorname{Log}(x-1)}{x-2}$

b) $\lim_{x \to \infty} x \left(\operatorname{th}(x) - 1 \right)$

c) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$

d) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) \operatorname{tg}(x)}{(\log(1+x))^2}$

e) $\lim_{x \to 0} \left(1 + \sin(x) \right)^{1/x}$

f) $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^{1+\sin x}} \right)$