Série 11

(les exercices à rendre sont marqués avec *)

Exercice 1*

Trouver les réciproques des fonctions hyperboliques

a) $f(x) = \mathrm{sh}(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

b) $f(x) = \mathrm{ch}(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

c) $f(x) = \mathrm{th}(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

d) $f(x) = \coth(x) := \frac{1}{\mathrm{th}(x)}$

en suivant les étapes ci-dessous :

- Donner le domaine de définition et l'image de f.
- Si nécessaire restreindre le domaine pour rendre f bijective.
- Exprimer la réciproque f^{-1} en termes des fonctions Log, $\sqrt{\ }$ et polynômes.
- Préciser le domaine de définition de f^{-1}.
- Esquisser les graphes de f et f^{-1}.

Solution. On a que

a) La fonction $\mathrm{sh}(x)$ va de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ (cf. Fig. 1). On a

$$\begin{aligned} y = \mathrm{sh}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right) \Leftrightarrow \quad & 2y = e^x - \frac{1}{e^x} \\ \Leftrightarrow \quad & (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & e^x = y \pm \sqrt{y^2+1}\,. \end{aligned}$$

Comme $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x = y + \sqrt{y^2+1}$ et donc la fonction réciproque est

$$\mathrm{Argsh}(x) := \mathrm{Log}\Big(x + \sqrt{x^2+1}\Big)\,.$$

Comme $\sqrt{x^2+1} > |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sqrt{x^2+1} + x > 0$ aussi pour $x < 0$. Ainsi le domaine de Argsh est $\mathbb{R}$ (la fonction sh est en fait bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$). Les graphes des fonctions sh et Argsh sont tracés sur les Figs. 1 et 2.

b) Le domaine de $\mathrm{ch}(x)$ est $\mathbb{R}$ mais son image est $[1, \infty)$ (cf. Fig. 3). On a

$$\begin{aligned} y = \mathrm{ch}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(e^x + \frac{1}{e^x}\right) \Leftrightarrow \quad & 2y = e^x + \frac{1}{e^x} \\ \Leftrightarrow \quad & (e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & e^x = y \pm \sqrt{y^2-1}. \end{aligned}$$

Comme $y = \mathrm{ch}(x) \geq 1$, la radicande est bien non-négative. La condition $e^x > 0$ est satisfaite pour les deux signes de la racine. Comme $y \geq 1$, on obtient $e^x \geq 1$ si on prend

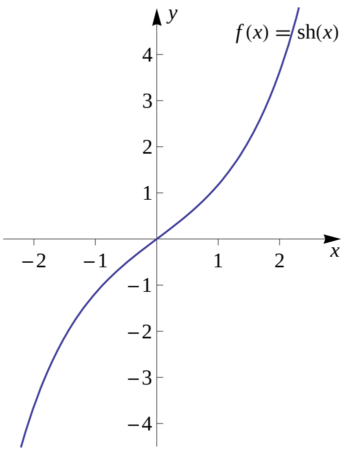

FIGURE 1

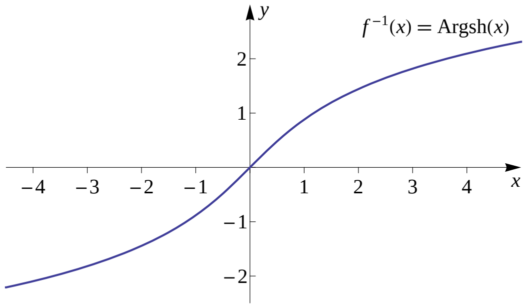

FIGURE 2

$+\sqrt{\cdot}$ et $e^x \leq 1$ si on prend $-\sqrt{\cdot}$. Ces deux solutions correspondent donc aux cas $x \geq 0$ et $x \leq 0$ respectivement. En fait, la fonction $\mathrm{ch}(x)$ n'est pas injective sur $\mathbb{R}$ mais seulement sur $[0, \infty[$ ou $]-\infty, 0]$ (cf. Fig. 3) et donc il faut la restreindre à un de ces domaines pour qu'elle soit inversible. Par convention, on prend $x \geq 0$ et donc la fonction réciproque est

$$\mathrm{Argch}\colon\ [1, \infty[\longrightarrow [0, \infty[\quad \text{définie par} \quad \mathrm{Argch}(x) = \mathrm{Log}\Big(x + \sqrt{x^2 - 1}\Big)\,.$$

Les graphes des fonctions ch et Argch sont tracés sur les Figs. 3 et 4. Comme illustration, la fonction réciproque de la fonction $g\colon\,]-\infty, 0] \to [1, \infty[$, $g(x) = \mathrm{ch}(x)$ est aussi tracée sur la Fig. 4 (courbe hachurée). Cette fonction correspond à la solution avec $-\sqrt{\cdot}$ ci-dessus.

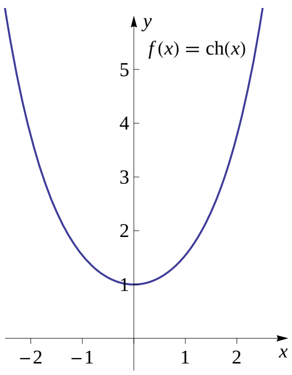

FIGURE 3

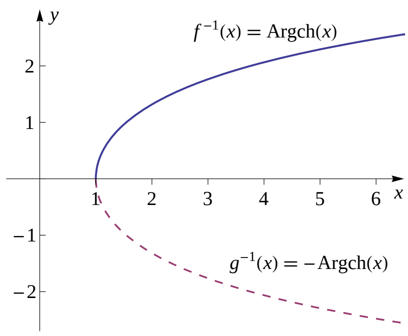

FIGURE 4

c) Le domaine de $\mathrm{th}(x)$ est $\mathbb{R}$ parce que $\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$, $\mathrm{sh}(x)$ et $\mathrm{ch}(x)$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{ch}(x)$ ne s'annule jamais. Pour trouver l'image de $\mathrm{th}(x)$, on calcule ses limites lorsque x tend vers $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{th}(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$$
$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{th}(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -1$$

où on a utilisé que $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$. En effet, comme la suite $a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ croît vers e^x pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a en particulier que $e^x \geq a_1 = 1 + x$. Ainsi

$$\lim_{x\to\infty} e^x \geq \lim_{x\to\infty} (x+1) = \infty \qquad \text{et donc} \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty} e^x} = 0\,.$$

L'image de $\text{th}(x)$ est donc $]-1,1[$ (cf. Fig. 5). On a

$$y = \text{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{(e^x)^2 - 1}{(e^x)^2 + 1} \quad \Leftrightarrow \quad (e^x)^2(1-y) = 1 + y \quad \Leftrightarrow \quad e^x = \pm\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}.$$

Notons que $y \in]-1,1[$ car $\text{Im(th)} =]-1,1[$ et donc la radicande est non-négative et bien définie. Comme $e^x > 0$, il faut prendre la racine positive et donc la fonction réciproque de th est

$$\text{Argth}\colon\ ]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \text{Argth}(x) = \frac{1}{2}\,\text{Log}\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Les graphes des fonctions th et Argth sont tracés sur les Figs. 5 et 6.

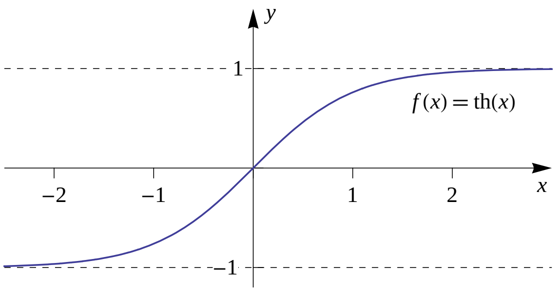

FIGURE 5

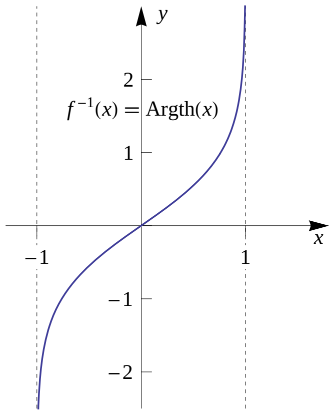

FIGURE 6

d) Observons que $\coth(x) = \frac{1}{\text{th}(x)} = \frac{\text{ch}(x)}{\text{sh}(x)}$. Comme la fonction sh s'annule en $x = 0$, le domaine de définition de coth est $\mathbb{R}^*$ et comme l'image de $\text{th}(x)$ est $]-1,1[$, il suit que l'image de $\coth(x)$ est $]-\infty,-1[\,\cup\,]1,\infty[$, cf. Fig. 7. On pourrait trouver la fonction réciproque en procédant comme pour la fonction th au c), mais il est plus facile d'utiliser la relation avec la fonction th pour obtenir

$$\begin{aligned} y = \coth(x) = \frac{1}{\text{th}(x)} &\Leftrightarrow \text{th}(x) = \frac{1}{y} \\ &\Leftrightarrow \quad x = \text{Argth}\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{2}\,\text{Log}\left(\frac{1+\frac{1}{y}}{1-\frac{1}{y}}\right) = \frac{1}{2}\,\text{Log}\left(\frac{y+1}{y-1}\right). \end{aligned}$$

Notons que $|y| > 1$ car y est dans l'image de coth, et donc l'argument du logarithme est toujours positif. Ainsi la fonction réciproque de coth est

$$\text{Argcoth}\colon\ ]-\infty,-1[\,\cup\,]1,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^*, \qquad \text{Argcoth}(x) = \frac{1}{2}\,\text{Log}\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

Voir les Figs. 7 et 8 pour les graphes des fonctions coth et Argcoth.

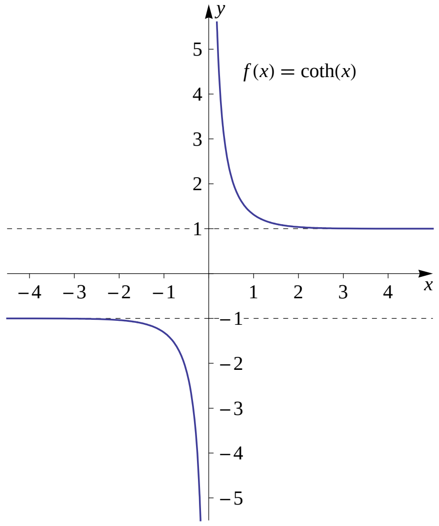

FIGURE 7

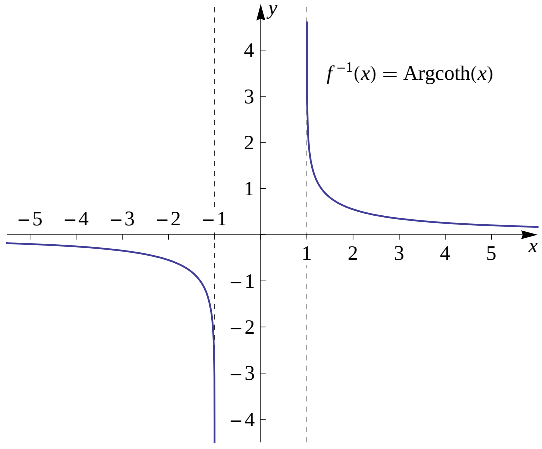

FIGURE 8

Exercice 2

Dans chaque cas, étudier la dérivabilité de la réciproque f^{-1}, calculer sa dérivée et donner le domaine de cette dernière.

a) $f(x) = \sin(x)$ sur $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

b) $f(x) = \cos(x)$ sur $I = [0, \pi]$

c) $f(x) = \text{tg}(x)$ sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

d) $f(x) = e^x$ sur $\mathbb{R}$

e) $f(x) = e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$

f) $f(x) = a^x$ avec $a = \frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$

g) $f(x) = \text{sh}(x)$ sur $\mathbb{R}$

h) $f(x) = \text{ch}(x)$ sur $I = [0, \infty[$

i) $f(x) = \text{th}(x)$ sur $\mathbb{R}$

l) $f(x) = \coth(x)$ sur $\mathbb{R}^*$

Solution. Toutes les fonctions f considérées sont des fonctions élémentaires et donc dérivables sur leur domaine. Par le théorème vu au cours, la fonction réciproque f^{-1} est donc dérivable sur l'image de tout intervalle sur lequel f' ne s'annule pas.

On utilisera des résultats des exercices précédents, en particulier pour les fonctions des points g) à l).

a) $f^{-1}(x) = \text{Arcsin}(x)\,, \quad D(f^{-1}) = [-1, 1]$.

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\cos(\text{Arcsin}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin(\text{Arcsin}(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,, \quad D\left(\left(f^{-1}\right)'\right) =]-1, 1[\,.$$

b) $f^{-1}(x) = \text{Arccos}(x)\,, \quad D(f^{-1}) = [-1, 1]$.

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{-\sin(\text{Arccos}(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos(\text{Arccos}(x))^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,,$$

$D\left(\left(f^{-1}\right)'\right) =]-1, 1[\,.$

c) $f^{-1}(x) = \text{Arctg}(x)\,, \quad D(f^{-1}) = \mathbb{R}$.

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\frac{1}{\cos(\text{Arctg}(x))^2}} = \cos(\text{Arctg}(x))^2 \overset{*}{=} \frac{1}{1 + \text{tg}(\text{Arctg}(x))^2} = \frac{1}{1 + x^2}$$

où il faut utiliser la trigonométrie pour obtenir l'expression en $\text{tg}(x)$ à l'étape * :

$$\begin{aligned} \cos(x)^2 = 1 - \sin(x)^2 = 1 - \text{tg}(x)^2 \cos(x)^2 \Leftrightarrow \quad & \cos(x)^2 \left(1 + \text{tg}(x)^2\right) = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \cos(x)^2 = \frac{1}{1 + \text{tg}(x)^2} \end{aligned}$$

Le domaine de définition de la dérivée est $D((f^{-1})') = \mathbb{R}$.

d) $f^{-1}(x) = \operatorname{Log}(x)\,, \quad D(f^{-1}) = \,]0,\infty[\,.$

$(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{e^{\operatorname{Log}(x)}} = \dfrac{1}{x}\,, \qquad D\big((f^{-1})'\big) = \,]0,\infty[\,.$

e) $f^{-1}(x) = -\operatorname{Log}(x)\,, \quad D(f^{-1}) = \,]0,\infty[\,.$

$(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{-e^{-(-\operatorname{Log}(x))}} = -\dfrac{1}{x}\,, \qquad D\big((f^{-1})'\big) = \,]0,\infty[\,.$

f) $f^{-1}(x) = -\log_2(x)\,, \quad D(f^{-1}) = \,]0,\infty[\,.$

On a $f'(x) = (2^{-x})' = \big(e^{-x\operatorname{Log}(2)}\big)' = -\operatorname{Log}(2)\,e^{-x\operatorname{Log}(2)} = -\operatorname{Log}(2)\,2^{-x}$

et donc $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{-\operatorname{Log}(2)\cdot 2^{-(-\log_2(x))}} = -\dfrac{1}{x\operatorname{Log}(2)}\,, \qquad D\big((f^{-1})'\big) = \,]0,\infty[\,.$

g) $f^{-1}(x) = \operatorname{Argsh}(x)\,, \quad D(f^{-1}) = \mathbb{R}\,.$

$(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{Argsh}(x))} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}(\operatorname{Argsh}(x))^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,, \qquad D((f^{-1})') = \mathbb{R}.$

h) $f^{-1}(x) = \operatorname{Argch}(x)\,, \quad D(f^{-1}) = \,[1,\infty[\,.$

$(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sh}(\operatorname{Argch}(x))} = \dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(\operatorname{Argch}(x))^2-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,,$

$D((f^{-1})') = \,]1,\infty[\,.$

i) $f^{-1}(x) = \operatorname{Argth}(x)\,, \quad D(f^{-1}) = \,]-1,1[\,.$

Comme $f'(x) = \left(\dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}\right)' = \dfrac{\operatorname{ch}(x)^2-\operatorname{sh}(x)^2}{\operatorname{ch}(x)^2} = \dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)^2}$ on a

$$\big(f^{-1}\big)'(x) = \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{Argth}(x))^2}} = \operatorname{ch}(\operatorname{Argth}(x))^2 \overset{**}{=} \frac{1}{1-\operatorname{th}(\operatorname{Argth}(x))^2} = \frac{1}{1-x^2}\,,$$

où l'étape ** et due à

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(x)^2 = 1+\operatorname{sh}(x)^2 = 1+\operatorname{th}(x)^2\operatorname{ch}(x)^2 &\Leftrightarrow \quad \operatorname{ch}(x)^2\big(1-\operatorname{th}(x)^2\big) = 1\\ &\Leftrightarrow \quad \operatorname{ch}(x)^2 = \frac{1}{1-\operatorname{th}(x)^2}\,.\end{aligned}$$

Le domaine de définition de la dérivée est $D\big((f^{-1})'\big) = \,]-1,1[\,.$

l) $f^{-1}(x) = \operatorname{Argcoth}(x)\,, \quad D(f^{-1}) = \,]-\infty,-1[\,\cup\,]1,\infty[\,.$

Ici on a $f'(x) = \left(\dfrac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)}\right)' = \dfrac{\operatorname{sh}(x)^2-\operatorname{ch}(x)^2}{\operatorname{sh}(x)^2} = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}(x)^2}$ et donc

$$\big(f^{-1}\big)'(x) = \frac{1}{-\frac{1}{\operatorname{sh}(\operatorname{Argcoth}(x))^2}} = -\operatorname{sh}(\operatorname{Argcoth}(x))^2 \overset{\star\star}{=} \frac{1}{1-\operatorname{coth}(\operatorname{Argcoth}(x))^2} = \frac{1}{1-x^2}\,,$$

où ⋆⋆ vient de

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}(x)^2 = \operatorname{ch}(x)^2-1 = \operatorname{coth}(x)^2\operatorname{sh}(x)^2-1 &\Leftrightarrow \quad \operatorname{sh}(x)^2\big(\operatorname{coth}(x)^2-1\big) = 1\\ &\Leftrightarrow \quad \operatorname{sh}(x)^2 = \frac{1}{\operatorname{coth}(x)^2-1}\,.\end{aligned}$$

Le domaine de définition la dérivée est $D((f^{-1})') = \mathbb{R}\setminus[-1,1]$.

Exercice 3

Montrer en utilisant les corollaires du théorème des accroissements finis que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}\,.$$

Solution. Soit la fonction $f(x) = \cos(x) - 1 + \frac{1}{2}x^2$. Observons qu'il suffit de montrer $f(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$ puisque f est paire. On a $f(0) = \cos(0) - 1 + 0 = 0$. Grâce au théorème des accroissements finis, l'inégalité est satisfaite si on montre que $f'(x) \geq 0$ pour $x > 0$. On a $f'(x) = -\sin(x) + x$ dont on ne connaît à priori pas le signe. Mais on a $f'(0) = 0$. De nouveau, il suffit de montrer que $f''(x) \geq 0$ pour $x > 0$. Or, $f''(x) = -\cos(x) + 1 \geq 0$ parce que $\cos(x) \in [-1, 1]$. Donc on a successivement

$$\begin{aligned} f''(x) \geq 0 \quad &\text{et} \quad f'(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) \geq 0 \\ f'(x) \geq 0 \quad &\text{et} \quad f(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geq 0 \end{aligned}$$

pour tout $x \geq 0$ et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'où l'inégalité désirée.

Exercice 4

Calculer les limites suivantes

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\mathrm{Log}(x-1)}{x-2}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\,\big(\mathrm{th}(x) - 1\big)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\Big)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)\,\mathrm{tg}(x)}{(\mathrm{Log}(1+x))^2}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \big(1 + \sin(x)\big)^{1/x}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^{1+\sin x}}\Big)$

Solution. Afin de calculer les limites demandées, on applique *la règle de Bernoulli-l'Hospital* (abrégée par BH) une fois qu'on a vérifié ses hypothèses.

a) Posons $f(x) = \mathrm{Log}(x-1)$ et $g(x) = x - 2$. Alors on a $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 0$ et $g'(x) = 1 \neq 0$. Les hypothèses de BH sont donc satisfaites et on a

$$\lim_{x\to 2} \frac{\mathrm{Log}(x-1)}{x-2} \overset{\mathrm{BH}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x-1}}{1} = 1.$$

b) Ici, on doit utiliser la règle BH plusieurs fois. Pour la première fois on pose $f(x) = \mathrm{th}(x) - 1$ et $g(x) = \frac{1}{x}$. Comme $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ et $g'(x) = -\frac{1}{x^2} \neq 0$, les hypothèses sont satisfaites. On peut donc appliquer BH une première fois (les hypothèses pour les étapes suivantes seront vérifiées ci-dessous) :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} x\,\big(\mathrm{th}(x) - 1\big) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{th}(x) - 1}{\frac{1}{x}} \overset{\mathrm{BH}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\mathrm{ch}(x)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\mathrm{ch}(x)^2} \\ &\overset{\mathrm{BH}}{=} -\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\mathrm{sh}(2x)} \overset{\mathrm{BH}}{=} -\lim_{x\to\infty} \frac{2}{2\,\mathrm{ch}(2x)} = 0\,. \end{aligned}$$

Pour la deuxième application de BH on a $\tilde{f}(x) = x^2$ et $\tilde{g}(x) = \mathrm{ch}(x)^2$ on a $\lim\limits_{x\to\infty} \tilde{f}(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \tilde{g}(x) = \infty$ et $g'(x) = 2\,\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(x) = \mathrm{sh}(2x) \neq 0$ pour $x \neq 0$ (ce qui est bien le cas lorsque $x \to \infty$).

Finalement pour la troisième fois avec $\bar{f}(x) = 2x$ et $\bar{g}(x) = \mathrm{sh}(2x)$ et donc $\lim\limits_{x\to\infty} \bar{f}(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \bar{g}(x) = \infty$ ainsi que $\bar{g}'(x) = 2\,\mathrm{ch}(2x) \neq 0$. On a donc bien pu appliquer BH les trois fois.

c) Remarquons que si $x \to 0^+$, alors la limite est de la forme indéterminée "$+\infty - \infty$", et si $x \to 0^-$, alors la limite est de la forme indéterminée "$-\infty + \infty$". On peut mettre les deux fractions au même dénominateur :

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^x - 1 - x}{xe^x - x}\,,$$

qui, maintenant, lorsque $x \to 0^+$, est indéterminée de la forme "$\frac{0}{0}$". La règle de BH s'applique, et on peut essayer de calculer

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(e^x - 1 - x)'}{(xe^x - x)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{e^x + xe^x - 1}\,.$$

Cette dernière est à nouveau indéterminée de la forme "$\frac{0}{0}$", et BH s'applique également. On peut donc étudier la limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(e^x - 1)'}{(e^x + xe^x - 1)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{2e^x + xe^x} = \frac{1}{2}\,.$$

On conclut donc que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{xe^x - x} = \frac{1}{2}\,.$$

On montre de même que la limite latérale $x \to 0^-$ est égale à $\frac{1}{2}$.

d) La limite est de la forme "$\frac{0}{0}$", et les hypothèses de BH sont satisfaites. Mais on voit que les dérivées des numérateurs et dénominateurs risquent de donner des expressions compliquées, surtout si on commence à dériver plusieurs fois. On a donc meilleur temps de regarder la fonction de plus près avant de vouloir appliquer BH, et d'écrire :

$$\frac{\sin(x)\,\mathrm{tg}(x)}{(\mathrm{Log}(1+x))^2} = \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{\cos(x)} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\mathrm{Log}(1+x)}{x}\right)^2}$$

Comme $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{Log}(1+x)}{x} = 1$ (voir cours), la limite cherchée vaut $1^2 \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1^2} = 1$.

e) On a $\big(1+\sin(x)\big)^{1/x} = \exp\big(\frac{1}{x}\,\mathrm{Log}\big(1+\sin(x)\big)\big)$. On calcule d'abord la limite de l'exposant. Posons $f(x) = \mathrm{Log}\big(1+\sin(x)\big)$ et $g(x) = x$. Alors $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$ et $g'(x) = 1 \neq 0$. Ainsi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{Log}(1+\sin(x))}{x} \overset{\mathrm{BH}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}}{1} = 1\,,$$

et par conséquent

$$\lim_{x\to 0} (1+\sin(x))^{1/x} = e^1 = e\,.$$

f) Écrivons

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^{1+\sin x}} = \frac{x^{\sin(x)} - 1}{x}\,\frac{1}{x^{\sin x}}\,.$$

Remarquons que (on procède comme précédemment)

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x} = \exp\Big(\lim_{x\to 0^+} \sin(x)\,\mathrm{Log}(x)\Big) = \exp\Big(\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} x\,\mathrm{Log}(x)\Big) = e^{1\cdot 0} = 1\,.$$

La première limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\sin(x)}-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sin(x)\,\mathrm{Log}(x)}-1}{x}\,,$$

est indéterminée de la forme "$\frac{0}{0}$". Les hypothèse de la règle de BH s'appliquent, on peut donc étudier la limite

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{(e^{\sin(x)\,\mathrm{Log}(x)}-1)'}{(x)'} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sin(x)\,\mathrm{Log}(x)}(\cos x\,\mathrm{Log}\,x + \frac{\sin x}{x})}{1} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \underbrace{x^{\sin(x)}}_{\to 1}\big(\underbrace{\cos x\,\mathrm{Log}\,x}_{\to -\infty} + \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}\big) = -\infty\,.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^{1+\sin x}}\right) = -\infty\,.$$