Série 12

(les exercices à rendre sont marqués avec *)

Exercice 1

En sachant que les polynômes de Taylor d'ordre 4 de $\mathrm{Log}(1+x)$ et de $\dfrac{1}{(1+x)^2}$ au point $x_0 = 0$ sont donnés respectivement par

$$P_4(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \quad \text{et} \quad Q_4(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 \ ,$$

déduire les polynômes de Taylor d'ordre 4 de $\mathrm{Log}(1+x) + \dfrac{1}{(1+x)^2}$ et de $\dfrac{\mathrm{Log}(1+x)}{(1+x)^2}$ au point $x_0 = 0$.

Exercice 2*

En utilisant des développements limités d'ordre convenable autour de 0, calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} - \sin(x)}{x^5}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x + \sin(x) - \cos(x) - 2x}{x - \mathrm{Log}(1+x)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(\sin(x)) - \sin(x)^2}{x^6}$

Exercice 3

A l'aide de combinaisons de polynômes de Taylor, trouver le développement limité d'ordre 4 autour de $a = 0$ de fonctions

a) $f(x) = \mathrm{Log}(\cos(x))$

b) $f(x) = \exp(\sin(x))$

Exercice 4

On définit la fonction continue

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{1 + \sin x} \quad \text{pour } x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[.$$

a) Trouvez les zéros de f ;
b) Calculer les limites à gauche et à droite de f ;
c) Trouvez les extremas et les régions de monotonie de f ;
d) Trouvez les régions de convexité et de concavité de f ;
e) Trouvez les points d'inflexion de f ;
f) Esquissez le graphique de f.

Exercice 5

Calculer la limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp\Big(x^4 \cos\big(e^{1/x^2}\big)\Big) - 1}{x} \ .$$

Peut-on utiliser Bernoulli-l'Hospital dans ce cas ?

Exercice 6

Soit $f\ :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ dérivable. Montrer, seulement en utilisant le Théorème des accroissements finis, que

$$\text{si} \quad \lim_{x\to\infty} f'(x) = D\,, \qquad \text{alors} \ \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = D\,.$$