Corrigé 10 – Commande d'axe

30.11.2018

Solution 10.1 :

1- Ecrivez le modèle dynamique inverse de cet axe ramené au moteur.

$$\sum \boldsymbol{M} = \boldsymbol{J_{rm}\ddot{\theta}_m} = \boldsymbol{\Gamma_m} - \frac{1}{n}\left\{\left(\boldsymbol{k_{vis}\dot{\theta}_L}\right) + \mathbf{M}_b\boldsymbol{g}\frac{\boldsymbol{l}}{2}\boldsymbol{sin(\theta_L)} + \boldsymbol{Mglsin(\theta_L)}\right\}$$

- $\boldsymbol{J_{rm}}$ **est le moment d'inertie total ramené à l'axe moteur.**

  $$J_{rm} = \frac{1}{n^2}\left(\left\{J_b + M_b\left(\frac{l}{2}\right)^2\right\} + Ml^2\right) + J_m$$

  $\left\{J_b + M_b\left(\frac{l}{2}\right)^2\right\}$ est le moment d'inertie du bras par rapport à l'axe de rotation du réducteur (en appliquant le théorème d'Huygens-Steiner)

- $\frac{1}{n}\left(\boldsymbol{k_{vis}\dot{\theta}_L}\right)$ est le moment de viscosité ramené à l'axe du moteur. Il faudra aussi exprimer la vitesse par rapport l'axe moteur.

Finalement le modèle dynamique de cet axe de robot s'écrit comme suit :

$$\boldsymbol{J_{rm}\ddot{\theta}_m} = \boldsymbol{\Gamma_m} - \frac{1}{n^2}\left(\boldsymbol{k_{vis}\dot{\theta}_m}\right) - \frac{1}{n}\left(\frac{\mathbf{M}_b}{2} + \boldsymbol{M}\right)\boldsymbol{glsin}\left(\frac{\boldsymbol{\theta_m}}{n}\right) \qquad \text{(eq. 1)}$$

Le modèle inverse est le suivant :

$$\boldsymbol{\Gamma_m} = \boldsymbol{J_{rm}\ddot{\theta}_m} + \frac{1}{n^2}\left(\boldsymbol{k_{vis}\dot{\theta}_m}\right) + \frac{1}{n}\left(\frac{\mathbf{M}_b}{2} + \boldsymbol{M}\right)\boldsymbol{glsin}\left(\frac{\boldsymbol{\theta_m}}{n}\right) \qquad \text{(eq. 2)}$$

2- Ecrivez la loi de commande la plus simple que nous pourrions utiliser pour la commande de cet axe.

La commande la plus simple est une commande PID.

- Seul un contrôleur P ne suffira pas car il **faudra contrôler la stabilisation de l'axe par l'action dérivée** (voir exercice Commande PID d'un moteur CC sur moodle).
- Une action Intégrale est nécessaire pour compenser le couple de gravité au régime statique*.

*) le régime statique correspond à une vitesse nulle. Dans notre cas, l'effort en régime statique qu'il faudra compenser est : $\frac{1}{n}\left(\frac{\mathbf{M}_b}{2} + \boldsymbol{M}\right)\boldsymbol{glsin}\left(\frac{\boldsymbol{\theta_{m0}}}{n}\right)$

La loi de commande du PD est donnée par l'expression suivante :

$$\Gamma_{m\_reg} = \Gamma_{m\_PID} = K_p \left\{ e + T_d \frac{de}{dt} + \frac{1}{T_i}\int_0^t e d\tau \right\}$$

$e(t)$ est l'erreur entre la consigne et la mesure.

3- Quelle est l'expression de la loi de commande qui inclut un couple a priori pour la commande de cet axe ?

Le couple a priori Γ_{ap} est le couple moteur pour les valeurs de consigne de la position, de la vitesse et de l'accélération.

$$\Gamma_{ap} = J_{rm}\ddot{\theta}_{md}(t) + \frac{1}{n^2}\left(k_{vis}\dot{\theta}_{md}(t)\right) + \frac{1}{n}\left(\frac{M_b}{2} + M\right) glsin\left(\frac{\theta_{md}(t)}{n}\right)$$

La loi de commande du PID avec couple a priori est donnée par l'expression suivante :

$$\Gamma_{m\_reg} = K_p \left\{ e + T_d \frac{de}{dt} + \frac{1}{T_i}\int_0^t e d\tau \right\} + \Gamma_{ap}$$

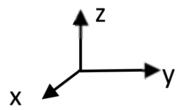
$$\Gamma_{m\_reg} = \Gamma_{m\_PID} + J_{rm}\ddot{\theta}_{md}(t) + \frac{1}{n^2}\left(k_{vis}\dot{\theta}_{md}(t)\right) + \frac{1}{n}\left(\frac{M_b}{2} + M\right) glsin\left(\frac{\theta_{md}(t)}{n}\right)$$

4- Quelle est l'expression de la loi de commande de cet axe qui réalise une compensation exacte des non linéarités ?

$$\Gamma_{m\_reg} = \Gamma_{m\_PID} + \frac{1}{n^2}\left(k_{vis}\dot{\theta}_m\right) + \frac{1}{n}\left(\frac{M_b}{2} + M\right) glsin\left(\frac{\theta_m}{n}\right)$$

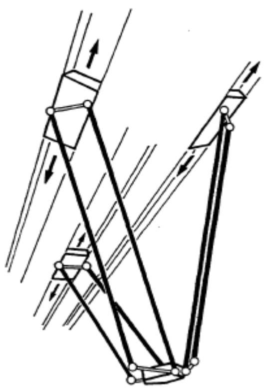
Le couple de compensation exacte est donné par $\frac{1}{n^2}\left(k_{vis}\dot{\theta}_m\right) + \frac{1}{n}\left(\frac{M_b}{2} + M\right) glsin\left(\frac{\theta_m}{n}\right)$. **Vous pouvez faire l'exercice de boucler ce couple avec l'expression de l'eq.1.**

Solution 10.2 (Examen 2018, 25pts/120pts)

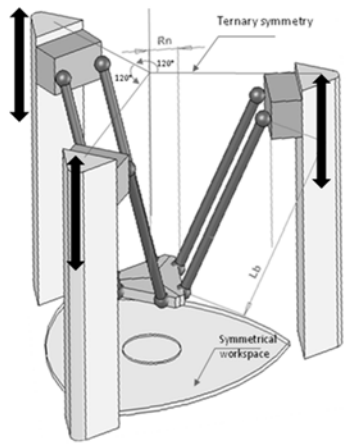


<u>Les questions 1 à 3 ne font pas partie des objectifs de ce cours</u>

Il existe plusieurs variantes du robot Delta linéaire. Une des variantes est celle totalement horizontale (fig ci-contre 1) et une autre est celle totalement verticale (fig ci-contre 2).



1- Variante Delta linéaire horizontale



2- Variante Delta linéaire verticale

Nous désirons contrôler les axes linéaires de chacune de ces machines. Nous faisons l'hypothèse suivante :

- $\boldsymbol{m_h}$ est la masse équivalente ramenée à chaque axe linéaire de la variante horizontale. Elle est supposée constante quel que soit la position du robot. Tous les moments d'inertie sont supposés nuls.
- $\boldsymbol{m_v}$ est la masse équivalente ramenée à chaque axe linéaire de la variante verticale. Elle est supposée constante quel que soit la position du robot. Tous les moments d'inertie sont supposés nuls.
- Pour les deux variantes, le frottement sec est supposé nul. Le coefficient de frottement visqueux est $\boldsymbol{k_v}$ pour chaque axe linéaire.

4.1 Quel est le nombre de degrés de liberté de la variante horizontale ?

(A) 2 <u>(B) 3</u> (C) 4 (D) 1

Les deux robots ont les mêmes degrés de liberté de translation {x, y, z}

4.2 Quel est le nombre de degrés de liberté de la variante verticale ?

(A) 2 <u>(B) 3</u> (C) 4 (D) 1

4.3 Concernant le Jacobien, laquelle des expressions suivantes est correcte ?

(A) La matrice Jacobienne de la variante horizontale ne dépend pas de la position du robot
(B) La matrice Jacobienne de la variante verticale ne dépend pas de la position du robot
(C) La matrice Jacobienne des deux variantes dépend de la position du robot
(D) La matrice Jacobienne de la variante verticale correspond à la matrice Identité

Dans les deux cas la position de l'outil est une fonction quadratique des positions articulaires, car chaque articulation au niveau articulaire engendre une calotte sphérique au niveau outil.

4.4 Concernant le modèle dynamique, en supposant que les masses ramenées m_h et m_v sont constantes, m_h (pour la variante horizontale), respectivement m_v pour la variante verticale, laquelle des expressions suivantes est correcte ?

(A) Le modèle dynamique de chacun de ces deux robots est découplé
(B) Le modèle dynamique de chacun des robots dépend de la position terminale du robot
(C) Les modèles dynamiques des deux robots sont identiques
(D) Seulement le modèle dynamique de la variante horizontale est découplé

Car les masses en mouvement sont supposées constantes et indépendantes de la position du robot. L'intérêt de cette approximation est de construire des modèles dynamiques d'axes découplés.

4.a Les moteurs sont commandés en couple. Quel est le contrôleur minimal qui fonctionnerait pour une commande en position suffisamment rigide de l'un des axes de la variante horizontale : **P , PI , PD ou PID ? Expliquez** !(2 pts)

Le contrôleur minimal des axes de la variante horizontale serait un contrôleur PD car la viscosité intrinsèque de l'axe ne suffit pas à stabiliser le comportement boucle fermée tout en garantissant une bonne rigidité du contrôle.

Dans ce cas de la variante horizontale, les axes ne subissent pas l'effet de la gravité. Il n y a donc pas besoin d'un intégrateur.

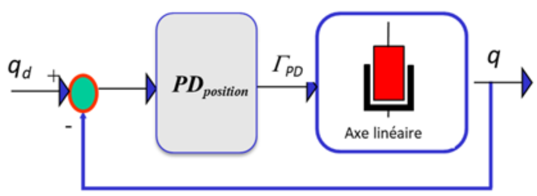
Notez que nous parlons du contrôleur minimal.

4.b Les moteurs sont commandés en couple. Quel est le contrôleur minimal qui fonctionnerait pour la commande en position suffisamment rigide de l'un des axes de la variante verticale : **P , PI , PD ou PID ? Expliquez !** (2 pts)

Le contrôleur minimal des axes de la variante verticale serait un contrôleur PID car de plus du cas horizontal les axes subissent l'effet de la gravité. Il y a donc besoin d'un intégrateur.

4.c Donnez l'expression du contrôleur de la question (**.a**). Décrire par un schéma de contrôle votre fermeture de la boucle d'asservissement. Explicitez les variables utilisées. (3 pts).

$$\Gamma_{PD} = \left\{ kp\ (q_d - q) + kp * Td\ .\frac{d}{dt}(q_d - q) \right\}$$



q_d est la valeur de la position d'un des axes horizontaux.

Apprenez à le dessiner à la main ☺

4.d Donnez l'expression du modèle dynamique inverse d'un des axes horizontaux (1 pt)

F_{mh} est la force motrice d'un des axes horizontaux

$$F_{mh} = m_h . \ddot{q} + k_v . \dot{q}$$

4.e Donnez l'expression du modèle dynamique inverse d'un des axes verticaux (2 pts)

F_{mv} est la force motrice d'un des axes verticaux

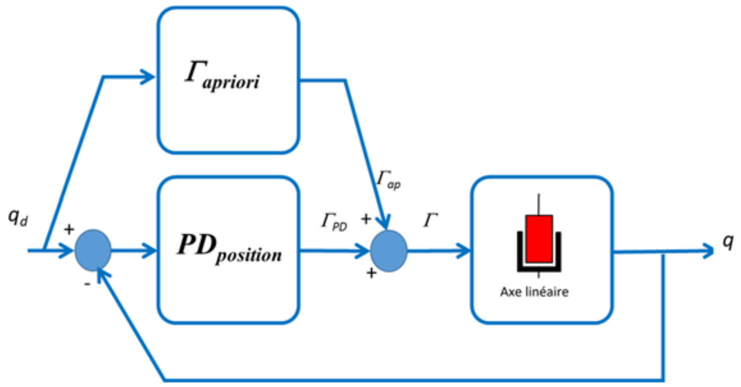
$$F_{mv} = m_v . \ddot{q} + k_v . \dot{q} + m_v . g_0$$

4.f Quelles sont les expressions des couples généralisés a priori pour un des axes horizontaux et un des axes verticaux (3 pts)

$$F_{mh\_ap} = m_h . \ddot{q}_d + k_v . \dot{q}_d$$

$$F_{mv\_ap} = m_v . \ddot{q}_d + k_v . \dot{q}_d + m_v . g_0$$

4.g Faire le schéma du contrôleur de la réponse **(.c)** avec un couple généralisé a priori. Quelle est l'expression totale du couple généralisé de commande (3 pts).



$$\Gamma = \Gamma_{PD} + \Gamma_{ap} = \left\{ kp\,(q_d - q) + kp * Td\,.\frac{d}{dt}(q_d - q) \right\} + m_h . \ddot{q}_d + k_v . \dot{q}_d$$

4.h Dans le cas de l'utilisation d'un a priori avec un des axes de la variante vertical, quel est le régulateur minimal **P , PI, PD ou PID ? Expliquez !** (1 pnt)

Le contrôleur minimum est un PD car la gravité serait compensée par l'a priori.