# Correction question 12

**(mid-term examen du 21 Novembre)**

*Remarque :* pour chacune des définitions, 1 point si elle est énoncée correctement, 0 si elle continent une (ou des) erreur(s).

Pour la preuve, 3 points si elle est correcte et complète. 2 points si elle contient une micro-erreur (erreur de copie) mais est par ailleurs correcte et complète. 1 point si l'idée est correcte mais avec une erreur de calcul ou omission. 0 point si incorrecte, non rigoureuse ou inconclusive.

**Question 12 (a).** Donner la définition de *"f est continue sur* $[1, 10]$ *"*.
**Solution.** La fonction $f$ est continue sur l'intervalle $[1, 10]$ si

$$\forall x_0 \in ]1, 10[, \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in ]1, 10[ \quad (|x_0 - x| < \delta \implies |f(x_0) - f(x)| < \epsilon)$$

et si

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 10^-} f(x) = f(10).$$

**Question 12 (b).** Donner la définition de *"f est uniformément continue sur* $[1, 10]$ *"*.
**Solution.** La fonction $f$ est uniformément continue sur l'intervalle $[1, 10]$ si elle est continue et si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x, y \in ]1, 10[ \quad (|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon).$$

**Question 12 (c).** En utilisant votre définition (mais aucun théorème), montre que la fonction $f$ définie par $f(x) = \frac{(x^2+1)}{x}$ est uniformément continue sur $[1, 10]$.
**Solution.** On commence a voir que

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x^2 + 1)}{x} = \frac{2}{1} = f(1)$$

et que

$$\lim_{x \to 10^-} f(x) = \lim_{x \to 10^-} \frac{(x^2 + 1)}{x} = \frac{21}{10} = f(10).$$

Maintenant soit $\epsilon > 0$ et soit $x_0 \in ]1, 10[$. On définit $\delta := \frac{\epsilon}{2}$ et on calcule que

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &= \Big|\frac{(x^2+1)}{x} - \frac{(x_0^2+1)}{x_0}\Big| \\
&= \Big|\frac{x_0x^2 + x_0 - xx_0^2 - x}{xx_0}\Big| \\
&= \Big|\frac{x_0x^2 - xx_0^2 + x_0 - x}{xx_0}\Big| \\
&= \Big|\frac{x_0x(x - x_0) + (x_0 - x)}{xx_0}\Big| \\
&\leq |x - x_0| + \frac{1}{|xx_0|}|x - x_0| \\
&\leq |x - x_0| + |x - x_0| \\
&\leq \epsilon
\end{aligned}$$

pour tous $x \in ]1, 10[$ tel que $|x - x_0| < \delta$. On peut conclure que $f$ est continue sur l'intervalle $[1, 10]$. Comme la choix de $\delta$ ne dépend pas du $x_0$, on peut aussi conclure que $f$ est uniformément continue sur $[1, 10]$