EPFL
Géométrie I, MATH-120

Lundi 22.01.2017 de 16h15 à 19h15

Examen

Nom : Prenom : No SCIPER :

Consignes :

- **Indiquer votre nom et/ou numero SCIPER sur chaque feuille de votre copie et les numeroter.**
- **Utiliser une nouvelle feuille pour chaque nouvel exercice.**
- **A la fin de l'examen retourner votre copie dans la feuille A3 pliée.**
- **Les notes de cours et les notes d'exercices ne sont pas autorisées.**
- **Le formulaire standard est autorisé.**
- **Une calculette simple (sans display graphique) est autorisée.**
- **Sauf mention explicite du contraire on a le droit d'admettre un résultat d'un autre exercice ou d'une question précédente du même exercice pour répondre à une question.**
- **Dans tout le texte, "symétrie" signifie "symétrie orthogonale".**
- **Sauf mention explicite du contraire les angles seront représentés sous forme de nombres complexes de modules 1.**
- **L'examen est long mais il n'est pas nécéssaire de le faire correctement intégralement pour obtenir la note maximale.**

Exercice 1. (Questions de cours)

1. Soit G un groupe et $A \subset G$ un ensemble. Donner une définition du sous-groupe engendré par A dans G, $\langle A \rangle \subset G$.
2. Dire si ces affirmations sont vraies ou fausses (donner les réponses sur votre copie et pas sur le texte de l'examen) :
   (a) V : Soit $\varphi : G \to H$ un morphisme de groupes et $A \subset G$ qui engendre G. On suppose que $A \subset \ker \varphi$ alors $\forall g \in G$, $\varphi(g) = e_H$.
   (b) V : La conjuguée $r \circ s \circ r^{-1}$ d'une symétrie axiale (affine) par une rotation (affine) est une symétrie axiale (affine).
   (c) F : La composée $r \circ s$ d'une rotation (affine) et d'une symétrie axiale (affine) est une symétrie axiale (affine).
   (d) F : L'application affine
$$\varphi(x, y) = (\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 1, \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 1)$$
   est une symétrie glissée.

Exercice 2. Soit s la symétrie d'axe la droite d'équation $2x + y = 1$ et s' celle d'équation $x + 3y = 2$

1. Quel est l'angle (exprimé en terme de complexes) entre les deux droites ci-dessus ?
2. Quelle est la nature de l'isométrie $\varphi = s' \circ s$ et quels sont ses éléments caractéristiques (points fixes, etc...) et donner l'expression de φ sous forme de transformation sur les complexes.
3. Même question pour φ^{2018}.

Démonstration. 1. Des vecteurs directeurs unitaires des deux droites sont
$$(1, -2)/\sqrt{5},\ (3, -1)/\sqrt{10}$$
correspondant aux nombres complexes
$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1 - 2i),\ z_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(3 - i).$$
L'angle entre des deux vecteus (l'angle complexe de la rotation envoyant z_1 sur z_2) est donc donne par
$$\omega = z_2/z_1 = z_2.\overline{z_1} = \frac{1}{\sqrt{10}}(3 - i)\frac{1}{\sqrt{5}}(1 + 2i) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

et l'angle entre les deux droites D_1 et D_2 est le couple de complexes

$$(\omega, -\omega).$$

2. φ est une isometrie speciale (composee de deux isometries non-speciales). Soit P le point d'intersection de D_1 et D_2 (on a $P = (1/5, 3/5)$). Comme P est un point fixe de s et s' alors alors P est un point fixe de φ car

$$\varphi(P) = s'(s(P)) = s'(P) = P.$$

Reste a calculer l'angle de φ.
Ecrivons les parties lineaires s_0 et s'_0 sou forme de transformation complexes

$$s_0 : z \mapsto \overline{\omega_1 z},\ s'_0 : z \mapsto \overline{\omega_2 z}.$$

On sait que

$$s_0(z_1) = z_1 = \overline{\omega_1 z_1}$$

et donc on a $\omega_1 = \overline{z_1}^2$ et de meme $\omega_2 = \overline{z_2}^2$ et finalement

$$\varphi_0(z) = \overline{\omega_2 \overline{\omega_1 z}} = \omega_1 \overline{\omega_2} z = (\overline{z}_1/z_2)^2 z = \omega^2 z = iz.$$

L'angle est donc i et

$$\varphi(z) = i(z-z_P)+z_P = iz+(1-i)z_P = iz+\frac{1}{5}(1-i)(1+3i) = iz+\frac{4}{5}+i\frac{2}{5} = r_{i,\frac{4}{5}+i\frac{2}{5}}(z).$$

On pourrait egalement calculer explicitement ω_1 et ω_2 (mais ce n'est pas necessaire) : en resolvant l'equation

$$\overline{\omega.z} = z \Longleftrightarrow \omega = \overline{z}/z$$

avec $z = 1 - 2i,\ 3 - i$ on trouve

$$\omega_1 = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i,\ \omega_2 = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$$

et on retrouve le fait que

$$\omega_1 \overline{\omega_2} = i.$$

3. L'angle de φ^{2018} vaut $i^{2018} = i^2 = -1$ car $i^4 = 1$ et P est un point fixe correspondant a $z_P = 1/5 + 3i/5$. Donc est la rotation d'angle -1 et de centre P et est donc la symetrie central de centre P :

$$\varphi^{2018}(z) = -(z - z_P) + z_P = -z + 2z_P = r_{-1,2/5+6i/5}(z).$$

□

Exercice 3. Soit s la symétrie affine definie par

$$s(x,y) = (-\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y + 1, -\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y + 1)$$

1. Donner une équation de l'axe de la partie linéaire s_0.
2. Ecrire s comme la composée $t \circ s'$ ou s' est une symétrie axiale et t une translation de vecteur paralelle a l'axe de s (ou de s_0 ou de s').
3. Calculer les paramètres complexes de s^{2018}.

Démonstration. 1. C'est bien une symetrie $((-\frac{12}{13})^2 + (-\frac{5}{13})^2 = 1)$ et sa partie lineaire est donnee en remplacant $(1,1)$ par $(0,0)$. Pour l'axe, on resoud l'equation donnee par la premiere ligne (puisque les deux sont multiples l'une de l'autre) de $s_0(x,y) = (x,y)$ soit

$$-\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y = x \Longleftrightarrow \frac{25}{13}x + \frac{5}{13}y = 0 \Longleftrightarrow 5x + y = 0$$

Un vecteur directeur est $\vec{u} = (1,-5)$ et c'est un vecteur de longueur $(2.13)^{1/2}$.

2. On doit decomposer le vecteur $(1,1) = \vec{u}' + \vec{v}'$ suivant l'axe de la symetrie et suivant l'axe perpendiculaire : on a

$$\vec{u}' = \frac{\langle (1,1), \vec{u} \rangle}{2.13}\vec{u} = -\frac{2}{13}(1,-5) = (-\frac{2}{13}, \frac{10}{13})$$

et

$$\vec{v}' = (1,1) - \vec{u}' = (\frac{15}{13}, \frac{3}{13})$$

et on a

$$s = t_{(1,1)} \circ s_0 = t_{(-\frac{2}{13}, \frac{10}{13})} \circ s', \; s' = t_{(\frac{15}{13}, \frac{3}{13})} \circ s_0.$$

Comme $\vec{v}'$ est perpendiculaire a l'axe de s_0, s' est une symetrie axiale. Comme $\vec{u}'$ est non nulle on a une symetrie glissee.

3. Comme $t_{\vec{u}'}$ et s' commutent et que $s'^2 = \mathrm{Id}$ on a

$$s^{2018} = t_{\vec{u}'}^{2018} \circ (s')^{2018}. = t_{\vec{u}'}^{2018} = t_{2018.(-\frac{2}{13}, \frac{10}{13})} = t_{(-\frac{4036}{13}, \frac{20180}{13})}$$

et en terme de transformation sur les complexes s^{2018} est

$$z \mapsto z - \frac{4036}{13} + i\frac{20180}{13}$$

dont les parametres complexes sont $(1, -\frac{4036}{13} + i\frac{20180}{13})$.

$\square$

Groupes finis de transformations affines

On note

$$T(\mathbb{R}^2) = \{t_{\vec{u}},\ \vec{u} \in \mathbb{R}^2\}$$

le groupe des translation de $\mathbb{R}^2$ et $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ le groupe des applications linéaires inversibles (ce groupe s'identifie au groupe des matrices 2×2 inversibles

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) = \{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ a, b, c, d \in \mathbb{R},\ \det(M) = ad - bc \neq 0\}.$$

Une transformation affine du plan $\mathbb{R}^2$ est une application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de la forme

$$\varphi = t_{\vec{u}} \circ \varphi_0$$

où $\varphi_0 \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ est une application linéaire inversible et $t_{\vec{u}}$ est la translation de vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$: pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\varphi(\vec{x}) = \vec{u} + \varphi_0(\vec{x}).$$

On note $\mathrm{AGL}(\mathbb{R}^2) \subset \mathrm{Bij}(\mathbb{R}^2)$ l'ensemble des applications affines. Cet ensemble forme un groupe (admis) qui d'ailleurs contient le groupe des isométries du plan $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ comme sous-groupe (cf. le cours).

Le but des deux exercices suivants est de montrer le

Théorème 1. *Soit $G \subset \mathrm{AGL}(\mathbb{R}^2)$ un groupe fini de transformations affines d'ordre $|G|$ impair, alors G est cyclique.*

Exercice 4.

1. Montrer que le Théorème est vrai si on suppose que $G \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ (ie. si G est un sous-groupe d'isométries). La stratégie de la preuve consiste à ce ramener au cas des groupes d'isométries.
2. Montrer que $T(\mathbb{R}^2) \cap \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2) = \{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}\}$ et en déduire que la décompositon d'une transformation affine φ sous la forme

   $$\varphi = t_{\vec{u}} \circ \varphi_0$$

   est unique. L'application linéaire φ_0 s'appelle la partie linéaire de φ.
3. Montrer que $T(\mathbb{R}^2)$ est distingué dans $\mathrm{AGL}(\mathbb{R}^2)$.
4. Montrer que l'application "partie linéaire"

   $$\mathrm{lin} : \begin{array}{ccc} \mathrm{AGL}(\mathbb{R}^2) & \mapsto & \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2) \\ \varphi & \mapsto & \varphi_0 \end{array}$$

   est un morphisme de groupes dont le noyau est $T(\mathbb{R}^2)$.

5. Soit G un groupe fini de transformation affines. Montrer que $T(\mathbb{R}^2) \cap G = \{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}\}$.
6. On note $G_0 = \mathrm{lin}(G)$ l'image du groupe G par le morphisme "partie linéaire". Montrer que lin : $G \to G_0$ est un isomorphisme.

Démonstration. 1. Si G est un groupe fini d'isometries affines alors G est soit cyclique, soit diedral. Comme les groupe diedraux sont d'ordre pair alors G est cyclique (c'est un groupe forme de rotations).

2. Soit $t = t_{\vec{u}}$ une translation. Si $t_{\vec{u}}$ est lineaire (dans $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$) on a $t_{\vec{u}}(\vec{0}) = \vec{0} = \vec{u} + \vec{0}$ donc $\vec{u} = \vec{0}$ et $t = t_{\vec{0}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$.
Supposons que
$$\varphi = t \circ \varphi_0 = t' \circ \varphi_0'$$
avec t, t' des translations et φ_0, φ_0' des applications lineaires inversibles. On a alors
$$t'^{-1} \circ t = \varphi_0' \circ \varphi_0^{-1}.$$
Comme $t'^{-1} \circ t$ est une translation et que $\varphi_0' \circ \varphi_0^{-1}$ est lineaire on a $t'^{-1} \circ t = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2} = \varphi_0' \circ \varphi_0^{-1}$ et donc
$$t = t', \varphi_0' = \varphi_0.$$
Ainsi la decomposition est unique. Si $t = \vec{u}$ on a
$$\varphi(\vec{0}) = t_{\vec{u}}(\varphi_0(\vec{0})) = t_{\vec{u}}(\vec{0}) = \vec{u}$$
et donc $t = t_{\varphi(\vec{0})}$.

3. On veut montrer que le conjugue d'une translation par une application affine est encore une translation. Soit $\varphi = t_{\varphi(\vec{0})} \circ \varphi_0$ une application affine et $t = t_{\vec{u}}$ une translation. On a
$$\varphi \circ t \circ \varphi^{-1}(\vec{v}) = t_{\varphi(\vec{0})} \circ \varphi_0 \circ t_{\vec{u}} \circ \varphi_0^{-1} t_{-\varphi(\vec{0})}(\vec{v}) = t_{\varphi(\vec{0})} \circ \varphi_0 \circ t_{\vec{u}}(\varphi_0^{-1}(\vec{v} - \varphi(\vec{0})))$$
et comme φ_0^{-1} est lineaire on a
$$\varphi_0^{-1}(\vec{v} - \varphi(\vec{0})) = \varphi_0^{-1}(\vec{v}) - \varphi_0^{-1}(\varphi(\vec{0}))$$
Ainsi (par linearite de φ_0) on a
$$\varphi \circ t \circ \varphi^{-1}(\vec{v}) = t_{\varphi(\vec{0})} \circ \varphi_0(\vec{u} + \varphi_0^{-1}(\vec{v}) - \varphi_0^{-1}(\varphi(\vec{0}))) = t_{\varphi(\vec{0})}(\varphi_0(\vec{u}) + \vec{v} - \varphi(\vec{0}))$$
$$= \varphi(\vec{0}) + \varphi_0(\vec{u}) + \vec{v} - \varphi(\vec{0}) = \vec{v} + \varphi_0(\vec{u})$$
est une translation.
Ainsi $T(\mathbb{R}^2)$ est distingue dans $\mathrm{AGL}(\mathbb{R}^2)$.
(remarque : il s'agit exactement de la preuve du fait que $T(\mathbb{R}^2)$ est distingue dans le groupe $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$. : elle s'applique en fait aux transformation affine.)

4. Soit φ, ψ deux applications affines, on a
$$\varphi = t \circ \varphi_0,\ \ \psi = t' \circ \psi_0$$
et
$$\varphi \circ \psi = t \circ \varphi_0 \circ t' \circ \psi_0 = t \circ \varphi_0 \circ t' \circ \circ \varphi_0^{-1} \circ \varphi_0 \circ \psi_0$$
et comme $T(\mathbb{R}^2)$ est distingue $\varphi_0 \circ t' \circ \circ \varphi_0^{-1} = t''$ est encore une translation et donc
$$\varphi \circ \psi = t \circ t'' \circ (\varphi_0 \circ \psi_0)$$
comme $t \circ t''$ est une translation et $\varphi_0 \circ \psi_0$ est lineaire par unicite de la decomposition translation/partie lineaire on a que $\varphi_0 \circ \psi_0$ est la partie lineaire $(\varphi \circ \psi)_0$.
De meme on a
$$\varphi^{-1} = \varphi_0^{-1} \circ t^{-1} = \varphi_0^{-1} \circ t^{-1} \varphi_0 \circ \varphi_0^{-1}$$
et $\varphi_0^{-1} \circ t^{-1} \varphi_0$ est encore une translation donc φ_0^{-1} est la partie lineaire de φ^{-1} :
$$(\varphi^{-1})_0 = \varphi_0^{-1}.$$
Donc $\varphi \mapsto \varphi_0$ est bien un morphisme de groupes.
Par ailleurs par unicite de la decomposition on a que $\varphi = t \circ \varphi_0$ est une translation si et seulement si $\varphi = t$ et alors $\varphi_0 = \mathrm{Id}$. Ainsi on a bien
$$\ker(Lin) = T(\mathbb{R}^2).$$
5. Soit G un groupe fini de transformations affines alors les elements de G sont d'ordre fini et la seule translation d'ordre fini est la tranlation par le vecteur nul (les autres translation sont d'ordre infini car pour $n \in \mathbb{Z}$ $t_{\vec{u}}^n = t_{n.\vec{u}}$).
6. Soit $Lin_{|G}$ la restriction du morphisme partie lineaire a G. Soit
$$\varphi \in \ker(Lin_{|G} \subset \ker(Lin)$$
alors φ est une translation par la question 4 et est donc l'identite par la question precedente. Ainsi
$$\ker(Lin_{|G} = \{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}\}$$
et l'application partie lineaire est injective sur le groupe fini G.

Exercice 5. La dernière question de l'exercice précédent ramène donc la preuve du Théorème 1 au cas ou $G = G_0$ est un groupe fini d'applications linéaires. Dans cet exercice, on va montrer que G est isomorphe a un groupe d'isométries linéaires ce qui permettra de conclure.

On notera $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$:
$$\langle (x, y), (x', y') \rangle_0 = xx' + yy'.$$
On se donne donc $G \subset \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ un groupe fini d'applications linéaires et on suppose que son ordre $|G|$ est impair.

1. Montrer que pour tout $\varphi \in G$, $\det(\varphi)^{|G|} = 1$ et en déduire que $\det \varphi = 1$.
2. On définit l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle_G : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par la formule suivante :
$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2,\ \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_G := \frac{1}{|G|} \sum_{\varphi' \in G} \langle \varphi'(\vec{u}), \varphi'(\vec{v}) \rangle_0.$$
Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, c'est à dire est
— Symétrique,
— Bilinéaire,
— Positif-Défini.
3. Ces propriétés impliquent (on l'admet) que $\mathbb{R}^2$ possede une base $\mathcal{B}_G = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ qui est orthonormée pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$:
$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle_G = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle_G = 1,\ \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle_G = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle_G = 0.$$
Pour $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, on note $(x, y),\ (x', y')$ les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}_G$: $\vec{u} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2,\ \vec{v} = x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2$. Montrer que
$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_G = \langle (x, y), (x', y') \rangle_0$$
4. Montrer que pour tout $\varphi \in G$ et $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ on a
$$\langle \varphi(\vec{u}), \varphi(\vec{v}) \rangle_G = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_G.$$
5. Pour $\varphi \in G$ on note M_φ la matrice de l'application linéaire φ dans la base $\mathcal{B}_G = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Montrer que M_φ est la matrice d'une isométrie (pour le produit scalaire usuel).
6. Montrer que le groupe G est isomorphe a un groupe d'isométrie de $\mathbb{R}^2$ (pour le produit scalaire usuel).
7. Conclure la preuve du Théorème 1.

Démonstration.

1. Par Lagrange on a $\varphi^{|G|} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ et donc
$$\det(\varphi^{|G|}) = \det(\mathrm{Id}) = 1 = \det(\varphi)^{|G|}$$
car $\det : \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}^\times$ est un morphisme de groupes. Ainsi $\det(\varphi)$ est un nombre reel de valeur absolue 1 (car $|\det \varphi|^{|G|} = 1$) donc vaut ± 1. Comme $|G|$ est impair on a necessairement que $\det(\varphi) = 1$.
2. Comme $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ est symetrique on a $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$,
$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{\varphi' \in G} \langle \varphi'(\vec{u}), \varphi'(\vec{v}) \rangle_0 = \frac{1}{|G|} \sum_{\varphi' \in G} \langle \varphi'(\vec{v}), \varphi'(\vec{u}) \rangle_0 = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle_G.$$

On a donc la symetrie. Comme $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ est bilineaire, et les φ sont lineaires on a

$$\langle\lambda\vec{u}+\vec{w},\vec{v}\rangle_G = \frac{1}{|G|}\sum_{\varphi'\in G}\langle\varphi(\lambda\vec{u}+\vec{w}),\varphi(\vec{v})\rangle_0 = \frac{1}{|G|}\sum_{\varphi'\in G}\langle\lambda\varphi(\vec{u})+\varphi(\vec{w}),\varphi(\vec{v})\rangle_0$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{\varphi'\in G}\lambda\langle\varphi(\vec{u}),\varphi(\vec{v})\rangle_0 + \langle\varphi(\vec{w}),\varphi(\vec{v})\rangle_0 = \lambda\langle\vec{u},\vec{v}\rangle_G + \langle\vec{w},\vec{v}\rangle_G.$$

Ainsi on a la linearite en la premiere variable, et par symetrie en la deuxieme egalement,.
On a

$$\langle\vec{u},\vec{u}\rangle_G = \frac{1}{|G|}\sum_{\varphi'\in G}\langle\varphi'(\vec{u}),\varphi'(\vec{u})\rangle_0$$

et comme le produit scalaire euclidien est positif on a $\langle\varphi'(\vec{u}),\varphi'(\vec{u})\rangle_0 \geqslant 0$ et donc $\langle\vec{u},\vec{u}\rangle_G$. De plus suppposons que $\langle\vec{u},\vec{u}\rangle_G = 0$ comme c'est une somme des termes positifs ou nuls on a $\langle\varphi'(\vec{u}),\varphi'(\vec{u})\rangle_0$ et comme le produit scalaire euclidien est positif defini on a pour tout φ', $\varphi'(\vec{u}) = 0$ et en particulier pour $\varphi' = \mathrm{Id}$ qui donne $\vec{u} = 0$. Ainsi $\langle\cdot,\cdot\rangle_G$ est defini-positif.

3. Soit $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$ qui est orthonormée pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_G$: On a

$$\vec{u} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2,\ \vec{v} = x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2.$$

On a alors par bilinearite

$$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle_G = \langle x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2, x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2\rangle_G =$$

$$xx'\langle\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1\rangle_G + yy'\langle\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2\rangle_G + xy'\langle\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\rangle_G + x'y\langle\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1\rangle_G =$$
$$x^2\langle\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1\rangle_G + y^2\langle\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2\rangle_G = xx' + yy' = \langle(x,y),(x',y')\rangle_0.$$

4. Soit $\varphi\in G$, on a

$$\langle\varphi(\vec{u}),\varphi(\vec{v})\rangle_G = \frac{1}{|G|}\sum_{\varphi'\in G}\langle\varphi'(\varphi(\vec{u})),\varphi'(\varphi(\vec{v}))\rangle_0;$$

on pose alors $\varphi'' = \varphi'\circ\varphi$, quand φ' parcours G, $\varphi'' = \varphi'\circ\varphi$ parcours G (car la composition a droite par φ est une bijection de G sur G) et donc

$$\langle\varphi(\vec{u}),\varphi(\vec{v})\rangle_G = \frac{1}{|G|}\sum_{\varphi''\in G}\langle\varphi''(\vec{u}),\varphi''(\vec{v})\rangle_0 = \langle\vec{u},\vec{v}\rangle_G.$$

5. Ecrivons cette matrice

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}.$$

Soit $\mathcal{B}_0 = (\mathbf{e}_{0,1}, \mathbf{e}_{0,1}) = ((1,0),(0,1))$ la base canonique et soit φ_0 l'application lineaire telle que

$$\varphi_0(\mathbf{e}_{0,1}) = (a, c),\ \ \varphi_0(\mathbf{e}_{0,1}) = (b, d).$$

La matrice de cette appplication (dans la base $\mathcal{B}_0$) est donc M_φ et on a

$$\langle \varphi_0(x,y), \varphi_0(x',y')\rangle_0 = \langle (ax+by, cx+dy), (ax'+by', cx'+dy')\rangle_0$$

$$= \langle (ax+by)\mathbf{e}_1 + (cx+dy)\mathbf{e}_2, (ax'+by')\mathbf{e}_1 + (cx'+dy')\mathbf{e}_2\rangle_G =$$

$$\langle \varphi(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2), \varphi(x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2)\rangle_G = \langle x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2, x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2\rangle_G = \langle (x,y),(x',y')\rangle_0$$

donc

$$\langle \varphi_0(x,y), \varphi_0(x',y')\rangle_0 = \langle (x,y),(x',y')\rangle_0$$

c'est donc une isometrie lineaire et sa matrice M_φ est la matrice d'une isometrie.

6. Par la correspondance entre applications lineaires et matrices, l'application

$$\varphi \in G \mapsto M_\varphi \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

est un morphisme de groupes injectif dont l'image est contenue dans le groupe $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales par la question precedente.

Ainsi G est isomorphe a son image qui est un groupe fini de matrices orthogonales et correspond donc a un groupe fini d'isometries de $\mathbb{R}^2$ pour le produit scalaire euclidient (celui dont les matrices dans la base canonique est donne par ce groupe de matrices).

7. On applique la premiere question de l'exercice precedent au groupe d'isometries euclidienne au quel G est isomorphe.